

# OFDM 系统的非二进制级联码性能分析

吴晓丽<sup>1,2</sup>, 葛建华<sup>1</sup>, 王 勇<sup>1</sup>

(1. 西安电子科技大学 综合业务网理论及关键技术国家重点实验室, 陕西 西安 710071;

2. 空军工程大学 电信工程学院, 陕西 西安 710077)

**摘要:** 提出了一种新的级联码结构, 将基于有限扩域的非二进制 LDPC 码和空时码级联, 这种结构使得非二进制 LDPC 码不需要串并变换直接进行高阶调制, 简化了系统结构, 克服了串并变换所带来的误差. 分析比较了不同域值的 LDPC 级联码系统在不同调制模式下基于高斯白噪声信道和多径衰落信道的误码性能和译码复杂度, 结果显示, 新的级联编码的 OFDM 系统的性能优于二进制级联编码的 OFDM 系统, 在高斯信道, 误码率为  $10^{-6}$  时, GF(4) 和 GF(16) 分别提高 0.2 dB 和 0.3 dB, 在多径信道, 误码率为  $10^{-6}$  时, GF(4) 和 GF(16) 分别提高 1 dB 和 2 dB 增益, 级联的非二进制 LDPC 码的域值越大, 系统的性能越好, 译码复杂度也相应提高, GF(4) 域上的加法计算次数比 GF(2) 域上多了 2 倍, 比 GF(16) 域多了 10 倍.

**关键词:** 非二进制 LDPC 码; 空时编码; 多径瑞利衰落; OFDM

**中图分类号:** TN911.22    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1001-2400(2008)03-0459-05

## Performance of non-binary concatenated coded OFDM systems

WU Xiao-li<sup>1,2</sup>, GE Jian-hua<sup>1</sup>, WANG Yong<sup>1</sup>

(1. State Key Lab. of Integrated Service Networks, Xidian Univ., Xi'an 710071, China;

2. Telecommunication Eng. Inst., PLA Air-force Engineering Univ., Xi'an 710077, China)

**Abstract:** A new concatenated code structure is proposed which concatenates a space-time block codes with non binary low density parity check (LDPC) codes, which is high-level modulated without any parallel-to-serial conversion to lower the error and simplify the system structure. The performance of the new system in Bit error rate (BER) and complexity is evaluated, its comparisons are made with the binary LDPC concatenated codes OFDM system by simulation in AWGN channels and multiple Rayleigh fading channels. Results show that the new system is superior to the old one. Compared with GF(2), a 0.2 dB and 0.3 dB increments are obtained by GF(4) and GF(16) respectively at BER =  $10^{-6}$  in AWGN channels, an 1 dB and 2 dB increments are obtained by GF(4) and GF(16) respectively in multi-path Rayleigh fading channels. The performance improves as the field order is increased, but the computational complexity is increased also. The number of additions is increased 2 times and 10 times by GF(4) and GF(16) respectively.

**Key Words:** LDPC codes based on binary extension fields; space-time codes; multiple Rayleigh fading; OFDM

空时编码 (Space-Time Block Coded-STC) 的正交频分复用 (Orthogonal Frequency Division Multiplexing-OFDM) 技术可以大大提高通信系统的性能, 增加系统容量<sup>[1,2]</sup>. 但频率选择深衰落会使一部分子载波丢失, 因此, 该技术必须与纠错码技术相结合, 许多纠错码技术如 RS 码、Turbo 码<sup>[3]</sup>、尤其是 LDPC 码<sup>[4]</sup>, 其性能接近山农限、较低的译码复杂度、无地板效应、固有交织特性, 所以已经被应用于空时编码的正交频分复用系统<sup>[5,6]</sup>.

收稿日期: 2007-09-05

基金项目: 国家自然科学基金重点项目基金资助 (60332030, 60496316)

作者简介: 吴晓丽 (1964-), 副教授, 西安电子科技大学博士研究生, E-mail: wuli8899@sohu.com.

在同样的码长和码率条件下,非二进制 LDPC 码优于二进制 LDPC 码的性能<sup>[7,8]</sup>,对其的进一步研究已经成为一个热点<sup>[9~11]</sup>,基于有限扩域的非二进制 LDPC 码不需要串并变换,可以直接进行高阶调制,克服串并变换所带来的误差.为此,笔者提出了一种新的级联码结构,将基于有限扩域的非二进制 LDPC 码与 SPC 级联,分析了新的级联编码的 OFDM 系统在高斯白噪声信道和多径衰落信道的性能,比较了不同域值的非二进制 LDPC 级联码系统在不同调制模式下基于两种信道的误码性能和译码复杂度,并与二进制级联编码的 OFDM 系统在同样条件下作了比较,结果显示,新的级联编码的 OFDM 系统优于二进制级联编码的 OFDM 系统,非二进制 LDPC 码的域值越大,系统的性能越好,译码复杂度也相应提高.

## 1 系统模型

用于仿真的系统模型如图 1 所示.在发送端,比特位信息经过串并变换变成符号位信息,经过非二进制 LDPC 编码器进行编码.LDPC 编码器校验矩阵采用 PEG 算法<sup>[12]</sup>,这种随机构造方式构造的编码器固有的交织特性,使得输出码字不需要交织器,可以克服交织延时,同时,输出信息是基于符号位的,不需要串并变换直接进行 QPSK 映射(格雷映射),可以克服串并转换所带来的误差.映射输出的信息进入到空时编码器进行编码,在此,我们选择 Alamouti's 的  $G_2$  空时分组码<sup>[13]</sup>,发送天线数为 2,接受天线为 1.

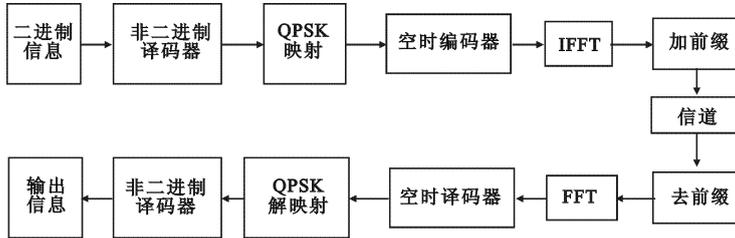


图 1 系统模型

空时编码器输出的码字经过串并变换进行 OFDM 调制,调制输出的信号加上循环前缀后送入信道.在接收端,经过去前缀和 OFDM 解调,接收信号可表示成:

$$r(k) = h_1(k)s_1(k) + h_2(k)s_2(k) + n_1 \quad (1)$$

式中  $h_i(k)$  和  $s_i(k)$  分别表示在  $k$  时刻从发射天线  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 到接收天线的信道的频率响应和信号的频率响应,  $n_1$  是白噪声信号的频率响应.

同样,在  $k + 1$  时刻,接收信号可表示成:

$$\begin{aligned} r(k+1) = & h_1(k+1)s_1(k+1) + h_2(k+1)s_2(k+1) + n_2 = \\ & -h_1(k+1)s_2^*(k) + h_2(k+1)s_1^*(k) + n_2 \end{aligned} \quad (2)$$

假定在  $k$  时刻和  $k + 1$  时刻,信道的频率响应不变,即  $h_i(k) = h_i(k + 1)$ , 则式(2)可变成:

$$r(k+1) = -h_1(k)s_2^*(k) + h_2(k)s_1^*(k) + n_2 \quad (3)$$

对式(1)和(3)作如下的变换:

$$\tilde{s}_1(k) = -h_1^*(k)r(k) + h_2(k)r^*(k+1) \quad ,$$

$$\tilde{s}_2(k) = h_2^*(k)r(k) - h_1(k)r^*(k+1) \quad ,$$

$$\text{可得到} \quad \tilde{s}_1(k) = (|h_1(k)|^2 + |h_2(k)|^2)s_1(k) + h_1^*(k)n_1 + h_2(k)n_2^* \quad (4)$$

$$\tilde{s}_2(k) = (|h_1(k)|^2 + |h_2(k)|^2)s_2(k) - h_1(k)n_2^* + h_2^*(k)n_1 \quad (5)$$

$$\text{对于白噪声信道满足} \quad h_1(k) = h_2(k) = 1 \quad , \quad (6)$$

$$\text{对于多径衰落信道,} \quad h_1(k) = \sum_{l=1}^{L_1} h_{1,l} \exp(-j2\pi kl/K) \quad , \quad (7a)$$

$$h_2(k) = \sum_{l=1}^{L_2} h_{2,l} \exp(-j2\pi kl/K) \quad , \quad k = 0, \dots, K-1 \quad , \quad (7b)$$

应用对数域的最大后验概率译码算法,空时译码器可以提供软的信息概率的对数似然比

$$L(c_k = \alpha) = \log \frac{P(c_k = \alpha)}{P(c_k = 0)} = \log \frac{P(\tilde{s}_1(k)/(s_1(k))_{c_k=\alpha})}{P(\tilde{s}_1(k)/(s_1(k))_{c_k=0})} = \frac{|\tilde{s}_1(k) - (|h_1(k)|^1 + |h_2(k)|^2)s_1(k)_{c_k=\alpha}|^2}{2\delta^2} - \frac{|\tilde{s}_1(k) - (|h_1(k)|^1 + |h_2(k)|^2)s_1(k)_{c_k=0}|^2}{2\delta^2}, \quad (8)$$

$$L(c_{k+1} = \alpha) = \log \frac{P(c_{k+1} = \alpha)}{P(c_{k+1} = 0)} = \log \frac{P(\tilde{s}_2(k)/(s_2(k))_{c_{k+1}=\alpha})}{P(\tilde{s}_2(k)/(s_2(k))_{c_{k+1}=0})} = \frac{|\tilde{s}_2(k) - (|h_1(k)|^1 + |h_2(k)|^2)s_2(k)_{c_k=\alpha}|^2}{2\delta^2} + \frac{|\tilde{s}_2(k) - (|h_1(k)|^1 + |h_2(k)|^2)s_2(k)_{c_k=0}|^2}{2\delta^2}. \quad (9)$$

式中  $c_k$  和  $c_{k+1}$ , 分别表示在  $k$  和  $k+1$  时刻映射成  $s_k$  和  $s_{k+1}$  的码字信息,  $\alpha = \{1, \dots, q-1\}$ . 上述信息作为信道接收信息的似然比值直接送到非二进制 LDPC 码译码器进行译码.

非二进制 LDPC 码可以采用和积译码算法<sup>[7]</sup>和对数域的和积译码算法<sup>[14]</sup>,在此选择对数域的和积译码算法.

令  $q_{mn}^\alpha \equiv \log \frac{q_{mn}(\alpha)}{q_{mn}(0)}$ ,  $r_{mn}^\alpha \equiv \log \frac{r_{mn}(\alpha)}{r_{mn}(0)}$ ,  $c_i^\alpha \equiv \log \frac{p_r(c_i = \alpha/r_i)}{p_r(c_i = 0/r_i)}$ ,  $Q_n^\alpha \equiv \log \frac{p_r(c_i = \alpha)}{p_r(c_i = 0)}$ , 式中  $q_{mn}(\theta)$  和  $r_{mn}(\theta)$  分别表示信息位和校验位信息为  $\theta$  的概率, 则非二进制对数域的和积译码算法步骤如下:

(1) 初始化  $c_n^\alpha = L(c_i = \alpha)$  ,  $r_{mn}^\alpha = 0$  , (10)

(2) 修改  $q_{mn}^\alpha$   $q_{mn}^\alpha = c_n^\alpha + \sum_{m' \in C_{n/m}} r_{m'n}^\alpha$  , (11)

式中  $C_{n/m}$  表示除了校验点  $m$  以外所有的连接到位点  $n$  的校验点的集合.

令  $\alpha_{ij} \equiv \text{sign}(q_{mn}^\alpha)$ ,  $\beta_{ij} \equiv |q_{mn}^\alpha|$ ,  $\phi(x) \equiv -\log \tanh(x/2) = \log(\exp(x)+1)/(\exp(x)-1)$ .

(3) 修改  $r_{mn}^\alpha$   $r_{mn}^\alpha = \left( \prod_{n' \in V_{m \setminus n}} \alpha_{n'm} \right) \cdot \phi \left( \sum_{n' \in V_{m \setminus n}} \phi(\beta_{n'm}) \right)$  , (12)

式中  $V_{m/n}$  表示除了位点  $n$  以外所有的连接到校验点  $m$  的位点的集合.

(4) 计算码字  $c_n^\alpha = L(c_i = \alpha) + \sum_{j \in C_i} r_{jn}^\alpha$  . (13)

(5) 作判决  $\hat{c}_i = \begin{cases} 0 & , \text{ if } Q_i^\alpha < 0 \\ \xi & , \text{ else } Q_i^\alpha > Q_i^\alpha \end{cases}$  ,  $\alpha = (1, \dots, q-1), \alpha \neq \xi$  . (14)

将判决的码字带入公式,若  $\mathbf{H} \times \mathbf{C} = 0$  ( $\mathbf{H}$  表示 LDPC 码的校验矩阵,  $\mathbf{C}$  表示码字), 说明译码算法已经得到有效的码字, 译码完成, 否则, 回到步骤(2), 继续迭代, 直到满足一定的误码率或达到设定的迭代次数.

## 2 系统性能

为了比较非二进制级联编码的 OFDM 系统与二进制级联编码的 OFDM 系统, 选择相同的仿真参数: QPSK 调制; 3 种 LDPC 码长(①4 096, GF(2), ②2 048, GF(4), ③1 024, GF(16)); OFDM 的子载波数定为 2 048; 信道选择高斯白噪声信道和 20 经的瑞利衰落信道. 映射均采用格雷映射, 选择不同域值, 度分配对为 (3, 6), 码率为 1/2 的规则 LDPC 码, 码的校验矩阵均采用能够构造较大环数校验矩阵的 PEG 算法构造. 空时译码解调采用最大后验概率软解调, LDPC 码译码则采用对数域的和积译码算法, 最大迭代次数设为 50 次.

### 2.1 新的级联编码的 OFDM 系统基于高斯白噪声信道的性能比较

不同域值的 LDPC 级联码系统在高斯白噪声信道的误码性能如图 2 所示, 从仿真曲线可以看出, 信噪比

(Signal Noise Rate)SNR $\leq 2$  dB时,非二进制(GF(4),GF(16))级联码 OFDM 系统的性能与二进制(GF(2))级联码 OFDM 系统的性能相当,当SNR $> 2$  dB时,非二进制级联码 OFDM 系统的性能优于二进制级联码 OFDM 系统的性能,随着译码迭代次数的增加,这种优势更加明显,而且,随着域值的增大,性能改善程度也在增大,在误码率(Bit Error rate)BER $= 10^{-6}$ 时,GF(4)的级联码系统与 GF(2)的相比,有0.2 dB增益,GF(16)的有0.3 dB增益.

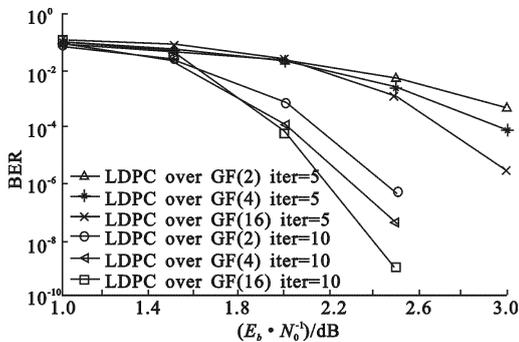


图 2 不同域值的 LDPC 级联码系统在高斯白噪声信道的误码性能

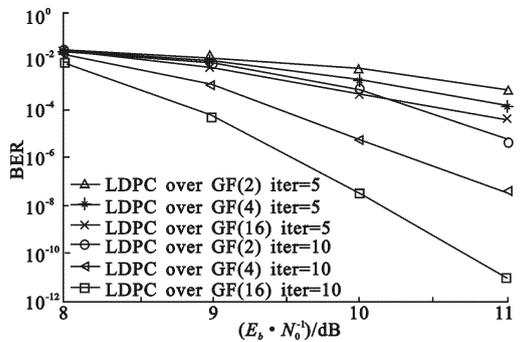


图 3 不同域值的 LDPC 级联码系统在 20 径的瑞利衰落信道的误码性能

## 2.2 20 径瑞利衰落信道不同级联码系统的性能比较

图 3 示出了不同域值的 LDPC 级联码系统在 20 径的瑞利衰落信道的误码性能,从仿真曲线可以看出,信噪比SNR $\leq 8$  dB时,非二进制(GF(4),GF(16))级联码 OFDM 系统没有多少优势,但当SNR $> 8$  dB时,非二进制级联码 OFDM 系统的性能优于二进制(GF(2))级联码 OFDM 系统的性能,随着译码迭代次数的增加,这种优势更加明显,而且,随着域值的增大,性能改善程度也在增大,在BER $= 10^{-5}$ 时,GF(4)的级联码系统与 GF(2)的相比,有1 dB增益,GF(16)的有2 dB增益. GF(2)的级联码系统需要 24 次迭代,误码率降为 0,GF(4)的级联码系统需要 18 次,GF(16)的级联码系统仅需要 11 次.

## 2.3 译码复杂度比较

每一次迭代,LDPC 码的译码复杂度计算如下:校验点所需“+”的次数为 $(2(3u-4)M(q-1)^2)_+$ ,变量点所需“+”的次数为 $(uM(t-1)(q-1))_+$ , $M$ 表示校验矩阵中校验点的数量, $u$ 表示列重, $t$ 表示行重,“+”表示加, $q$ 表示有限域的阶数.

表 1 计算复杂度

域值	校验点的“+”计算次数	变量点的“+”计算次数
GF(2)	$40 \times 512$	$60 \times 512$
GF(4)	$180 \times 512$	$90 \times 512$
GF(16)	$2250 \times 512$	$225 \times 512$

3 种译码器在每一次迭代时的计算复杂度如表 1 所示.从表可以看出,每一次迭代,二进制级联码系统的译码复杂度低于非二进制级联码系统,GF(4)域上的加计算次数比 GF(2)域上多了 3 倍,GF(16)域上的加计算次数多了 20 倍,但非二进制级联码的译码收敛速度快,以 3 种级联码误码率降到 0 所需要的总的计算次数来看,GF(2)域需要 $24 \times 100 \times 512$  次“+”运算,GF(4)域需要 $18 \times 270 \times 512$  次,GF(16)域需要 $11 \times 2475 \times 512$  次,GF(4)域上的加计算次数比 GF(2)域上多了 2 倍,GF(16)域上的加计算次数多了 10 倍.显然,所选用的非二进制码的域值不能太大,同时,需要寻找一种低复杂度的非二进制码译码算法来进一步改善性能.

## 3 结 论

提出了一种非二进制 LDPC 码的级联码方案,级联基于有限扩域的非二进制 LDPC 码和 SPC,分析了这种级联编码的 OFDM 系统在高斯白噪声信道和多径衰落信道的性能.结果显示,在两种信道,非二进制级

联码系统的性能优于二进制级联码系统,而且,随着域值的增大,这种优势更加明显,同时,计算复杂度也在增加,因此,非二进制 LDPC 码的域值不能增加的太大,或者,利用快速傅里叶变换译码算法<sup>[15]</sup>,译码复杂度可以降低为  $Muq \log_2(q)$ .

#### 参考文献:

- [1] Agrawal D, Tarokh V. Space-time Coded OFDM for High Data-rate Wireless Communication Over Wideband Channels [DB/OL]. [2007-05-12]. <http://www.research.ibm.com/people/a/agrawal/publications/ATNS1998.pdf>.
- [2] Hanzo L, Liew T H, Yeap B L. Turbo Coding, Turbo Equalisation and Space Time Coding for Transmission Over Wireless Channels[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [3] Chen Hangjun, Deng Xinmin, Haimovich A. Layered Turbo Space-Time Coded MIMO-OFDM Systems for Time Varying Channels[J]. IEEE Global Telecommunications Conference, 2003, 4(3): 1831-1836.
- [4] Lee H N. LDPC Coded Modulation MIMO OFDM Transceiver: Performance Comparison with MAP Equalization[DB/OL]. [2007-05-20]. <http://ieeexplore.ieee.org/iel5/8574/27185/01207813.pdf>.
- [5] Lu Ben, Yue Guosen, Wang Xiaodong. Performance Analysis and Design Optimization of LDPC-coded MIMO OFDM Systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 52(2): 348-361.
- [6] MacKay D J C, Neal R M. Near Shannon Limit Performance of Low Density Parity Check Codes[J]. Electronic Letters, 1996, 32(8): 1645-1646.
- [7] Matthew C, David C. Low-density Parity Check Codes Over GF(q)[J]. IEEE Communication Letters, 1998, 2(6): 165-167.
- [8] Tanner R M. A Recursive Approach to Low Complexity Codes[J]. IEEE Trans on Information theory, 1981, 27(5): 533-547.
- [9] Alamri O, Yeap B L, Hanzo L. Turbo Detection of Channel Coded Space-time Signals Using Sphere Packing Modulation [DB/OL]. [2007-04-26]. <http://ieeexplore.ieee.org/iel5/9623/30413/01400503.pdf>.
- [10] Alamri O, Ng S X, Gao F, et al. A Purely Symbol-based Precoded and LDPC-coded Iterative-detection Assisted Sphere-packing Modulated Space-time Coding Scheme[DB/OL]. [2007-05-16]. [http://eprints.ecs.soton.ac.uk/12385/01/A\\_purely\\_symbol-based.pdf](http://eprints.ecs.soton.ac.uk/12385/01/A_purely_symbol-based.pdf).
- [11] Bennatan A M, Burshtein D. Design and Analysis of Non-binary LDPC Codes for Arbitrary Discrete-Memoryless Channels[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 549-552.
- [12] Hu Xiaoyu, Eleftheriou E, Arnold A M. Regular and Irregular Progressive Edge-Growth Tanner Graphs[DB/OL]. [2007-05-16]. <http://ieeexplore.ieee.org/iel5/18/30067/01377521.pdf>.
- [13] Alamouti S M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications[J]. IEEE Journal Selector Areas in Communications, 1998, 16(8): 1451-1458.
- [14] Wymeersch H, Steendam H, Moeneclaey M. Log-domain Decoding of LDPC Codes Over GF(q) [J]. IEEE Communication Letters, 1998, 2(6): 165-167.
- [15] Barnault L, Declercq D. Fast Decoding Algorithm for LDPC Over GF(2q)[DB/OL]. [2007-05-26]. <http://ieeexplore.ieee.org/iel5/9179/29119/01312606.pdf>.

(编辑:高西全)