

文章编号: 1001-4322(2006)03-0435-04

# 有耗介质完全匹配层在时域多分辨分析中的应用\*

马 良, 程引会, 周 辉, 冯 柯

(西北核技术研究所, 西安 710024)

**摘 要:** 对无耗和有耗介质中的完全匹配问题进行了研究, 将广义完全匹配吸收层(GPML)应用到时域多分辨分析(MRTD)中。GPML 是在扩展坐标系下由 Maxwell 方程得到的, 在 MRTD 中实现对 GPML 的求解, 并在频域对 GPML 进行了有效性分析, 得出了 GPML 在不同空间步长和不同吸收层厚度情况下入射波由真空入射到吸收层的反射系数在频域的分布, 并给出了有耗介质中 GPML 吸收效果的例子。结果表明, GPML 的反射系数在一定频率范围内小于 -40 dB, 且随着计算空间步长的减小和吸收层厚度的增加而减小。GPML 既可以用来截断无耗介质也可以用来截断有耗介质, 为时域多分辨分析方法提供了一种较为通用的吸收边界。

**关键词:** 完全匹配吸收层; 有耗介质; 时域多分辨分析; 反射系数

**中图分类号:** O441.4 **文献标识码:** A

时域多分辨分析(MRTD)<sup>[1]</sup>在计算波导结构、腔体、微带线以及电磁场散射、激励等问题当中已得到较广泛的应用。与传统的时域有限差分法(FDTD)相比, MRTD 有较好的色散特性<sup>[2]</sup>, 其最突出的性能是它在对空间进行网格划分以后, 每个波长采两个点可达到 FDTD 每个波长采 10 个点的精度, 这可以有效地减少计算所需的内存空间, 因此, MRTD 特别适合于解决电大尺寸问题<sup>[3]</sup>。

由于 MRTD 基函数的非紧支撑性<sup>[1]</sup>, 导致边界条件比较复杂。Linda P. B. 等人曾提出了一种用于 MRTD 方法的无耗介质的 Mur 吸收边界<sup>[4]</sup>和 PML 吸收边界<sup>[5]</sup>, 其在无耗介质中吸收效果很好, 但对有耗介质效果不好。MRTD 方法中其他形式吸收边界的研究也比较少<sup>[3]</sup>, GPML 由扩展坐标系下由 Maxwell 方程得到的, 可以用于不均匀介质、有耗介质中电磁波的截断, 本文尝试将 GPML 用于 MRTD 方法中无耗和有耗介质的截断。

当用 MRTD 计算埋地、半埋地或地面附近等情况下的电磁场问题时, 计算空间将包含半无限大的地, 因此需要采用有耗介质中的吸收边界进行截断。本文将 GPML 应用于 MRTD 当中, 给出了具体的应用方法, 并对 GPML 的有效性进行了分析。

## 1 基本原理

在各向同性介质 $(\epsilon, \mu, \sigma_0, \sigma_0^*)$ 中, 频域 Maxwell 方程在扩展坐标系中可写为<sup>[6]</sup>

$$\nabla_s \times \mathbf{E} = -j\omega\mu' \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla_s \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon' \mathbf{E} \quad (2)$$

式中:  $\mu' = \mu + \sigma_0^*/j\omega$ ;  $\epsilon' = \epsilon + \sigma_0/j\omega$ ;  $\nabla_s = \mathbf{e}_x \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $s_x, s_y, s_z$  分别是  $x, y, z$  方向的坐标扩展变量。  $\epsilon, \mu, \sigma_0, \sigma_0^*$  分别是介电常数、磁导率、电导率、导磁率。

假设 $(\epsilon'_1, \mu'_1), (\epsilon'_2, \mu'_2)$ 两介质的分界面为 $z=0$ , 有一平面波以 $\theta, \phi$ 从介质 1 中入射到分界面上。入射平面波可以按电场极化方向分解为垂直极化波和水平极化波, 两种成分在界面处的反射系数分别为<sup>[7]</sup>

$$R_{\perp} = \frac{k_1 \cos\theta_1 \mu'_2 - k_2 \cos\theta_2 \mu'_1}{k_1 \cos\theta_1 \mu'_2 + k_2 \cos\theta_2 \mu'_1}, \quad R_{\parallel} = \frac{k_1 \cos\theta_1 \epsilon'_2 - k_2 \cos\theta_2 \epsilon'_1}{k_1 \cos\theta_1 \epsilon'_2 + k_2 \cos\theta_2 \epsilon'_1} \quad (3)$$

若选择:  $\epsilon'_1 = \epsilon'_2, \mu'_1 = \mu'_2; s_{1x} = s_{2x}, s_{1y} = s_{2y}$ 。这时,  $R_{\perp} = R_{\parallel} = 0$ 。也就是说, 波能以任意角度无反射地由介质 1 进入介质 2 中<sup>[6]</sup>。

如果介质 1 是真实介质, 将介质 2 看作一般理想吸收层(GPML), 这样对介质 1 有 $(s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}) = (1, 1, 1)$ ,

\* 收稿日期: 2005-08-30; 修订日期: 2006-01-23

作者简介: 马 良(1981—), 男, 硕士研究生, 主要从事电磁场数值计算、电磁脉冲效应研究; maliang423@ustc.edu。

对介质 2 有  $(s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}) = (1, 1, s_z)$ 。为了使波在介质 2 中被吸收, 令

$$s_z(z) = s_{z0} \left[ 1 + \frac{\sigma_z(z)}{j\omega \epsilon} \right] \quad (4)$$

式中:  $\sigma_z(z), s_{z0}(z)$  是  $z$  的函数, 则平面波沿  $z$  方向就是衰减传播的<sup>[6]</sup>。

这样, 由(1), (2)和(4)式, 参照 Berenger 场分解的概念<sup>[8]</sup>, 2 维 TM 波频域的 Maxwell 方程的分量形式可写为(3 维情况可参考文献<sup>[6]</sup>)

$$-\frac{\partial H_x}{s_{y0}(y)\partial y} = (j\alpha\epsilon + \sigma_0 + \sigma_y + \frac{\sigma_0\sigma_y}{j\alpha\epsilon})E_{zy}, \quad \frac{\partial H_y}{s_{x0}(x)\partial x} = (j\alpha\epsilon + \sigma_0 + \sigma_x + \frac{\sigma_0\sigma_x}{j\alpha\epsilon})E_{zx} \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_z}{s_{y0}(y)\partial y} = (j\omega\mu + \sigma_0^* + \sigma_y^* + \frac{\sigma_0^*\sigma_y^*}{j\omega\mu})H_x, \quad -\frac{\partial E_z}{s_{x0}(x)\partial x} = (j\omega\mu + \sigma_0^* + \sigma_x^* + \frac{\sigma_0^*\sigma_x^*}{j\omega\mu})H_y \quad (6)$$

其中要求  $\sigma_i/\epsilon = \sigma_i^*/\mu, i = x, y; \sigma_0, \sigma_0^*$  为待匹配介质的电导率和导磁率。

## 2 GPML 在时域多分辨分析中的实现

### 2.1 迭代方程的推导

这里采用 Battle-Lemarie 三次样条小波<sup>[1]</sup>, 由于小波基的非紧支撑性, 导致推导过程比较复杂。在时域多分辨分析方法中, 将各场量分解成

$$E_z(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty} E_{l,m,n+1/2}^{z,\phi} h_k(t) \phi_l(x) \phi_m(y) \phi_{n+1/2}(z) \quad (7)$$

$$H_x(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty} H_{l,m,n+1/2}^{x,\phi} h_{k+1/2}(t) \phi_l(x) \phi_{m+1/2}(y) \phi_{n+1/2}(z) \quad (8)$$

式中:  $\phi(x), h_k(t)$  分别是空间尺度函数和时间脉冲函数, 其它场量的分解形式参考相关文献<sup>[1-2]</sup>。这里只讨论 0 阶多分辨分析, 即只含尺度函数的情况。下面以(5)式为例说明 GPML 在 MRTD 中的计算形式。

首先, 将(5)式中第一式变换到时域方程的形式

$$-\frac{\partial H_x}{s_{y0}(y)\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + (\sigma_0 + \sigma_y)E_{zy} + \frac{\sigma_0\sigma_y}{\epsilon} E_{zy}^I \quad (9)$$

其中  $\partial E_{zy}^I / \partial t = E_{zy}$ 。

然后, 将(7), (8)式代入(9)并应用伽略金(Galerkin)方法<sup>[9]</sup>可得

$$\begin{aligned} {}_{k+1} E_{l,m,n+1/2}^{zy,\phi} &= \frac{1}{\epsilon/\Delta t + (\sigma_0 + \sigma_y^m)/2} \{ [\epsilon/\Delta t - (\sigma_0 + \sigma_y^m)/2] {}_k E_{l,m,n+1/2}^{zy,\phi} - \\ &1/\Delta y \sum_{i=-9}^8 a(i)/s_{y0}^{m+1/2} {}_{k+1/2} H_{l,m+i+1/2,n+1/2}^{x,\phi} - \sigma_0\sigma_y^m/\epsilon_{k+1/2} E_{l,m,n+1/2}^{zy,\phi I} \} \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  ${}_{k+1/2} E_{l,m,n+1/2}^{zy,\phi I} = {}_{k-1/2} E_{l,m,n+1/2}^{zy,\phi I} + {}_k E_{l,m,n+1/2}^{zy,\phi} \Delta t$ 。

其它方程可类似求得。由于基函数的非紧支撑性, 在 GPML 的边界外, 可采用理想导体边界截断。

### 2.2 有关参数的选取方法

为了减小数值反射效应,  $s_{z0}(z), \sigma_z(z)$  在  $z$  方向应该缓慢变化, 为此, 可取<sup>[6]</sup>

$$s_{z0}(z) = 1 + s_m \left( \frac{z}{\delta} \right)^n, \quad \sigma_z(z) = \sigma_m \sin^2 \left( \frac{\pi z}{2\delta} \right) \quad (11)$$

其中  $\delta$  为吸收层的厚度。

实践表明  $s_{z0}(z)$  越大, 波在  $z$  方向衰减越快, 计算时应使  $s_m$  满足  $2\Delta h < \lambda/(1+s_m) < 3\Delta h$ , 其中  $\Delta h, \lambda$  分别是时域多分辨分析的空间步长和入射波的最短波长<sup>[6]</sup>。

$\sigma_m$  的选取可根据相关理论计算选择:  $\sigma_m = -\frac{\epsilon c/\delta}{1+s_m(1/3+2/\pi^2)} \ln R_{th}$ 。其中  $R_{th}$  为理论上的反射系数。 $\sigma_m$

越大, 理论上吸收效果越好。由于 MRTD 基函数的非紧支撑性, 实际计算公式中  $\sigma_z(z)$  应该取附近几层的加权平均<sup>[5]</sup>。

## 3 吸收边界的有效性

GPML 的吸收效果与空间步长和吸收层的厚度等有关。图 1 给出了两种空间步长下不同吸收层厚度时,

电磁波由真空入射到吸收层的反射系数的频域分布。图 1 中的最高的频率为 1.5 GHz,可以看出,空间步长越小、吸收层越厚,吸收效果越好,但同时消耗的计算资源就越多。另外,计算表明当空间步长接近工作波长的一半时,用 4 层 GPML 吸收,反射系数仍在 5% 以下,通过增加吸收层厚可以进一步减小反射系数。

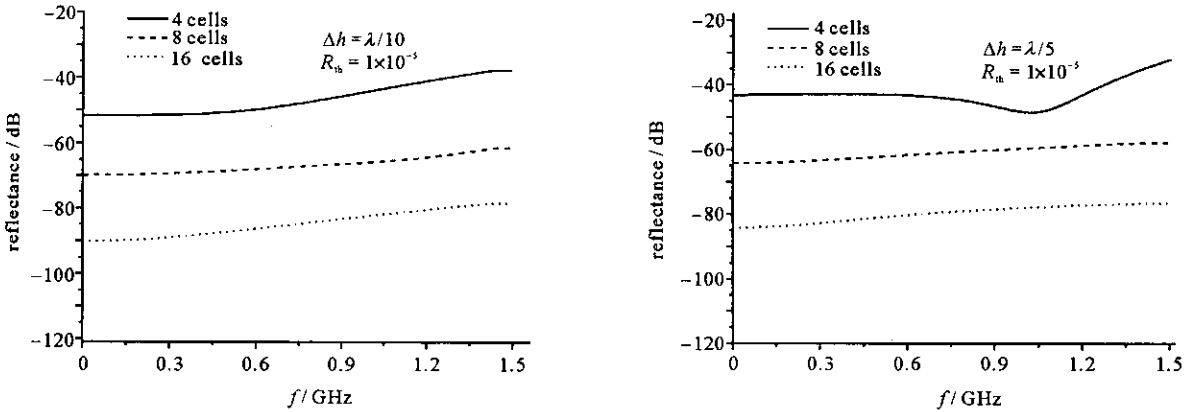


Fig. 1 Reflectance of GPML

图 1 吸收层反射系数

图 2 给出一个 2 维计算模型,在如图所示介质空间加了一个  $y$  方向高斯面电流源,半高宽 3 ns,面电流源位于  $x$  方向中间位置,在  $y$  方向的长 18 m。测试点和源距离 1 m,位于  $y$  方向中间位置。首先取较大的计算空间  $20\text{ m} \times 20\text{ m}$ ,这样,测试点在 100 ns 内不会接收到来自吸收边界的反射波。然后取较小计算空间为  $3\text{ m} \times 20\text{ m}$ ,此时,GPML 吸收层(4 层)与测试点最近距离为 0.5 m,测试点在脉冲通过后 6 ns 内便可接受到来自吸收层的反射波。图 3 给出了上述计算模型在较大空间(情形 1)和较小空间(情形 2)两种情形下测试点的 80 ns 内的  $z$  方向磁场的时域波形。由图 3 可以看出 GPML 吸收效果较好,没有出现反射现象,说明 GPML 用于截断电磁波在有耗介质中的传播是有效的。

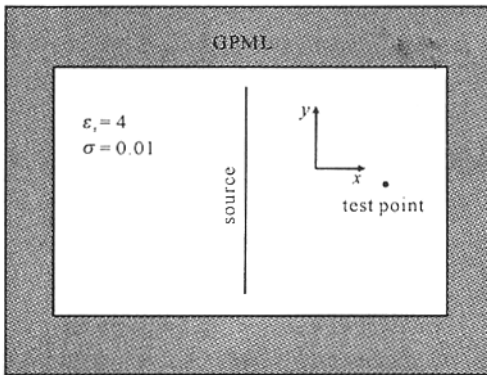


Fig. 2 Computing model

图 2 计算模型

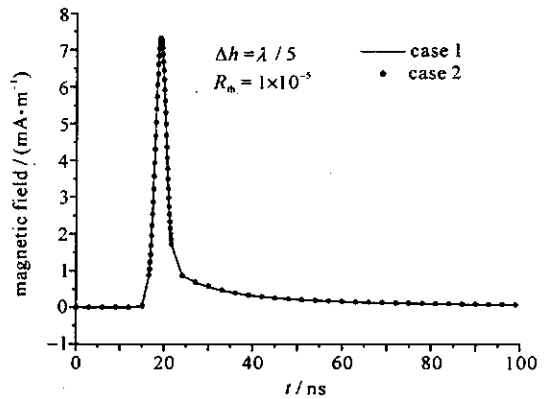


Fig. 3 Magnetic field at test point

图 3 测试点磁场

## 4 结 论

GPML 是在扩展坐标系下得到的广义吸收边界<sup>[10]</sup>,可以用来截断电磁波在有耗和无耗介质中的传播。本文将 GMPL 应用到时域多分辨分析方法中,在 MRTD 中实现对 GPML 的求解,为使用时域多分辨分析解决需要截断有耗介质的问题提供了较为通用的吸收边界,扩展了时域多分辨分析的使用对象。计算表明该吸收边界可以有效地截断有耗介质,且在 4 层 GPML 吸收、较大的空间步长情况下仍然可以获得较好的吸收效果,这样既充分发挥了 MRTD 方法可以取较大空间步长的优点,又没有显著增加计算所消耗的系统资源。

## 参考文献:

[1] Krumpholz M, Katehi L P B. MRTD: new time domain schemes based on multiresolution analysis[J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1996, 44(4):555-561.  
 [2] Tentzeris E M, Robertson R L, Katehi L P B, et al. Stability and dispersion analysis of Battle-Lemarie based MRTD schemes[J]. *IEEE*

*Trans Microwave Theory Tech*, 1999, **47**(7):1004-1013.

- [3] 成礼智, 郭汉伟. 小波与离散变换理论及工程实践[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005. (Chen L Z, Guo H W. Theory of wavelet and discrete transform and their engineering realization. Beijing: Tsinghua University Press, 2005)
- [4] Sarris C D, Katehi L P B, Harvey J F. Mesh truncation methods for the multiresolution time domain technique[C]//IEEE International Symposium on Antennas and Propagations. 2000, **3**:1350-1353.
- [5] Tentzeris E M, Robertson R L, Harvey J F, et al. PML absorbing boundary conditions for the characterization of open microwave circuit components using multiresolution time-domain techniques (MRTD). *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1999, **47**(11):1709-1751.
- [6] Fang J Y, Wu Z H. Generalized perfectly matched layer for the absorption of propagating and evanescent waves in lossless and lossy media [J]. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1996, **44**:2216-2222.
- [7] Chew W C. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell equations with stretched coordinates[J]. *Microwave Opt Technol Let*, 1994, **7**(13):599-604.
- [8] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. *J Compute Phys*, 1994, **114**(1):185-200.
- [9] Harrington R F. Field Computation by Moment Methods[M]. Malabr, FL: Krieger, 1982.
- [10] 王玥, 王建国, 张殿辉. 卷积完全匹配层截断 3 维金属矩形波导的应用研究[J]. 强激光与粒子束, 2005, **17**(10):1557-1563. (Wang Y, Wang J G, Zhang D H. Truncation of open boundary of 3D rectangular waveguide by CPML. *High Power Laser and Particle Beams*, 2005, **17**(10):1557-1563)

## Generalized perfectly matched layer in lossy media using multiresolution time domain

MA Liang, CHENG Yin-hui, ZHOU Hui, FENG Ke

(Northwest Institute of Nuclear Technology, P. O. Box 69-10, Xi'an 710024, China)

**Abstract:** A generalized perfectly matched layer(GPML) in lossless and lossy media is proposed. The GPML is derived from the Maxwell's equations in stretched coordinates and can be easily used in multiresolution time domain(MRTD). The validation of GPML is analyzed in frequency domain and the reflectances are attained in several conditions. An example is given to test the performance of GPML. The results show that the reflectance of GPML is below  $-40$  dB under certain frequency and becomes smaller when the space step is smaller and GPML is thicker. GPML provides a general absorbing boundary condition for lossless and lossy media using MRTD.

**Key words:** GPML; Lossy media; Multiresolution time domain(MRTD); Reflectance