

由重构矩阵存储精度引起的 波前重构误差的研究*

张家如 张 凯 周克恩 万 敏

(中国工程物理研究院应用电子学研究所, 成都 527 信箱 56 分箱, 610003)

摘 要 采用 Southwell 区域法波前重构模型对泽尼克多项式的前几项进行了波前重构的数值模拟, 研究了由重构矩阵存储精度原因而引起的波前重构误差。结果表明, 对于前六项, 以 8B it 的数据精度来存储重构矩阵就能保证波前重构误差不超过 1.0%, 而对于具有更高阶的泽尼克多项式, 比 8B it 更高的数据精度不会使误差减小。对一个测量所得的波前进行了研究, 所得结果和上述结论相符合。

关键词 波前重构 数据精度 重构精度

中图分类号 O 242

用自适应光学方法对畸变波前进行实时校正时, 波前重构是最重要的环节之一。根据不同的波前测量方法, Hudgin^[1]、Fried^[2]、Southwell^[3]等提出了各自的重构模型。虽然波前重构模型各异, 但求解波前重构方程时都可以用矩阵运算的方式来表示, 其差别仅在于重构矩阵的大小及其元素值的变化。因为实时波前重构需要在很短的时间内进行大量的计算, 在一般的微机或通用计算器上难以实现, 并且由于重构运算绝大部分都是较简单的乘加运算, 一般都设计专门的处理器, 以多路并行的方式来实现波前重构运算^[4]。波前的最小二乘最小范数解可以降低对校正系统动态范围等性能的要求^[5], 所以在实际系统中常常采用, 而满足最小二乘最小范数解的波前重构矩阵是一个实数矩阵。若以浮点数的方式来存储这个波前重构矩阵, 将给专用处理器的设计增加许多困难, 并会提高系统的成本和复杂程度, 增加处理时间。因此, 我们希望能以整数的方式来存储波前重构矩阵, 并且希望用尽量少的数据位来存储。由于波前重构矩阵数据存储精度降低而引起的误差增大, 也就是舍入误差。我们对这种误差进行了研究。

1 基本理论和公式

波前测量方法是利用哈特曼(Hartmann)波前传感器, 同时获得子孔径内波前 X 、 Y 向斜率。较合理的波前重构模型是 Southwell 波前重构模型, 如图 1 所示。图中, “ \cdot ”表示测量所得波前斜率的位置, “ \circ ”表示待估计的相位点。分别用 S^x 、 S^y 表示子孔径波前 X 、 Y 向斜率, Φ 表示子孔径的相位, 则该模型的基本重建公式是

$$(S_{i+1,j}^x + S_{i,j}^x)/2 = (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j})/h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, N$$

$$(S_{i,j+1}^y + S_{i,j}^y)/2 = (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j})/h, \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N-1$$

其中, $h = d/N$, d 是光孔径, N^2 是子孔径数。

该方程可以用矩阵 $DS = A\Phi$ 表示, 这里, S 是一个矢量, 包含了所有测量所得的波前斜率

* 国家 863 激光技术领域资助项目

1997 年 7 月 4 日收到原稿, 1998 年 2 月 23 日收到修改稿。

张家如, 男, 1967 年 11 月出生, 工程师

(共有 $2N^2$ 个元素); Φ 是包含 N^2 个元素的波前相位矢量; D 和 A 均是较大的矩阵。用 A^T 表示 A 的转置矩阵, 通过方程 $A^T D S = (A^T A) \Phi$ 可以求得它的最小二乘解。

如果仅仅通过波前斜率求解波前相位则方程的解不是唯一的(包含一个任意的整体平移量), 而使整体平移量为零可以降低对校正系统动态范围的要求, 故我们在上述方程中增加一个约束条件, 使 $\sum \Phi_i = 0$, 将方程变为 $A_e^T D_e S = (A_e^T A_e) \Phi_e$ 该方程有唯一解, 且这个解就是方程的最小二乘最小范数解

$$\Phi = (A_e^T A_e)^{-1} A_e^T D_e S = M S \quad (1)$$

方程(1)是进行数值模拟的基本公式之一, 其中 A_e 和 D_e 分别是矩阵 A 和 D 的增广矩阵; M 就是波前重构矩阵。满足最小二乘和最小范数解的波前重构矩阵 M 是一个实数矩阵, 共有 $2N^4$ 个元素。正如前面所述, 为了降低成本, 减小系统的复杂性, 缩短处理时间, 在误差允许范围内我们将以尽量低的数据精度来存储这个波前重构矩阵, 通过数值模拟来研究不同数据精度下的波前重构精度。

由于泽尼克(Zernike)多项式低阶项的象差意义明显, 故在光学领域常把扰动波前展开成泽尼克多项式的形式。为了具有一般性, 这里以泽尼克多项式描述的波前来研究波前重构精度。另外, 我们还对从实验室里采集的一个扰动波前进行了重构模拟。泽尼克多项式的前 10 项及其像差意义为: $Z_0(x, y) = 1$ (整体相移); $Z_1(x, y) = x$ (整体倾斜); $Z_2(x, y) = y$ (整体倾斜); $Z_3(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 1$ (离焦); $Z_4(x, y) = x^2 - y^2$ (像散); $Z_5(x, y) = 2xy$ (像散); $Z_6(x, y) = 3x(x^2 + y^2) - 6x$ (彗差); $Z_7(x, y) = 3y(x^2 + y^2) - 6y$ (彗差); $Z_8(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$; $Z_9(x, y) = y(3x^2 - y^2)$ 。

2 模拟结果

2.1 对泽尼克多项式的模拟结果

从空间各向同性的角度考虑, 泽尼克多项式的部分相邻项是等效的, 故我们选择 Z_1 、 Z_3 、 Z_4 、 Z_5 、 Z_7 和 Z_9 等项来进行模拟研究。因为我们的哈特曼波前传感器是 10×10 子孔径阵列的, 所以在模拟研究时也相应取 $N^2 = 100$ 。模拟计算时, 子孔径内的波前斜率由泽尼克多项式的偏微分在子孔径内的面积分得到, 这样, 就得到了方程(1)中的 S 向量。设通过(1)式由波前重构矩阵计算出来的子孔径相位为 $\Phi_{i,j}$, 而由泽尼克多项式直接计算而得到的子孔径波前相位用 $\Psi_{i,j}$ 表示, 那么, 波前重构的相对均方根误差 σ 将由(2)式求得

$$\sigma = \left(\frac{\sum_{i,j=1}^N (\Psi_{i,j} - \Phi_{i,j})^2 / N^2}{\sum_{i,j=1}^N (\Psi_{i,j} - \bar{\Psi})^2 / N^2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

$$\delta = \max(|\Psi_{i,j} - \Phi_{i,j}|) / \max(|\Psi_{i,j} - \bar{\Psi}|) \quad (3)$$

式中, $\bar{\Psi}$ 表示 $\Psi_{i,j}$ 的平均值。由于 $\Phi_{i,j}$ 和波前重构矩阵的存储精度有关, 故相对均方根误差 σ 也随波前重构矩阵的存储精度的改变而变化。对于部分泽尼克多项式, 通过数值模拟, 我们得到相对均方根误差 σ 和波前重构矩阵存储精度的关系如图 2 所示。另外, 我们用 δ 表示最大相对误差, 并通过(3)式求取 δ , 它和波前重构矩阵存储精度的关系如图 3 所示。图中的横坐标代表波前重构矩阵的存储精度, 以 Bit 为单位。一个 Bit 就是二进制数的一位。当我们说以 8Bit 数

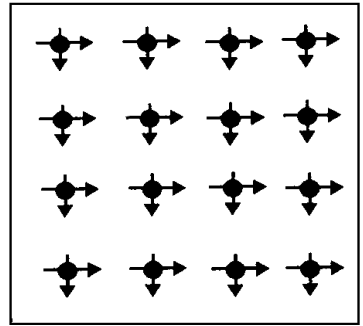


Fig 1 Southwell wavefront reconstruction model
图 1 绍契威尔区域法波前重构模型

据精度存储波前重构矩阵时,是指把波前重构矩阵的最大值放大到 8 位二进制数所能表示的最大整数,并把重构矩阵的其它元素也相应放大,化为整数存储。图中的纵坐标代表相对误差。

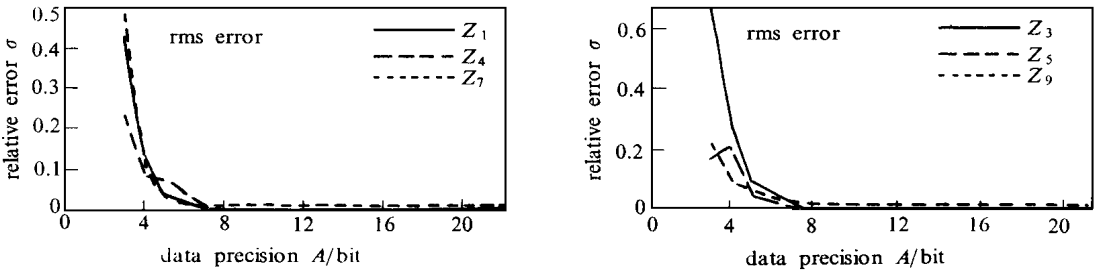


Fig 2 The variation of rms error vs precision of the reconstruction matrix

The left figure shows results about the first, fourth, and seventh terms of Zernike polynomials, the right shows the third, fifth, and ninth

图 2 波前重构相对均方根误差 σ 随重构矩阵存储精度的变化情况

左图是对泽尼克多项式第 1、4、7 项的模拟结果,右图是对第 3、5、9 项的模拟结果

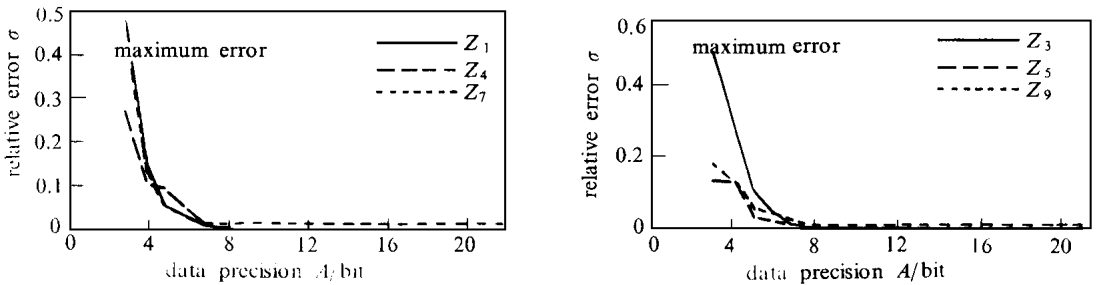


Fig 3 The variation of maximum error vs precision of the reconstruction matrix

The left figure shows results about the first, fourth and seventh terms of Zernike polynomials, the right shows the third, fifth and ninth

图 3 波前重构最大相对误差 δ 随重构矩阵存储精度的变化情况

左图是对泽尼克多项式第 1、4、7 项的模拟结果,右图是对第 3、5、9 项的模拟结果

从图中可以看到,对于泽尼克多项式的前六项,以 8B it 的数据精度来存储波前重构矩阵就能保证相对均方根误差 σ 和最大相对误差 δ 均不超过 1.0%;对于更高阶的泽尼克多项式,比 8B it 更高的数据精度不会使误差减小。因为在波前重构过程中子孔径数是有限的,对于 10×10 阵列的子孔径,即使取无穷大的数据精度,对高阶像差的重构也会有 1% 以上的残差,当重构矩阵的存储精度达到 8B it 时,重构误差的主要来源已经不是数据精度的原因,而是重构模式及其子孔径数多少的原因。

2.2 对一个测量波前的模拟结果

通过哈特曼波前探测器,我们获得了一个 10×10 的子孔径阵列的波前斜率,得到了(1)式中的 s 向量。由于种种误差的存在,不可能知道被测波前的实际形状。由于我们研究的是重构矩阵存储精度对波前重构精度的影响,所以可以首先用高精度的波前重构矩阵来进行波前重构并把所得的波前作为被测波前的实际形状,用它代替(2)、(3)式中的 $\psi_{i,j}$,然后再以不同精度的波前重构矩阵来对测量波前进行重构,并用 φ_j 表示每个子孔径内的相位。这样就可以得到

σ 以及 δ 和波前重构矩阵存储精度的关系, 如图 4 所示。图中可以进一步看到, 比 8B it 更高的数据精度不会使误差减小。图 5 给出了这个测量波前的三维视图。

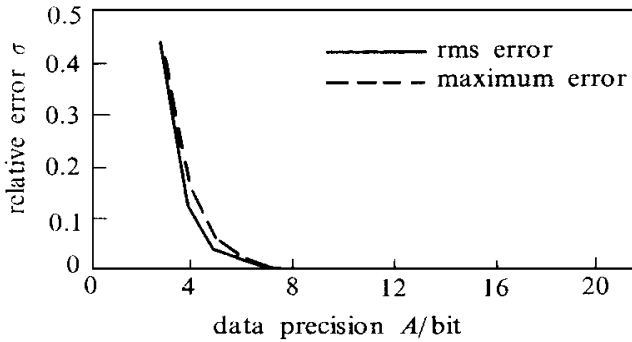


Fig 4 The variation of rms and maximum errors vs precision of the reconstruction matrix about the measured wavefront

图 4 对一个测量波前进行重构时均方根误差以及最大误差随重构矩阵存储精度的变化情况

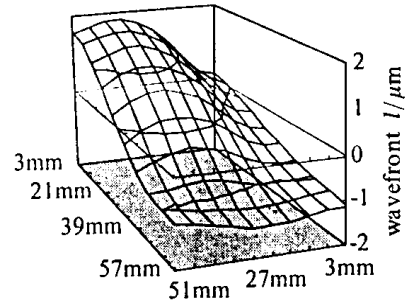


Fig 5 The measured wavefront

图 5 测量所得波前形状的三维视图

3 结 论

对于 10×10 子孔径阵列的波前重构, 可以用 8B it 的数据精度来存储波前重构矩阵。因为在计算机领域“字节”是最基本的数据类型之一, 所以可以降低波前校正系统的复杂性, 进而降低成本, 缩短处理时间。

参考文献

- 1 Hudgin P H. *J Opt Soc Am*, 1977, **68**: 139
- 2 Fried D L. *J Opt Soc Am*, 1977, **67**: 370
- 3 Southwell W H. *J Opt Soc Am*, 1980, **70**: 998
- 4 *The Lincoln Laboratory Journal*, 1992, **5**(1)
- 5 周仁忠, 阎吉祥. 自适应光学理论. 北京: 北京理工大学出版社, 1996

STUDY OF ERROR CAUSED BY WAVEFRONT-RECONSTRUCTION-MATRIX PRECISION

Zhang Jiaru, Zhang Kai, Zhou Keen, and Wan Min

Institute of Applied Electronics, CAEP, P. O. Box 527-56, Chengdu 610003

ABSTRACT The Southwell zonal wavefront reconstruction model was applied to some terms of Zernike polynomials by numeric simulation, and the error caused by data precision of wavefront-reconstruction matrix is studied. The relative errors do not exceed 1.0% before the sixth term of Zernike polynomials when the reconstruction matrix memorized in 8B it precision, and more precise data type can not reduce the error about the next several terms of Zernike polynomials. A measured wavefront is also studied, the result comes to the same.

KEY WORDS wavefront reconstruction, data precision, reconstruction fidelity