

# 基于 Neumann 展开 Monte-Carlo 有限元法的随机温度场分析

李金平, 陈建军, 刘海锋, 徐 健, 黄宵忭

(西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 利用 Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法, 对导热系数、换热系数、热流密度、环境温度以及内热源等物理参数同时具有随机性的温度场问题进行了分析, 给出了节点温度响应的均值、变异系数和节点温度落在某一区间内的概率计算公式。通过算例考察了各随机变量的变异性大小对节点温度响应的影响, 并表明随着结构的自由度数目增大, 文中方法呈现出计算效率高的优点。

**关键词:** Neumann 展开; Monte-Carlo 法; 随机有限元; 随机温度场

**中图分类号:** O551.3    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1001-2400(2007)03-0453-05

## Analysis of stochastic temperature field by the Neumann expansions

LI Jin-ping, CHEN Jian-jun, LIU Hai-feng, XU Jian, HUANG Xiao-bian

(School of Mechano-electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** An analysis of the plate temperature field with the random heat transfer coefficient, heat exchange coefficient, heat flux density, environment temperature and heat source is made by the Neumann expansions Monte-Carlo stochastic finite element method. The computing formulas for the mean value and variance and possibility in some interval of node temperature are given. The effect of the amount of variances of random variables on node temperature response is considered by the example. The example in this paper shows that as the number of freedoms of the structure becomes greater, the method proposed has the advantage of high efficiency.

**Key Words:** Neumann expansions; Monte-Carlo method; stochastic finite element method; random temperature field

传统的温度场求解不考虑随机性因素的影响, 将模型中的所有参数均视为确定性量来处理。但在实际的传热过程中存在着有许多随机性因素, 如换热的介质温度在某些不确定性因素(气压、湿度等)作用下往往表现出随机性, 且具有很大的变异性。正是由于这些参数随机性的客观存在, 导致对温度场响应的影响不能予以忽视。若在模型化过程中将结构中的诸参数视作随机变量, 则原来的确定性结构就变成了含有随机参数的随机结构<sup>[1]</sup>。目前, 对随机结构分析的主要方法有: 随机有限元法(SFEM)<sup>[2]</sup>、Monte-Carlo 法、随机摄动法、随机正交展开法等。近年来, 对随机结构的静、动力学分析和可靠性优化等方面已取得了不少研究成果<sup>[3,4]</sup>, 但大多数工作集中于结构力学问题, 而对传热学中的随机热负荷和随机参数模型的研究工作较少<sup>[5]</sup>。文[6]对计算机冷却过程的温度场利用随机有限元进行了分析。文[7]用 Taylor 级数展开的思想, 考虑了青藏铁路在环境温度和冻土的热学参数具有随机性时的温度场。文[8]综合考虑了环境因素和混凝土热力学参数的随机性, 给出了可以反映材料参数随机性的基于随机场局部平均的温度场随机变分原理和随机有限元列式。

笔者针对结构传热过程中的导热系数、换热系数、热流密度、换热环境温度以及内热源等物理参数同时具有随机性的情况, 利用 Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法对随机温度场进行分析计算。

收稿日期: 2006-08-28

基金项目: 国家部委预研基金资助(51421060505DZ0155); 陕西省自然科学基金资助(2005A009)

作者简介: 李金平(1981-), 男, 西安电子科技大学博士研究生。

## 1 确定性热传导有限元方程

三维稳态传热问题的微分控制方程为<sup>[9]</sup>

$$k(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2) + q_0 = 0 \quad (1)$$

式中  $T$  为待求的温度场分布函数;  $k$  为结构的导热系数;  $q_0$  为内部的热源强度.

为确定方程(1)在最一般情况下的定解, 这里同时给出了三类边界条件: (1) 指定边界温度  $T_B$ ; (2) 已知边界热流密度  $q$ ; (3) 已知与物体相接触的流体介质温度  $T_f$  和换热系数  $h$  之间的关系. 通过将求解区域离散化, 并利用 Galerkin 法推得各单元的有限元方程为<sup>[8]</sup>

$$\mathbf{K}^e \mathbf{T}^e = \mathbf{R}^e \quad (2)$$

式中  $\mathbf{K}^e$  为单元热传导矩阵;  $\mathbf{T}^e$  为单元节点温度向量;  $\mathbf{R}^e$  为单元的等效右端项. 各表达式如下:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_k^e + \mathbf{K}_h^e \quad (3)$$

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{R}_{q_0}^e + \mathbf{R}_h^e - \mathbf{R}_q^e - \mathbf{R}_B^e \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_k^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}^k \mathbf{B} \, d\Omega \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_h^e = \int_{S_h^e} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dS \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_{q_0}^e = \int_{\Omega^e} q_0 \mathbf{N}^T \, d\Omega \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_h^e = \int_{S_h^e} h \mathbf{N}^T T_f \, dS \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_q^e = \int_{S_h^e} q \mathbf{N}^T \, dS \quad (9)$$

$$\mathbf{R}_B^e = \mathbf{K}_B^e T_B \quad (10)$$

以上各式的含义分别为: 式(3)为单元热传导阵, 式(4)为单元对流边界积分的热传导部分, 式(5)为单元热源积分, 式(6)为单元对流边界积分的等效右端项部分, 式(7)为单元热流边界积分的等效右端项, 式(8)为指定温度边界引起的等效右端项部分. 其中  $\mathbf{K}^k$  为单元的材料热传导参数阵;  $\mathbf{N}$  是单元插值型函数;  $\mathbf{B}$  为单元插值型函数的导数阵;  $h$  为边界对流换热系数;  $T_f$  为对流环境温度;  $q_0$  为热源;  $q$  为热流, 其符号根据具体边界条件确定. 凡是热量从物体向外流出者  $q$  取正号“+”, 而热量向物体流入者  $q$  取负号“-”;  $T_B^e$  和  $\mathbf{K}_B^e$  分别为指定温度边界及其对应的单元热传导阵; 上标  $e$  表示单元编号.

对所有单元方程(2)组集成整体有限元方程为

$$\left( \sum_{e=1}^L \mathbf{K}^e \right) \mathbf{T} = \left( \sum_{e=1}^L \mathbf{R}^e \right) \quad (11)$$

其中  $L$  为单元的总数, 将式(11)简记为  $\mathbf{KT} = \mathbf{R}$  . (12)

## 2 基于 Neumann 展开的 Monte-Carlo 随机温度场分析

这里同时考虑物体的导热系数  $k$ 、换热系数  $h$ 、环境温度  $T_f$ 、热流密度  $q$  以及内热源  $q_0$  均具有随机性, 并可分别服从不同的分布概型. 显见, 由于这些参数的随机性将导致有限元方程(11)中刚度阵  $\mathbf{K}$  和右端的等效荷载项  $\mathbf{R}$  具有随机性, 从而使待求解的温度场  $\mathbf{T}$  也具有了随机性.

在 Monte-Carlo 随机有限元法中, 每次抽样都要进行一次有限元分析, 每次单元分析中的刚度矩阵的分解将占用大量的计算时间. 为了解决矩阵分解或求逆的效率问题, 20 世纪 80 年代后期 Shinozuka 和 Yamazaki<sup>[10]</sup> 将 Neumann 展开与 Monte-Carlo 有限元相结合, 提出了精度、效率较高的 Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元(NMCSFEM). 在 Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元中, 每次随机抽样, 只需一次形成刚度矩阵, 进行前代、回代及矩阵的加法(减法)和乘法运算, 可使随机有限元计算时间大为缩短. 因

此,Neumann 随机有限元在很多领域得到了应用<sup>[11,12]</sup>.

现将随机性方程(10)中的随机刚度矩阵  $K$  分解为

$$K = K_0 + \Delta K \quad (11)$$

其中  $K_0 = \sum_{e=1}^L K_0^e$  为随机变量参数在均值处的刚度矩阵; $\Delta K = \sum_{e=1}^L \Delta K^e$  为刚度矩阵的波动部分.

由于每次 Monte-Carlo 随机抽样只改变  $\Delta K$  和  $R$ , 由式(10)及(11)有

$$T = K^{-1}R = (K_0 + \Delta K)^{-1}R = [K_0(I + K_0^{-1}\Delta K)]^{-1}R = (I + K_0^{-1}\Delta K)^{-1}K_0^{-1}R \quad (12)$$

式中  $I$  为单位矩阵; $K_0^{-1}$  为均值刚度阵  $K_0$  的逆阵.

令 
$$P = K_0^{-1}\Delta K \quad , \quad T^{(0)} = K_0^{-1}R \quad (13)$$

当  $\|K_0^{-1}\Delta K\| < 1$ , 则由 Neumann 级数展开公式有

$$(I + K_0^{-1}\Delta K)^{-1} = I - P + P^2 - P^3 + \dots \quad (14)$$

将式(14)代入式(12), 则有

$$T = (I - P + P^2 - P^3 + \dots)K_0^{-1}R = T^{(0)} - PT^{(0)} + P^2T^{(0)} - P^3T^{(0)} + \dots = T^{(0)} - T^{(1)} + T^{(2)} - T^{(3)} + \dots \quad (15)$$

由式(15)知, 有如下递推关系 
$$PT^{(m-1)} = T^{(m)} \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad (16)$$

将式(13) 代入式(16) 并稍作变换, 有 
$$K_0T^{(m)} = \Delta KT^{(m-1)} \quad (17)$$

于是, 一旦由 
$$K_0T^{(0)} = R \quad (18)$$

求出  $T^{(0)}$ , 即可利用式(17) 逐次求出  $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots$ , 代入式(15) 即得温度场样本反应  $T$ . 由于式(15) 是无穷级数, 可用截断的办法只取前有限项之和. 在文中算例中, 当  $|T^{(m)} - T^{(m-1)}| < \epsilon$  ( $\epsilon = 1e-5$ ) 时, 不再计算  $T^{(m)}$ , 取前  $m+1$  项之和.

Neumann 展开 Monte Carlo 随机有限元法求解随机温度场的一般步骤为:

- (1) 确定基本随机变量及其随机特征;
- (2) 将各随机变量取均值代入有限元方程(10), 求出均值对应的解  $T^{(0)}$  及其刚度逆矩阵  $K_0^{-1}$ ;
- (3) 产生一组含有基本随机变量的  $K$  阵和右端  $R$  列向量, 由  $\Delta K = K - K_0$  求出  $\Delta K$ ;
- (4) 采用 Neumann 级数展开法求出有限元方程(10)的解;
- (5) 重复步骤(3), (4), 直到设定的样本总数.

对温度场随机解作如下的统计分析, 可得解的各阶矩为

$$E(T) = (1/N) \sum_{i=1}^N T^{(i)} \quad (19)$$

$$V(T) = (1/(N-1)) \sum_{i=1}^N [T^{(i)} - E(T)]^2 \quad (20)$$

$$C_k = (1/N) \sum_{i=1}^N [T^{(i)} - E(T)]^k \quad (21)$$

式中  $N$  为模拟样本数;  $T^{(i)}$  为第  $i$  次抽样计算的结果;  $E(T), V(T), C_k$  ( $k \geq 3$ ) 分别为样本的均值、方差和第  $k$  阶中心矩.

各节点温度  $T_j$  在区间  $[a, b]$  中的概率可用  $P_j \approx M_j/N$  计算, 其中  $M_j$  为各节点温度  $T_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) 落入区间  $[a, b]$  的次数.

### 3 算 例

图 1 所示正方形截面的无限长柱体, 截面边长为

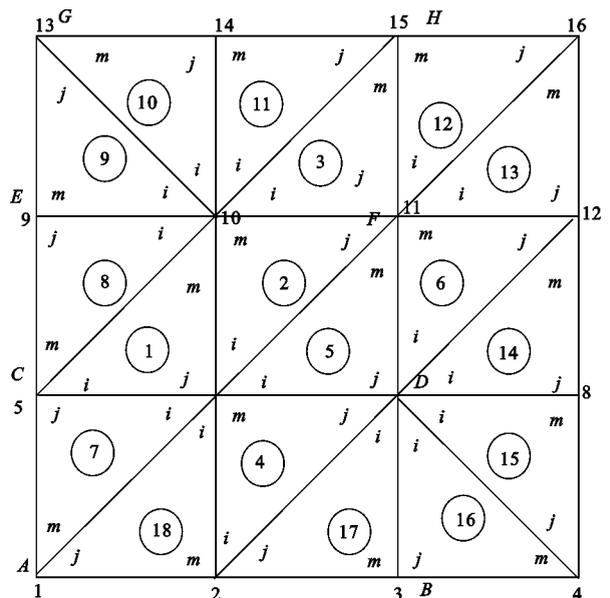


图 1 算例模型及其有限元离散图

0.15 m. 上面为绝热边界;右面边界外给定介质温度  $T_{rf}$  均值为  $\mu_{rf} = 50^\circ\text{C}$ ,左面边界外给定介质温度  $T_{lf}$  均值为  $\mu_{lf} = 100^\circ\text{C}$ ,介质与柱体表面之间的换热系数  $h$  均值为  $\mu_h = 80 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ;下面热流密度  $q$  均值为  $\mu_q = 500 \text{ W}/\text{m}^2$ ,从柱体流出;柱体的导热系数  $k$  均值为  $\mu_k = 50 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,内热源  $q_0$  均值为  $\mu_{q_0} = 100 \text{ W}/\text{m}^3$ . 这里假设以上所有的随机参数均服从正态分布,并给定随机参数  $i$  的变异系数  $\nu_i$  (变异系数为均值/均方差),求各节点的温度响应.

表 1 Neumann 展开 SFEM 模拟结果

节点	数字特征	确定性模型 <sup>[9]</sup>	随机性模型 1	随机性模型 2	随机性模型 3	随机性模型 4
		$\nu_k = \nu_{q_0} = 0$	$\nu_k = \nu_{q_0} = 0$	$\nu_k = \nu_{q_0} = 0.01$	$\nu_k = \nu_{q_0} = 0.01$	$\nu_k = \nu_{q_0} = 0.1$
	$\nu_q = \nu_{T_{lf}} = 0$	$\nu_q = 0$	$\nu_q = 0.01$	$\nu_q = \nu_{T_{lf}} = 0.01$	$\nu_q = \nu_{T_{lf}} = 0.1$	
	$\nu_{T_{rf}} = \nu_h = 0$	$\nu_{T_{lf}} = \nu_{T_{rf}} = 0.01$	$\nu_{T_{lf}} = \nu_{T_{rf}} = 0$	$\nu_{T_{rf}} = \nu_h = 0.01$	$\nu_{T_{rf}} = \nu_h = 0.1$	
		$\nu_h = 0.01$	$\nu_h = 0$			
A	均值	74.185(74.187)	74.196(74.183)	74.185(74.186)	74.193(74.187)	74.270(74.189)
	变异系数	0	0.01145(0.01138)	0.00048(0.00048)	0.01145(0.01137)	0.11475(0.11362)
B	均值	70.439(70.438)	70.448(70.434)	70.439(70.438)	70.446(70.438)	70.516(70.441)
	变异系数	0	0.01104(0.01098)	0.00053(0.00052)	0.01105(0.01097)	0.11068(0.10985)
C	均值	74.587(74.587)	74.598(74.583)	74.587(74.587)	74.595(74.588)	74.673(74.589)
	变异系数	0	0.01139(0.01131)	0.00042(0.00043)	0.01139(0.01130)	0.11411(0.11298)
D	均值	70.850(70.849)	70.859(70.845)	70.850(70.849)	70.857(70.850)	70.927(70.852)
	变异系数	0	0.01098(0.01091)	0.00047(0.00047)	0.01098(0.01091)	0.11001(0.10918)
E	均值	74.817(74.816)	74.827(74.812)	74.816(74.816)	74.825(74.817)	74.902(74.818)
	变异系数	0	0.01135(0.01128)	0.00039(0.00039)	0.01135(0.01127)	0.11375(0.11263)
F	均值	71.090(71.090)	71.099(71.086)	71.089(71.090)	71.097(71.090)	71.167(71.093)
	变异系数	0	0.01094(0.01088)	0.00043(0.00044)	0.01094(0.01087)	0.10963(0.10880)
G	均值	74.892(74.891)	74.903(74.887)	74.892(74.891)	74.900(74.891)	74.978(74.893)
	变异系数	0	0.01134(0.01127)	0.00038(0.00038)	0.01134(0.01126)	0.11363(0.11251)
H	均值	71.168(71.169)	71.177(71.164)	71.168(71.169)	71.176(71.169)	71.245(71.171)
	变异系数	0	0.01093(0.01086)	0.00042(0.00043)	0.01093(0.01085)	0.10950(0.10867)

这是一个平面稳态随机温度场问题,将截面在横向和纵向用三角形单元进行离散,如图 1 所示.按前述的计算公式编写 Matlab 程序进行求解.为了考察各随机参数随机性的大小对节点温度响应的影响,这里分别对各随机参数取不同变异系数的 4 种随机模型进行了计算.表 1 给出了文[9]对算例的确定性模型的有限元计算结果和笔者所提算法的 4 种随机性模型在 A ~ H 节点处的 20 000 次数值模拟结果,其中括号内的数据为将图中现有单元再均匀一分为二细划后(离散为 25 个节点、36 个单元)的计算结果.从表中可见,各种随机性模型的均值结果几乎是相同的,且与文[9]的确定性模型的有限元计算结果是完全一致的,这从一特殊的角度印证了文中随机模型的合理性和计算方法的正确性.另外,在同一台计算机上模拟时,单元细划分前共 16 个节点、18 个单元,耗时 146.016 s,而单元细划后共 25 个节点、36 个单元,耗时 170 s.

由此可见随着结构的自由度增多,刚度矩阵阶数增大,文中的方法愈加呈现出计算效率高的优点.图 2 描点绘出了随机性模型 3 在节点 A 处温度分布的概率密度函数,经拟合后明显呈现出正态分布的类型.

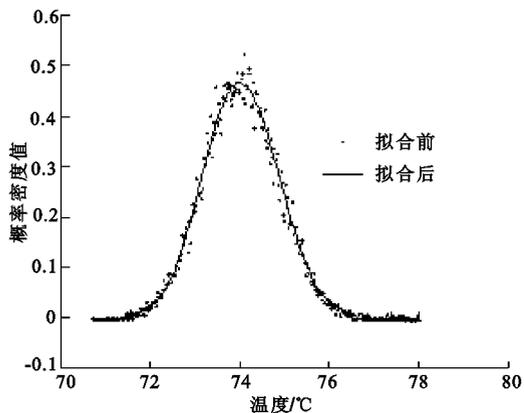


图 2 变异系数均为 0.1 节点 A 温度分布概率密度函数

## 4 结 论

(1) Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法有较好的精度,若随机变量的变异系数较大或要求精度较高,Neumann 展开级数应多取几阶,而且不会增加多少计算量。

(2) 当待求结构的自由度多,刚度矩阵阶数大时, Monte-Carlo 法每次用于刚度矩阵分解的时间将大为增加, Neumann 展开法只需一次形成刚度矩阵,然后进行前代、回代及矩阵的加法(减法)和乘法运算,因此求解的时间明显减少,效率提高。

(3) 算例表明:当结构的各物理参数及外部环境等随机参数均服从正态分布时,各节点温度随机变量也服从正态分布,且节点温度落在其上下区间  $[\mu_i - 3\sigma_i, \mu_i + 3\sigma_i]$  中的概率都大于 0.99,接近 1. 这进一步证明了线性系统对于正态变量输入其系统响应的不变性。

(4) 计算结果表明,对于文中算例,换热介质温度和换热系数两者的随机性对节点温度响应的随机性影响比较大,而导热系数、热流密度以及热源 3 者的随机性对节点温度响应的随机性影响很小. 此外,当诸随机参数的变异系数增大,对节点温度响应的随机性影响亦越大。

### 参考文献:

- [1] 李杰. 随机结构系统——分析与建模[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [2] Ghanem R, Spanos P D. Stochastic Finite Element[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [3] 亢战, 程耿东. 非确定性结构静动态特性稳健优化设计[J]. 力学学报, 2006, 38(1): 57-64.
- [4] Chen Jianjun, Wang Xiaobing. Analysis of the Dynamic Characteristic for the Intelligent Plate with Random Parameters [J]. Journal of Xidian University, 2004, 31(5): 661-665.
- [5] Emery A F. Solving Stochastic Heat Transfer Problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28(3): 279-291.
- [6] Shigekazu K, Noriyuki A, Takahiro D. Application of SFEM to Thermal Analysis for Computer Cooling[J]. Journal of Electronic Packaging, 1993, 1: 270-275.
- [7] 祁长青, 吴青柏, 施斌, 等. 青藏铁路冻土路基温度场随机有限元分析[J]. 工程地质学报, 2005, 13(3): 330-335.
- [8] 刘宁, 刘光延. 大体积混凝土结构温度场的随机有限元算法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1996, 36(1): 41-47.
- [9] 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [10] Yamazaki F, Shinozuka M, Dasgupta G. Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis[J]. J of Eng Mech, 1988, 114(8): 1335-1354.
- [11] 雷开贵, 邓子辰, 陈顺祥. 基于 Neumann 随机有限元法的复合材料压力容器的应力分析[J]. 西北工业大学学报, 2002, 20(3): 363-367.
- [12] 郝志明, 张铎, 姜晋庆, 等. 结构可靠性的纽曼展开蒙特卡罗随机有限元分析[J]. 固体力学学报, 1999, 20(4): 320-324.

(编辑: 齐淑娟)