

文章编号:0494-0911(2008)03-0008-04

中图分类号:P207

文献标识码:B

基于模糊理论的非线性极大可能性估计

付江缺¹, 高井祥¹, 吴春²

(1. 中国矿业大学 环境与测绘学院, 江苏 徐州 221008; 2. 武汉大学 测绘学院, 湖北 武汉 430079)

Non-linear Maximum Possibility Estimation Based on Fuzzy Sets

FU Jiang-que, GAO Jing-xiang, WU Chun

摘要:详细论述非线性极大可能性估计的原理及非线性规划模型的建立;随后,结合 MATLAB 软件优化工具箱对三角网、测边网进行实例解算,并将计算结果与最小二乘估计的结果进行比较、分析,从而验证极大可能性估计理论的合理性。

关键词:可能性理论;模糊数;非线性极大可能性估计

一、引言

以可能性理论^[1]为研究基础,以模糊数为研究对象的极大可能性估计理论,2003年由王新洲教授在文献[2]中提出来,并在文献[3]中作了进一步的研究。该参数估计理论突破了传统的“观测值的不确定性就是随机性”这一基本假设,直接处理空间信息不确定性的参数,从与传统的参数估计思路完全不同的角度研究测量数据处理理论和方法。

二、模糊数的定义

用 $I = (a, c)_L$ 表示对称的模糊数 I , 其隶属函数可表示为

$$\mu_I(x) = L\left(\frac{x-a}{c}\right), c > 0 \quad (1)$$

称 $L(z)$ 为参照函数, 其中, $z = \frac{x-a}{c}$; a 为对称中心(a 相当于测量平差中的“真值”); c 称为模糊宽度或模糊幅度(c 相当于测量平差中的“真误差”)。几种常见的参照函数如下。

1. 三角模糊数:

$$L(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-a|}{c}, & -c \leq x-a \leq c \\ 0, & |x-a| > c \end{cases} \quad (2)$$

2. 余弦模糊数:

$$L(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi(x-a)}{2c}\right), & |x-a| \leq c \\ 0, & |x-a| > c \end{cases} \quad (3)$$

3. p 次抛物线模糊数:

$$L(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-a|^p}{c^p}, & 0 < p < \infty, |x-a| \leq c \\ 0, & |x-a| > c \end{cases} \quad (4)$$

4. 对数模糊数:

$$L(x) = \begin{cases} \log_2\left(2 - \frac{(x-a)^2}{\delta^2}\right), & -\delta \leq x-a \leq \delta, \\ 0, & x \in \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

三、可能性非线性模型的建立

鉴于实际测量工作中大多数问题都是非线性,这就提出了建立可能性非线性模型的必要性。

引入非线性函数 $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_t)$, 线性化得

$$y_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_t}\right)_0 +$$

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_t^0) - \sum_{j=1}^t \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 x_j^0$$

令

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_t]^T, \mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nt} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0;$$

$$a_{0i} = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_t^0) - \sum_{j=1}^t \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 x_j^0$$

此时当观测向量 \mathbf{Y} 和未知参数向量 \mathbf{X} 均为对称模

糊数时,得可能性非线性模型即为

$$Y = AX + A_0$$

如果将波动范围 c_j, δ_i 看作模糊幅度,对应地将真实值 \hat{x}_j, \hat{y}_i 分别看作未知参数 x_j, y_i 的对称中心,则上式相应有

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_t]^T = [(\hat{x}_1, c_1)_L \quad (\hat{x}_2, c_2)_L \quad \cdots \quad (\hat{x}_t, c_t)_L]^T$$

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T = [(\hat{y}_1, \delta_1)_L \quad (\hat{y}_2, \delta_2)_L \quad \cdots \quad (\hat{y}_n, \delta_n)_L]^T$$

由对称模糊数的运算性质得观测值的对称中心和模糊幅度分别为

$$\hat{y}_i = a_{0i} + \sum_{j=1}^t a_{ij} \hat{x}_j, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^t c_j |a_{ij}|,$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

且有

$$\Delta_i = y_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_t)$$

同时称“模糊数 y_i 是其对称中心 \hat{y}_i ”的可能性为

$$poss(y_i) = \mu_{\hat{y}_i}(y_i) = L\left(\frac{y_i - a_{0i} - \sum_{j=1}^t a_{ij} \hat{x}_j}{\sum_{j=1}^t c_j |a_{ij}|}\right) \quad (6)$$

四、极大可能性估计的非线性规划模型的建立

根据式(6)有最优估计准则:

$$\sum_{i=1}^n poss(y_i) = \mu_{\hat{y}_i}(y_i) = L\left(\frac{y_i - a_{0i} - \sum_{j=1}^t a_{ij} \hat{x}_j}{\sum_{j=1}^t c_j |a_{ij}|}\right) = \max \quad (7)$$

当将观测值和未知参数都视为 p 次抛物线模糊数,即选式(4)为参照函数 $L(z)$ 时,极大可能性估计式(7)变为

$$\sum_{i=1}^n poss(y_i) = n - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - a_{0i} - \sum_{j=1}^t a_{ij} \hat{x}_j)^p}{(\sum_{j=1}^t c_j |a_{ij}|)^p} = \max, \quad p \geq 1$$

式中第二项恒大于零,故等价于

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - a_{0i} - \sum_{j=1}^t a_{ij} \hat{x}_j)^p}{(\sum_{j=1}^t c_j |a_{ij}|)^p} = \min, \quad p > 1 \quad (8)$$

$$\text{记 } \Delta_i = y_i - a_{0i} - \sum_{j=1}^t a_{ij} \hat{x}_j, \quad \tilde{\omega}_i = \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^t c_j |a_{ij}|}\right)^p,$$

$p \geq 1$

则式(8)可表示为

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i |\Delta_i|^p = \min, \quad p \geq 1 \quad (9)$$

为了得到惟一的极大可能性估计准则,对模糊幅度 δ_i 作如下约束:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^p = \min \quad (10)$$

连解式(9)和式(10),并顾及 $\tilde{\omega}_i = \frac{1}{\delta_i^p}$,得

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta_i^p}{\delta_i^p} + \delta_i^p\right) = \min \quad (11)$$

该式即最小模糊幅度约束下的 P 次极大可能性估计准则,同时也是 p 次抛物线模糊数时的非线性规划的目标函数,构造如下的不等式约束条件:

$$\delta_i > 0 \quad (12)$$

$$\delta_i \geq |\Delta_i| \quad (13)$$

由式(11)、式(12)和式(13),得到当观测值和未知参数都为 p 次抛物线模糊数时的非线性规划模型为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta_i^p}{\delta_i^p} + \delta_i^p\right) &= \min \\ s. t. \quad \delta_i &> 0 \\ \delta_i &\geq |\Delta_i| \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中, $s. t.$ 是约束条件(Subject to)的简记符号。

1. 当 $p = 1$ 时,得基于三角模糊数的非线性规划的函数模型为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta_i}{\delta_i} + \delta_i\right) &= \min \\ s. t. \quad \delta_i &> 0 \\ \delta_i &\geq |\Delta_i| \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2. 当 $p = 2$ 时,得基于抛物线模糊数的非线性规划的函数模型为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta_i^2}{\delta_i^2} + \delta_i^2\right) &= \min \\ s. t. \quad \delta_i &> 0 \\ \delta_i &\geq |\Delta_i| \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

3. 当参照函数取式(3)时,得基于余弦模糊数的非线性规划的函数模型为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[(1 - \cos(\frac{\pi |\Delta_i|}{2\delta_i})) + \delta_i \right] &= \min \\ \text{s. t.} \\ \delta_i &> 0 \\ \delta_i &\geq |\Delta_i| \end{aligned} \right\} (17)$$

4. 当参照函数取式(5)时,得基于对数模糊数的非线性规划的函数模型为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\log_2(2 - \frac{\Delta_i^2}{\delta_i^2}) + \delta_i \right] &= \min \\ \text{s. t.} \\ \delta_i &> 0 \\ \delta_i &\geq |\Delta_i| \end{aligned} \right\} (18)$$

五、用 MATLAB 软件优化工具箱进行非线性规划的解算

非线性规划^[4]的标准型为

$$\begin{aligned} \min & F(X) \\ \text{s. t.} & G(X) \leq 0 \\ & VLB \leq X \leq VUB \end{aligned}$$

其中, X 为 n 维变元向量; $G(X)$ 为 m 维非线性函数组成的向量。用 MATLAB 求解上述问题分为两步:

1. 首先建立函数形式的 M 文件 fun.m:

```
Function[f,g]=fun[X]
f=F(X)
g=[G1(X),G2(X),...,Gm(X)]
```

2. 命令的基本格式有以下三个:

- ① $X = \text{constr}('fun', X_0)$
- ② $X = \text{constr}('fun', X_0, options)$
- ③ $X = \text{constr}('fun', X_0, options, VLB, VUB)$

其中, X_0 为迭代的初值; $options$ 是参数说明函数; VLB, VUB 是变量 X 的上、下确界。

六、实例分析

本例取自文献[5]习题 5.5.43。在图 1 的测边网中, A, B 点为已知点, C, D 为待定点。已知点坐标

为 $A(0 \text{ m}, 0 \text{ m}), B(22 \ 141. \ 335 \text{ m}, 0 \text{ m})$, 同精度测得边长观测值见表 1。

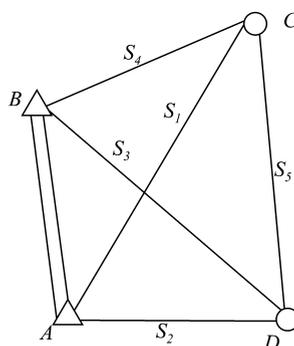


图 1

表 1 边长观测值表

边名	边长/m
1	S_1 27 908. 062
2	S_2 20 044. 592
3	S_3 36 577. 034
4	S_4 20 480. 046
5	S_5 29 402. 438

将 C, D 的坐标, 以及观测值 $S_1 \sim S_5$ 的不确定度 δ_S 设为未知参数, 测边网的可能性非线性模型为

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - S_{ij}$$

对本例构造三角模糊数的极大可能性估计的非线性规划模型为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{| \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - S_{ij} |}{\delta_{S_{ij}}} + \delta_{S_{ij}} \right) &= \min \\ \text{s. t.} \\ \delta_{S_{ij}} &> 0 \\ \delta_{S_{ij}} &\geq | \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - S_{ij} | \end{aligned} \right\}$$

对本算例分别利用三角、抛物线、余弦和对数模糊数的极大可能性估计理论(MP)分别进行计算, 并与最小二乘估计(LSE)的结果进行了比较。计算结果列于表 2 ~ 表 4。

表 2 不同模糊数对应的参数估值

参数	参数估值 \hat{x}/m				参数不确定度/cm				LSE/m
	三角	抛物线	余弦	对数	三角	抛物线	余弦	对数	
X_C	19 187. 339	19 187. 339	19 187. 350	19 187. 333	0.3	0.8	2.6	1.8	19 187. 340
Y_C	20 265. 897	20 265. 901	20 265. 901	20 265. 887	1.5	1.8	1.7	1.1	20 265. 892
X_D	-10 068. 385	-10 068. 371	-10 068. 376	-10 068. 386	1.9	2.0	0.6	2.4	-10 068. 377
Y_D	17 332. 451	17 332. 432	17 332. 446	17 332. 434	1.6	2.7	0.7	1.8	17 332. 442

表3 不同模糊数对应的观测值估值

边长	观测值估值/m				观测值不确定度/cm				LSE/m
	三角	抛物线	余弦	对数	三角	抛物线	余弦	对数	
S_1	27 908.073	27 908.077	27 908.083	27 908.062	1.6	1.7	0.7	0.5	27 908.070
S_2	20 044.606	20 044.582	20 044.597	20 044.592	2.0	1.1	2.5	0.5	20 044.594
S_3	36 577.041	36 577.020	36 577.031	36 577.034	1.0	1.7	0.7	0.7	36 577.030
S_4	20 480.055	20 480.059	20 480.057	20 480.046	1.3	1.6	1.4	0.5	20 480.050
S_5	29 402.424	29 402.412	29 402.426	29 402.420	2.0	3.1	0.6	1.8	29 402.417

表4 极大可能性估计与最小二乘估计结果比较

参数	参数估值较差/cm				边长	观测值估值较差/cm			
	$dx = \hat{x}_{LSE} - \hat{x}_{MP}$					$dy = \hat{y}_{LSE} - \hat{y}_{MP}$			
	三角	抛物线	余弦	对数		三角	抛物线	余弦	对数
X_C	0.1	0.1	-1.0	0.7	S_1	-0.3	-0.6	-1.3	0.8
Y_C	-0.5	-0.9	-0.9	0.5	S_2	-1.1	1.2	-0.3	0.2
X_D	0.8	-0.6	-0.1	0.9	S_3	-1.1	1.0	-0.1	-0.4
Y_D	-0.9	1.0	-0.4	0.8	S_4	-0.5	-0.9	-0.7	0.4
					S_5	-0.7	0.4	-0.9	-0.3

注: $dx = \hat{x}_{LSE} - \hat{x}_{MP}$, $dy = \hat{y}_{LSE} - \hat{y}_{MP}$ 表示参数的最小二乘估计与极大可能性估计结果的差值,越小说明越接近最小二乘估计。

计算结果表明极大可能性估计的计算结果与最小二乘估计的结果基本一致,极大可能性估计的非线性规划模型对于测边网是可行的。

七、结束语

本文对可能性非线性模型的极大可能性估计理论进行了深入的研究,针对不同的模糊数,分别建立了极大可能性估计的非线性规划模型,并将线性可能性模型的极大可能性估计推广到非线性可能性模型的极大可能性估计。通过在测边控制网数据处理中的应用,将结果与最小二乘估计的计算结果进行比较、分析,验证了基于模糊理论的非线性极大可能性估计理论的合理性。

模糊理论、进化算法、混沌与分形更被认为是未来信息处理的三大核心技术^[6],如何将其广泛应用于实际的测量数据处理领域,将是一项十分有意义

而又极具挑战性的工作。

参考文献:

- [1] ZADEH L A . Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility[J]. Fuzzy Sets and System, 1978,1(1):3-28.
- [2] 王新洲. 最小不确定度约束下的极大可能性估计[J]. 测绘工程,2003,(1):28.
- [3] 王新洲,史文中,王树良. 模糊空间信息处理[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003.
- [4] 张光澄. 非线性最优化计算方法[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
- [5] 高士纯. 测量平差基础通用习题集[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1999.
- [6] 王耀南. 智能信息处理技术[M]. 北京:高等教育出版社,2003.
- [7] 王新洲,史文中. 极大可能性估计[J]. 测绘学报,2003,32(3):33.