

电荷离散化时电感耦合介观电路中的量子效应

崔元顺

(淮阴师范学院物理系, 江苏 淮安 223001)

摘要: 针对电感耦合介观电路模型, 计及电荷的离散性, 提出一种在电荷算符本征态构成的新 Fock 空间中计算系统量子效应的方法. 该方法通过引入最小平移算符, 将体系量子 Hamilton 量、物理电流等表示为电荷算符和阶梯算符的函数, 直接利用阶梯算符的性质计算介观电路中电荷、电流以及能量的量子涨落; 所得结果与电感参量等密切相关. 指出在设计量子线路、纳米电子器件时为降低量子噪声而需要考虑的因素.

关键词: 介观电路; 电感耦合; 电荷离散; 量子涨落

中图分类号: O431.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2007)06-0964-05

The quantum effect in the inductance-coupling mesoscopic circuit with the charge discreteness

CUI Yuan-shun

(Department of Physics, Huaiyin Teachers College, Huaian 223001, China)

Abstract: In the inductance-coupling mesoscopic circuit, by taking account of the charge discreteness, a method for calculating quantum effects is proposed in the new Fock space that is formed by the eigenstate of charge operator. In this method, by introducing the minimum shift operator, the system Hamilton and the physics current are expressed according to the charge operator and the ladder operator, and the quantum fluctuations of the charge, current and energy are calculated directly by the character of the ladder operator. The obtained results are related with self-inductance closely. In designing the quantum circuit and the nanoelectronic devices, the considerable factors are given for the quantum noise reduction.

Key Words: mesoscopic circuit; inductance-coupling; charge discreteness; quantum fluctuation

随着纳米技术和纳米电子学的飞速发展, 在电子器件、通信工程中, 电路及器件的小型化、高集成度的趋势越来越显著, 近年来已经达到原子尺度的量级. 当电路的尺寸小到可以与电子相干长度比拟时, 电路本身将出现量子相干效应, 往常研究经典电路时所用的基本原理与方法已不再适用, 近年来大量有关纳米尺寸电路及单电子器件的实验结果已充分地表明这一点^[1~4]. 此外, 超微细加工技术已能制备出大小仅有几个纳米的金属微粒或含有几十个电子的半导体微粒, 在这些涉及微观电磁现象及在光频下工作的电路问题中, 作为微电子技术发展的原理性基础, 必须考虑电路及器件的量子力学效应^[5~7]. 早在 1973 年, Louisell 首先讨论了 LC 电路的量子效应, 并给出了在真空态下时的量子噪声^[8], 最近有关纳米电子器件作为量子计算机中量子位或量子逻辑门和量子线路的讨论又使这类问题的研究成为热点之一^[9~12]. 研究表明, 介观电路的量子起伏不仅来源于电子的波动性, 而且还与电荷的量子化性质密切相关, 库仑阻塞效应就是其中的典型例子之一. 文献[13]提出了一个建立在电荷分立取值基础之上的介观电路量子理论, 并对介观 LC 电路进行了深入研究, 计算了介观系统中电流的量子涨落等; 最近人们发展了介观电路的相关量子理论^[14~17], 笔者也曾考察过介观金属多环系统中的量子电流放大效应等^[18~20]. 但到目前为止, 考虑电荷的离散性, 在由电荷算符本征态构成的新 Fock 空间结构中研究介观电路中的量子效应却少见报道. 笔者基于电荷离散化的量子理论, 研

收稿日期: 2007-01-15

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金资助(05KJD140035)

作者简介: 崔元顺(1957-), 男, 淮阴师范学院教授.

究电感耦合介观电路处于电荷算符对应的 Fock 态下电荷、电流以及能量的量子涨落, 分析影响耦合介观电路量子性质的因素.

1 电路模型和系统的 Hamilton 量

如图 1 电感耦合介观电路, 用 $L_j, c_j, q_j (j = 1, 2)$ 以及 ϵ 分别表示回路电感、电容、电荷以及电动势, \dot{q}_j 代表电流, 则系统经典 Hamilton 量为

$$H = T + V = \frac{1}{2} L_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2 + \left(\frac{1}{2c_1} q_1^2 + \frac{1}{2c_2} q_2^2 \right) - q_1 \epsilon \quad (1)$$

将 q_j 视为广义“坐标”, 则与之共轭的正则“动量” p_j 为^[20]

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & -L_1 \\ -L_1 & L_1 + L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

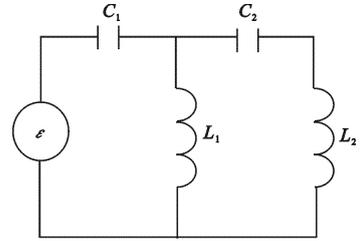


图 1 电路模型

为使耦合介观电路量子化, 将正则变量用量子力学算符表示, 并要求一对线性厄米算符 (\hat{q}_j, \hat{p}_j) 满足对易关系 $[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$. 用正则共轭变量 (\hat{q}_j, \hat{p}_j) 表达出系统的量子 Hamilton 量, 则式(1)可改写成

$$\hat{H} = \frac{1}{2L'_1} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2L_2} \hat{p}_2^2 + \frac{1}{L_2} \hat{p}_1 \hat{p}_2 + \left(\frac{1}{2c_1} \hat{q}_1^2 + \frac{1}{2c_2} \hat{q}_2^2 \right) - \hat{q}_1 \epsilon \quad (3)$$

式中有效电感 L'_1 为
$$L'_1 = L_1 L_2 / (L_1 + L_2) \quad (4)$$

进一步考虑电荷的离散性, 要求自伴算符 \hat{q}_j 的本征值应是分立的, 即应满足

$$\hat{q}_j |n_j\rangle = n_j q_e |n_j\rangle \quad (5)$$

式中 q_e 为基本电子电量, n_j 为整数; 电荷算符 \hat{q}_j 的本征态由整数集标记, 电荷变量的导数需由步长为 q_e 的有限差分取代. 用正则动量构造么正算符^[13,17]

$$\hat{Q}_j^+ = \exp(-iq_e \hat{p}_j / \hbar) \quad , \quad \hat{Q}_j(q_e) = \exp(iq_e \hat{p}_j / \hbar) \quad (6)$$

不难导出对易关系
$$[\hat{q}_j, \hat{Q}_j^+] = q_e \hat{Q}_j^+, [\hat{q}_j, \hat{Q}_j] = -q_e \hat{Q}_j, \hat{Q}_j \hat{Q}_j^+ = \hat{Q}_j^+ \hat{Q}_j = 1 \quad (7)$$

利用式(5)可以得到^[13]
$$\hat{Q}_j |n_j\rangle = |n_j - 1\rangle, \quad \hat{Q}_j^+ |n_j\rangle = |n_j + 1\rangle \quad (8)$$

可见, \hat{Q}_j, \hat{Q}_j^+ 对应于湮灭与产生的阶梯算符, 这些关系决定了新的 Fock 空间结构. 借助于算符 \hat{Q}_j, \hat{Q}_j^+ 定义右和左有限微分算符

$$\nabla_j = (\hat{Q}_j - 1) / q_e, \quad \bar{\nabla}_j = (1 - \hat{Q}_j^+) / q_e = -\bar{\nabla}_j^+ \quad (9)$$

则自由 Hamilton 算符 $\hat{H}_0^{(j)}$ 为

$$\hat{H}_0^{(j)} = -\frac{\hbar^2}{2L_j} \nabla_j \bar{\nabla}_j = -\frac{\hbar^2}{2q_e L_j} (\nabla_j - \bar{\nabla}_j) = -\frac{\hbar^2}{2q_e^2 L_j} (\hat{Q}_j + \hat{Q}_j^+ - 2) \quad (10)$$

其中 L'_1 如式(4)所述, 而 $L'_2 = L_2$. 用 \hat{Q}_j, \hat{Q}_j^+ 以及 \hat{q}_j 表达出量子化后的体系总 Hamilton 算符为

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^2 \left[\alpha_j (\hat{Q}_j + \hat{Q}_j^+ - 2) + \frac{1}{2c_j} \hat{q}_j^2 \right] + \beta (\hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^+) (\hat{Q}_2 - \hat{Q}_2^+) - \hat{q}_1 \epsilon \quad (11)$$

其中系数
$$\alpha_j = -\hbar^2 / (2q_e^2 L_j), \quad \beta = -\hbar^2 / (4q_e^2 L_2) \quad (12)$$

在式(11)中, 中括号内的两项代表两个无相互作用 LC 介观电路的 Hamilton 量, 而第 2 部分、第 3 部分分别对应于两回路之间的耦合作用以及电源的驱动作用.

2 电感耦合介观电路的量子涨落

为了考察电荷具有不连续性时电感耦合介观电路系统的量子性质, 以下运用式(5)~(8)以及式(11)计

算电感耦合介观电路处于电荷算符对应的 Fock 态 $|n_1, n_2\rangle$ 下时电荷、电流以及能量的量子涨落. 由于两回路之间是通过电流耦合实现相互作用的, 因而算符 \hat{q}_1, \hat{q}_2 分别只对自身回路起作用, 有 $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$.

2.1 电荷的量子涨落

由式(5)可得 Fock 态下电荷算符的平均值为

$$\langle \hat{q}_j \rangle = n_j q_e, \quad (13)$$

方均值为

$$\langle \hat{q}_j^2 \rangle = (n_j q_e)^2. \quad (14)$$

因而耦合介观电路中电荷的均方起伏为

$$(\Delta \hat{q}_j)^2 = \langle \hat{q}_j^2 \rangle - \langle \hat{q}_j \rangle^2 = 0. \quad (15)$$

在电荷算符对应的 Fock 态下, 这一零结果是必然的. 但是, 式(13), (14)均显示, 电荷的平均值、均方值不为零, 其量值完全决定于电荷的量子化性质, 与耦合介观电路的电参量及电源 ϵ 无关.

2.2 电流的量子涨落

运用 Heisenberg 运动方程 $d\hat{A}/dt = [\hat{A}, \hat{H}]/(i\hbar)$, 结合式(7)和(11), 并且注意到 $[\hat{q}_j, \hat{Q}_k] = -q_e \hat{Q}_k \delta_{jk}$, $[\hat{q}_j, \hat{Q}_k^+] = q_e \hat{Q}_k^+ \delta_{jk}$, 可导出两回路中量子电流算符为

$$\hat{I}_1 = \frac{q_e}{i\hbar} [\alpha_1 (\hat{Q}_1^+ - \hat{Q}_1) + \beta (\hat{Q}_1^+ + \hat{Q}_1) (\hat{Q}_2^+ - \hat{Q}_2)] \quad (16)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{q_e}{i\hbar} [\alpha_2 (\hat{Q}_2^+ - \hat{Q}_2) + \beta (\hat{Q}_1^+ - \hat{Q}_1) (\hat{Q}_2^+ + \hat{Q}_2)] \quad (17)$$

同时导出量子电流平方算符为

$$\hat{I}_1^2 = -\frac{q_e^2}{\hbar^2} [\alpha_1^2 (\hat{Q}_1^{+2} + \hat{Q}_1^2 - 2) + \beta^2 (\hat{Q}_1^{+2} + \hat{Q}_1^2 + 2) (\hat{Q}_2^{+2} + \hat{Q}_2^2 - 2) + 2\alpha_1 \beta (\hat{Q}_1^{+2} - \hat{Q}_1^2) (\hat{Q}_2^+ - \hat{Q}_2)] \quad (18)$$

$$\hat{I}_2^2 = -\frac{q_e^2}{\hbar^2} [\alpha_2^2 (\hat{Q}_2^{+2} + \hat{Q}_2^2 - 2) + \beta^2 (\hat{Q}_1^{+2} + \hat{Q}_1^2 - 2) (\hat{Q}_2^{+2} + \hat{Q}_2^2 + 2) + 2\alpha_2 \beta (\hat{Q}_1^+ - \hat{Q}_1) (\hat{Q}_2^{+2} - \hat{Q}_2^2)] \quad (19)$$

利用式(8), 由式(16)~(19)可计算出 Fock 态下电流算符的平均值为

$$\langle \hat{I}_j \rangle = 0 \quad (20)$$

方均值为

$$\langle \hat{I}_1^2 \rangle = \frac{2q_e^2}{\hbar^2} (\alpha_1^2 + 2\beta^2), \quad \langle \hat{I}_2^2 \rangle = \frac{2q_e^2}{\hbar^2} (\alpha_2^2 + 2\beta^2) \quad (21)$$

结合式(4)和式(12), 给出电流的均方起伏为

$$(\Delta \hat{I}_1)^2 = \frac{\eta^2}{2q_e^2} \left[\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^2 + \frac{1}{2L_2^2} \right], \quad (\Delta \hat{I}_2)^2 = \frac{3\eta^2}{4q_e^2 L_2^2} \quad (22)$$

结果表明, 两回路中电流的均方起伏完全由电感、电荷量子及 Planck 常数确定, 与电容 C_j 、电源 ϵ 无关. 此外, 第 1 回路中的量子电流并非孤立, 除与自身回路的电感有关外, 还与它回路的电感有关, 但是第 2 回路中的量子电流则完全由自身回路的电参量决定.

2.3 能量的量子涨落

由式(8)和(11)同样可计算出 Fock 态下能量的平均值为

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \langle \sum_{j=1}^2 \left[\alpha_j (\hat{Q}_j + \hat{Q}_j^+ - 2) + \frac{1}{2C_j} \hat{q}_j^2 \right] + \beta (\hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^+) (\hat{Q}_2 - \hat{Q}_2^+) - \hat{q}_1 \epsilon \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(-2\alpha_j + \frac{1}{2C_j} n_j^2 q_e^2 \right) - n_1 q_e \epsilon = \\ &= \frac{2\eta^2}{q_e^2} \left(\frac{1}{2L_1} + \frac{1}{L_2} \right) + q_e^2 \left(\frac{1}{2C_1} n_1^2 + \frac{1}{2C_2} n_2^2 \right) - n_1 q_e \epsilon \quad (23) \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle^2 &= 4(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \frac{1}{4C_1^2} n_1^4 q_e^4 + \frac{1}{4C_2^2} n_2^4 q_e^4 + (n_1 q_e \epsilon)^2 - \\ &= 2(\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{1}{C_1} n_1^2 q_e^2 + \frac{1}{C_2} n_2^2 q_e^2 \right) + 4(\alpha_1 + \alpha_2) n_1 q_e \epsilon + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2c_1c_2} n_1^2 n_2^2 q_e^4 - \frac{1}{c_1} n_1^3 q_e^3 \epsilon - \frac{1}{c_2} n_1 n_2^2 q_e^3 \epsilon \quad (24)$$

而方均值为

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}^2 \rangle = & \left\langle \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[\alpha_j (\hat{Q}_j + \hat{Q}_j^+ - 2) + \frac{1}{2c_j} \hat{q}_j^2 \right] + \beta (\hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^+) (\hat{Q}_2 - \hat{Q}_2^+) - \hat{q}_1 \epsilon \right\}^2 \right\rangle = \\ & 6(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \frac{1}{4} q_e^4 \left(\frac{n_1^4}{c_1^2} + \frac{n_2^4}{c_2^2} \right) + 4\beta^2 + 8\alpha_1\alpha_2 - 2q_e^2(\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{n_1^2}{c_1} + \frac{n_2^2}{c_2} \right) + \\ & \frac{1}{2c_1c_2} n_1^2 n_2^2 q_e^4 + n_1^2 q_e^2 \epsilon^2 + 4n_1 q_e \epsilon (\alpha_1 + \alpha_2) - n_1 q_e^3 \epsilon \left(\frac{n_1^2}{c_1} + \frac{n_2^2}{c_2} \right) \quad (25) \end{aligned}$$

得到能量的均方起伏为

$$(\Delta \hat{H})^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 4\beta^2 = \frac{\eta^4}{2q_e^4} \left[\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^2 + \frac{3}{2L_2^2} \right] \quad (26)$$

将式(26)与式(22)比较,可以得到关系

$$(\Delta \hat{H})^2 = \frac{\eta^2}{q_e^2} [(\Delta \hat{I}_1)^2 + (\Delta \hat{I}_2)^2] - \frac{\eta^4}{4q_e^4 L_2^2} \quad (27)$$

分析式(26)的结果可见,与电流的量子涨落情况类似,计及电荷的离散性时,耦合介观电路系统中电流、能量的量子涨落除与电荷量子化、Planck 常数有关外,还与介观系统的电参量密切相关.但是式(22)和式(27)均显示,在 Fock 态下电源 ϵ 对介观系统的量子涨落并不产生影响.

3 结束语

在电荷离散化的框架下,通过量子化电感耦合介观电路,运用最小平移算符的性质、Heisenberg 运动方程等,计算了电感耦合介观电路处于电荷算符对应的 Fock 态下时其电荷、电流以及能量的量子涨落,所得结果包含有电荷量子、Planck 常数等.式(13)~(15)表明,电荷的平均值、均方值不为零,但其均方起伏为零;式(20)~(22)显示,电流的平均值尽管为零,但其均方值、均方起伏不为零;式(23)~(26)反映出能量的平均值、均方值以及均方起伏值都不为零,其大小还与耦合电路的电感参量密切相关.这些结果揭示出介观电路中存在量子力学效应,对于设计和研制纳米电子器件作为未来量子计算机中的量子位、量子逻辑门和量子线路等具有一定的指导意义.

参考文献:

- [1] Creux M, Crépieux A, Martin T. Finite-frequency Noise Cross Correlations of a Mesoscopic Circuit: a Measurement Method Using a Resonant Circuit[J]. Phys Rev, 2006, B74(11): 1-10.
- [2] Cedraschi P, Ponomarenko V V, Büttiker M. Zero-point Fluctuations and the Quenching of the Persistent Current in Normal Metal Rings [J]. Phys Rev Lett, 2000, 84(2): 346-349.
- [3] Zon R V, Ciliberto S, Cohen E G D. Power and Heat Fluctuation Theorems for Electric Circuits[J]. Phys Rev Lett, 2004, 92(13): 1-4.
- [4] Benjamin C, Jayannavar A M. Current Magnification Effect in Mesoscopic Systems at Equilibrium[J]. Phys Rev, 2001, B64(23): 1-4.
- [5] 杜磊, 庄奕琪. 纳米电子学[M]. 北京:电子工业出版社, 2004.
- [6] 焦正宽, 曹光早. 磁电子学 [M]. 杭州:浙江大学出版社, 2005.
- [7] Buot F A. Mesoscopic Physics and Nanoelectronics [J]. Phys Rep, 1993, 234 (1):73-174.
- [8] Louisell W H. Quantum Statistical Properties of Radiation [M]. New York:Jonh Wiley, 1973.
- [9] Zhang S, Zhao Y F, Jing X G, et al. Quantum Fluctuations of a Mesoscopic Capacitance Coupled Circuit with Power Source[J]. Chin Phys Lett, 2003, 20(4): 561-563.
- [10] Utreras-Diaz C A, Flores J C, Perez-Ponce A. Simple Approach to the Mesoscopic Open Electron Resonator: Quantum Current Oscillations[J]. Solid State Commu, 2005, 133(2): 93-96.

- [11] 梁麦林, 袁兵. 耦合部分有电阻时介观电容耦合电路中的量子涨落[J]. 西安电子科技大学学报, 2003, 30(2): 284-288.
- [12] 崔元顺. 介观 LC 电路中电压、电流的量子涨落[J]. 光子学报, 1998, 27(6): 517-520.
- [13] Li Y Q, Chen B. Quantum Theory of Mesoscopic Electrical Circuits [J]. Phys Rev, 1996, B53(16): 4027-4032.
- [14] Chen B, Shen X J, Li Y Q. Dynamic Stark Ladders in Mesoscopic Metallic Rings [J]. Phys Lett, 2003, A313(14): 431-435.
- [15] Flores J C. Mesoscopic Circuits with Charge Discreteness; Quantum Transmission Lines [J]. Phys Rev, 2001, B64(23): 1-3.
- [16] Flores J C, Utreras-Diaz C A. Mesoscopic Circuits with Charge Discreteness; Quantum Current Magnification for Mutual Inductances [J]. Phys Rev, 2002, B66(15): 1-4.
- [17] Lu T, Li Y Q. Mesoscopic Circuit with Linear Dissipation [J]. Modern Physics Letters, 2002, B16(26): 1-5.
- [18] 崔元顺. 介观多环耦合系统中的量子电流增强效应[J]. 物理学报, 2005, 54(4): 1799-1803.
- [19] 崔元顺. 无耗散耦合介观电路的能谱及量子电流[J]. 光电子·激光, 2005, 16(6): 678-681.
- [20] 崔元顺, 周淮玲. 电感耦合介观电路的量子回路方程及其能谱[J]. 量子电子学报, 2006, 23(1): 77-82.

(编辑: 齐淑娟)

(上接第 946 页)

- [2] Harrison J. Analysis of Thermal Imagery Collected at Yuma 1, Yuma Proving Ground[R]. Mississippi: Smart Weapons Operability Enhancement Report 944, 1994.
- [3] Ballard J R. Yuma 1 Information Base for Generation of Synthetic Thermal Scenes[R]. Mississippi: Smart Weapons Operability Enhancement Report 945, 1994.
- [4] Weiss R A, Bruce M S. Physics-based Infrared Terrain Radiance Texture Model[R]. Mississippi: U S Army Engineer Waterways Experiment Station Report EL-95-5, 1995.
- [5] Balfour L S, Bushlin Y. Semi-empirical Model Based Approach for IR Scene Simulation[C]//SPIE Proceeding. Orlando: SPIE, 1997, 3061: 616-623.
- [6] Ben-Yosef N. Natural Terrain Infrared Radiance Statistics: Daily Variation[J]. Appl Opt, 1985, 24(23): 4167-4171.
- [7] Ben-Yosef N. Natural Terrain in the Infrared; Measurement and Modeling[C]//SPIE Processing. San Diego: SPIE, 1987, 819: 66-72.
- [8] Ben-Yosef N. Temporal Behavior of Thermal Images[J]. Appl Opt, 1985, 24(2): 284-286.
- [9] 张建奇. 目标与背景红外辐射特性研究[D]. 西安: 西安交通大学, 1998.
- [10] 张建奇, 方小平. 自然地表红外辐射特性统计分析[J]. 红外与毫米波学报, 1997, 16(4): 266-272.
- [11] 张建奇, 方小平. 自然地表红外辐射特性的理论模拟[J]. 西安电子科技大学学报, 1998, 25(1): 43-46.
- [12] 张建奇, 方小平. 湿润地表红外辐射统计特性和热图像空间结构[J]. 西安电子科技大学学报, 1999, 26(1): 53-57.
- [13] Zhang J Q, Fang X P. A New Model for IR Radiance Statistics of Natural Terrain[J]. Infrared Physics & Technology, 1997, 38(5): 281-285.
- [14] Zhang J Q, Fang X P. Thermal Background Model Studies[J]. Infrared Physics & Technology, 1995, 36(2): 577-583.
- [15] Sachs L. Applied Statistics, a Handbook of Techniques[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [16] Shao X P, Zhao X M. Infrared Texture Simulation Using Gaussian-Markov Random Fields[J]. International Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2004, 25(11): 1699-1710.

(编辑: 齐淑娟)