2007年4月
第34卷 第2期

西安电子科技大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF XIDIAN UNIVERSITY

Apr. 2007
Vol. 34 No. 2

广义离散随机非线性系统的递推算法

张卓奎， 陈慧婵
(西安电子科技大学 理学院,陕西 西安 710071)

摘要： 讨论了广义离散随机非线性系统的最优递推问题,利用矩阵的奇异值分解理论,给出了广义离散随机非线性系统的奇异值标准形式,基于标准形式,在两种情况下,将系统分解成两个子系统,通过对子系统状态估计的研究,得到了该系统的最优递推算法.结果表明,对于广义随机系统,该方法便于应用并且减少了计算量.

关键词： 广义系统;递推算法;奇异值分解;状态估计

中图分类号: TP204.4;O221.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2007)02-0317-05

Optimal recursive algorithm for generalized discrete stochastic non-linear systems

ZHANG Zhuo-kui, *CHEN Hui-chan*
(School of Science, Xidian Univ., Xi′an 710071, China)

Abstract: The optimal recursive equation for the generalized discrete stochastic non-linear system is discussed. A singular values standard form for generalized discrete stochastic non-linear systems is given by singular value decomposition of a matrix. Under the two cases, the generalized discrete stochastic non-linear system is decomposed into two subsystems based on the standard form. The optimal recursive algorithm for this system is obtained by state estimation of subsystems. The result shows that this technique efficiently reduces the amount of computation for the generalized singular system.

Key Words: generalized system; recursive algorithm; singular value decomposition; state estimation

H. H. Rosenbrock 在文献[1]中提出了广义系统问题,尽管没有因果性,然而其鲜明的实际背景引起了人们的广泛关注[2~5],随着广义系统研究的不断深入,出现了许多新成果[6~8].但主要的研究都集中在广义系统状态估计的问题上,而对于广义系统的最优递推问题却很少有人问津,作为初探,笔者在讨论广义离散随机线性系统最优递推问题[6]的基础上,讨论了广义离散随机非线性系统的最优递推问题,利用矩阵的奇异值分解理论,给出了广义离散随机非线性系统的奇异值标准形式,基于标准形式,在两种情况下,将系统分解成两个子系统,通过对子系统状态最优递推问题的研究,得到了该系统的最优递推算法.由于使用的是递推法,克服了传统方法需要求解广义 Riccati 方程或高阶矩阵求逆的缺点,减少了计算量,和现行的算法相比,算法简单,便于应用.

1 问题的描述

考虑广义离散随非机线性系统

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(k+1)=f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k)+G(x(k),\boldsymbol{u}(k),k)\ \boldsymbol{v}(k)\quad , \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=h(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k)+\boldsymbol{e}(k)\quad , \tag{2}$$

收稿日期: 2006-06-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70371031);国家自然科学基金资助项目(70373046)
作者简介: 张卓奎(1962-),男,副教授,博士.

$$x(0)=x_0 \tag{3}$$

其中 $M\in R^{n\times n}$ 是奇异常数矩阵，$x(k)\in R^n$ 是状态向量，$u(k)\in U\subset R^l$ 是控制向量，$e(k)\in R^m$ 是测量噪声，$v(k)\in R^m$ 是系统噪声，$y(k)\in R^m$，$f:R^n\times U\times[0,T]\to R^n$，$h:R^n\times U\times[0,T]\to R^m$ 是非线性可微函数，$G:R^n\times U\times[0,T]\to R^{n\times m}$，$v(k)$ 和 $e(k)$ 是相关的，具有如下统计特性

$$E\{v(k)\}=m_v(k),\quad \mathrm{cov}\{v(k),v(j)\}=Q(k)\delta_{kj}\quad, \tag{4}$$

$$E\{e(k)\}=m_e(k),\quad \mathrm{cov}\{e(k),e(j)\}=R(k)\delta_{kj}\quad, \tag{5}$$

$$\mathrm{cov}\{v(k),e(j)\}=S(k)\delta_{kj}\quad, \tag{6}$$

其中 $Q(k)\in R^{m\times m}$ 为对称非负定矩阵，$R(k)\in R^{m\times m}$ 为对称正定矩阵，$S(k)\in R^{m\times m}$ 为对称正定矩阵. 假设系统是强可控的，即系统的脉冲模和指数模都是可控的，初始状态 $x(0)=x_0$ 是高斯白噪声，具有 $E\{x(0)\}=\bar{x}_0$，$\mathrm{var}\{x(0)\}=P_0$ 的统计特征，$x(0)$，$v(k)$ 和 $e(k)$ 统计独立.

将 $f(\cdot)$ 在状态估计值 $\hat{x}(k)$ 及相应的控制 $\tilde{u}(k)$ 处进行 Taylor 展开，并只保留线性部分，式(1)可化为

$$Mx(k+1)=F_1(x)x(k)+F_2(k)u(k)+\phi(k)+G(k)v(k)\quad, \tag{7}$$

其中 $F_1(k)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\hat{x}(k),\tilde{u}(k),k)}$，$F_2(k)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\hat{x}(k),\tilde{u}(k),k)}$，$\phi(k)=f(\hat{x}(k),\tilde{u}(K),k)-F_1(k)\hat{x}(k)-F_2(k)\tilde{u}(k)$，$G(k)=G(\hat{x}(k),\tilde{u}(k),k)$. 相应地，式(2)可化为

$$y(k)=H(k)x(k)+\varphi(k)+e(k)\quad, \tag{8}$$

其中 $H(k)=\left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_{(\hat{x}(k),k)}$，$\varphi(k)=(h(\hat{x}(k),k)-H(k)\hat{x}(k)$.

令 $A(k)\in R^{m\times m}$ 为一个待定的矩阵，利用式(4)～(6)及式(8)，式(7)可化为

$$Mx(k+1)=F_1^*(k)x(k)+F_2(k)u(k)+\phi^*(k)+G(k)v^*(k)\quad, \tag{9}$$

其中 $F_1^*(k)=F_1(k)-A(k)H(k)$，$\quad\phi^*(k)=\phi(k)+G(k)m_v(k)+A(k)[y(k)-\varphi(k)-m_e(k)]\quad$，

$v^*(k)=v(k)-m_v(k)-A(k)[e(k)-m_e(k)]\quad$.

相应地，式(8)可化为

$$y(k)=H(k)x(k)+\varphi^*(k)+e^*(k)\quad, \tag{10}$$

其中 $\varphi^*(k)=\varphi(k)+m_e(k)$，$e^*(k)=e(k)-m_e(k)$，这时有

$$E\{v^*(k)\}=0\quad,\quad E\{e^*(k)\}=0\quad, \tag{11}$$

$$\mathrm{cov}(v^*(k),\ v^*(j))=Q^*(k)\delta_{kj}\quad, \tag{12}$$

$$\mathrm{cov}(e^*(k),\ e^*(j))=R^*(k)\delta_{kj}\quad, \tag{13}$$

$$\mathrm{cov}(v^*(k),\ e^*(j))=[S(k)-A(k)R(k)]\delta_{kj}\quad. \tag{14}$$

于是，由式(11)和(14)可知，只要选择 $A(k)=S(k)R^{-1}(k)$，$v^*(k)$ 和 $e^*(k)$ 就成为互不相关的零均值高斯白噪声，为讨论问题方便起见，略去系统(9)，(10)中的平凡项 $\phi^*(k)$ 和 $\varphi^*(k)$，从而系统(1)～(3)化为广义离散随机线性系统

$$Mx(k+1)=F_1^*(k)x(k)+F_2(k)u(k)+G(k)v^*(k)\quad, \tag{15}$$

$$y(k)=H(k)x(k)+e^*(k)\quad, \tag{16}$$

$$x(0)=x_0\quad. \tag{17}$$

由于 M 是奇异矩阵，设 $\mathrm{rank}\,M=r<n$，根据奇异值分解，存在正交矩阵 $U\in R^{n\times n}$ 和正交矩阵$V\in R^{n\times n}$，使得

$$U\,M\,V=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad, \tag{18}$$

其中 $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_i>0\ (i=1,2,\cdots,r)$ 为矩阵 M 的奇异值. 令$x(k)=V(x_1^{\mathrm{T}}(k),x_2^{\mathrm{T}}(k))^{\mathrm{T}}$，将式(18) 代入式(15) 并以 U 左乘式(15)的两端得

$$\Sigma x_1(k+1)=A_{11}(k)x_1(k)+A_{12}(k)x_2(k)+B_1(k)u(k)+\Gamma_1(k)v^*(k)\quad, \tag{19}$$

$$\mathbf{0}=A_{21}(k)x_1(k)+A_{22}(k)x_2(k)+B_2(k)u(k)+\Gamma_2(k)v^*(k)\quad, \tag{20}$$

$$y(k)=C_1(k)x_1(k)+C_2(k)x_2(k)+e^*(k)\quad, \tag{21}$$

其中 $x_1(k)\in R^r$，$x_2(k)\in R^{n-r}$，且$UF_1^*(k)V=\begin{bmatrix}A_{11}(k & A_{12}(k)\\ A_{21}(k) & A_{22}(k)\end{bmatrix}$，$UF_2(k)=\begin{bmatrix}B_1(k)\\ B_2(k)\end{bmatrix}$，$UG(k)=\begin{bmatrix}\Gamma_1(k)\\ \Gamma_2(k)\end{bmatrix}$，

$H(k)\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{C}_1(k)\quad \boldsymbol{C}_2(k)]$. 称式(19)～(20)和式(17)为系统(15)～(17)的奇异值标准形式.

2　广义离散随机非线性系统的最优递推方法

(1) 当 rank $\boldsymbol{A}_{22}(k)=n-r$ 时,则 $\boldsymbol{A}_{22}(k)$ 非奇异,由式(20)得

$$\boldsymbol{x}_2(k)=-\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{A}_{21}(k)\boldsymbol{x}_1(k)-\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{\Gamma}_2(k)\boldsymbol{v}^*(k)\quad . \tag{22}$$

将式(22)代入式(19)和式(21)得到一个 r 维子系统为

$$\boldsymbol{x}_1(k+1)=\boldsymbol{A}_0(k)\boldsymbol{x}_1(k)+\boldsymbol{B}_0(k)\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{\Gamma}_0(k)\boldsymbol{v}^*(k)\quad , \tag{23}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_0(k)\boldsymbol{x}_1(k)+\boldsymbol{D}_0(k)\boldsymbol{u}(k)+\bar{\boldsymbol{v}}(k)\quad , \tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{A}_0(k)=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{A}_{11}(k)-\boldsymbol{A}_{12}(k)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{A}_{21}(k)),\quad \boldsymbol{B}_0(k)=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{B}_1(k)-\boldsymbol{A}_{12}(k)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{B}_2(k))\quad ,$

$\boldsymbol{C}_0(k)=\boldsymbol{C}_1(k)-\boldsymbol{C}_2(k)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{A}_{21}(k),\quad \boldsymbol{D}_0(k)=-\boldsymbol{C}_2(k)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{B}_2(k)\quad ,$

$\bar{\boldsymbol{v}}(k)=\boldsymbol{e}^*(k)-\boldsymbol{F}_0(k)\boldsymbol{v}^*(k),\quad \boldsymbol{F}_0(k)=\boldsymbol{C}_2(k)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{\Gamma}_2(k)\quad ,$

$\boldsymbol{\Gamma}_0(k)=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}_1(k)-\boldsymbol{A}_{12}(k)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(k)\boldsymbol{\Gamma}_2(k))\quad .$

并且

$$\begin{aligned}E\{\boldsymbol{v}^*(k)\bar{\boldsymbol{v}}(j)\}&=E\{\boldsymbol{v}^*(k)(\boldsymbol{e}^*(j)-\boldsymbol{F}_0(k)\boldsymbol{v}^*(j))^{\mathrm{T}}\}=E\{\boldsymbol{v}^*(k)(\boldsymbol{e}^*(j))^{\mathrm{T}}\}-\\&E\{\boldsymbol{v}^*(k)\boldsymbol{v}^*(j))^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(\mathrm{k})=-\boldsymbol{Q}^*(k)\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(k)\delta_{k,j}\triangleq\boldsymbol{Q}_d(k)\delta_{k,j}\quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\{\bar{\boldsymbol{v}}(k)\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}(j)\}&=E\{(\boldsymbol{e}^*(k)-\boldsymbol{F}_0(k)\boldsymbol{v}^*(k))(\boldsymbol{e}^*(j)-\boldsymbol{F}_0(j)\boldsymbol{v}^*(j))^{\mathrm{T}}\}=\\&E\{\boldsymbol{e}^*(k)(\boldsymbol{e}^*(j))^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}^*(k)(\boldsymbol{v}^*(j))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(j)-\boldsymbol{F}_0(k)\boldsymbol{v}^*(k)(\boldsymbol{e}^*(j))^{\mathrm{T}}+\\&\boldsymbol{F}_0(k)\boldsymbol{v}^*(k)(\boldsymbol{v}^*(j))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(j)\}=E\{\boldsymbol{e}^*(k)(\boldsymbol{e}^*(j))^{\mathrm{T}}\}-E\{\boldsymbol{e}^*(k)(\boldsymbol{v}^*(j))^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(j)-\\&\boldsymbol{F}_0(k)E\{\boldsymbol{v}^*(k)(\boldsymbol{e}(j))^{\mathrm{T}}\}+\boldsymbol{F}_0(k)E\{\boldsymbol{v}^*(k)(\boldsymbol{v}^*(j))^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(j)=\boldsymbol{R}^*(k)\delta_{kj}+\\&\boldsymbol{F}_0(k)\boldsymbol{Q}^*(k)\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(k)\delta_{kj}=[\boldsymbol{R}^*(k)+\boldsymbol{F}_0(k)\boldsymbol{Q}^*(k)\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}(k)]\delta_{k,j}\triangleq\boldsymbol{R}_d(k)\delta_{k,j}\quad .\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{Y}(k)$ 表示到目前 k 时刻为止的全部观测向量组成的随机向量,$\boldsymbol{Y}_k$ 表示一次实验所获得的 $\boldsymbol{Y}(k)$ 的样本实现,即$\boldsymbol{Y}(k)=[y(0),y(1),\cdots,y(k)]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Y}_k=[y_0,y_1,\cdots,y_k]^{\mathrm{T}}$,为符号书写简单,把 $x_1(k)$ 仍然用 $\boldsymbol{x}(k)$ 表示,其初始状态统计特征的记号也不做改变. 令 $\hat{x}(k^+)$ 表示状态滤波,即

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k^+)=E\{\boldsymbol{x}(k)\mid\boldsymbol{Y}(k)=\boldsymbol{Y}_k\}\quad . \tag{25}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)$ 表示 1 步预测估计,即　$\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)=E\{\boldsymbol{x}(k)\mid\boldsymbol{Y}(k-1)=\boldsymbol{Y}_{k-1}\}\quad .$ (26)

则 $\hat{\boldsymbol{x}}(k^+)$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)$ 的误差估计协方差矩阵分别为

$$\boldsymbol{P}(k^+)=E\{[\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k^+)][\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k^+)]^{\mathrm{T}}\mid\boldsymbol{Y}(k)=\boldsymbol{Y}_k\}\quad , \tag{27}$$

$$\boldsymbol{P}(k^-)=E\{[\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)][\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)]^{\mathrm{T}}\mid\boldsymbol{Y}(k-1)=\boldsymbol{Y}_{k-1}\}\quad . \tag{28}$$

① 在时刻 0^+,$[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0),\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}$ 是联合高斯随机变量,它的均值向量和协方差矩阵分别为

$$[\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}\quad ,\qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}(0) & \boldsymbol{B}_{12}(0)\\ \boldsymbol{B}_{21}(0) & \boldsymbol{B}_{22}(0)\end{bmatrix}\quad ,$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{11}(0)=\boldsymbol{P}_0-\bar{\boldsymbol{x}}_0\,\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}\quad ,\\&\boldsymbol{B}_{12}(0)=\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(0)+\bar{\boldsymbol{x}}_0\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(0)-\bar{\boldsymbol{x}}_0\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(0)-\bar{\boldsymbol{x}}_0\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(0)\quad ,\\&\boldsymbol{B}_{21}(0)=\boldsymbol{C}_0(0)\boldsymbol{P}_0^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_0(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}_0(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{D}_0(0)\boldsymbol{u}(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}\quad ,\\&\boldsymbol{B}_{22}(0)=\boldsymbol{C}_0(0)\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(0)+\boldsymbol{C}_0(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(0)+\boldsymbol{D}_0(0)\boldsymbol{u}(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(0)+\boldsymbol{D}_0(0)\boldsymbol{u}(0)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(0)+\\&\quad\boldsymbol{R}_d(0)-\boldsymbol{C}_0(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(0)-\boldsymbol{C}_0(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(0)-\boldsymbol{D}_0(0)\boldsymbol{u}(0)\bar{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(0)-\bar{\boldsymbol{x}}_0\boldsymbol{u}(0)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(0)\quad .\end{aligned}$$

在给定条件 $y(0)=y_0$ 下,$\boldsymbol{x}(0)$ 的条件概率密度是高斯的,根据 Bayesian 估计定理,最优估计是条件均值

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0^+)=\bar{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{B}_{12}(0)\boldsymbol{B}_{22}^{-1}(0)[\boldsymbol{Y}(0)-(\boldsymbol{C}_0(0)-\boldsymbol{D}_0(0)\boldsymbol{u}(0))\bar{\boldsymbol{x}}_0]\quad . \tag{29}$$

并且协方差矩阵是　$\boldsymbol{P}(0^+)=\boldsymbol{B}_{11}(0)-\boldsymbol{B}_{12}(0)\boldsymbol{B}_{22}^{-1}(0)\boldsymbol{B}_{12}^{\mathrm{T}}(0)\quad .$ (30)

② 在时间间隔 0^+ 到 1^-,系统遵循式(23)向前传播,并且它的传递矩阵可如下定义

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\theta}}(k,\tau)=\boldsymbol{A}_0(k)\boldsymbol{\theta}(k,\tau)+\boldsymbol{B}_0(k)\boldsymbol{u}(k)\quad ,\\ \boldsymbol{\theta}(k,k)=\boldsymbol{I}\quad .\end{cases}$$

再由式(23)得
$$\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{\theta}(1,0)+\boldsymbol{B}_0(1)\boldsymbol{u}(1)+\int_0^1\boldsymbol{\theta}(1,\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(\tau)\quad, \tag{31}$$
其中 $\{\boldsymbol{\beta}(t),t\geqslant 0\}$ 是相应维的 Brownian 运动过程,而且具有
$$E\{\boldsymbol{\beta}(t)\}=0\quad,\quad E\{[\boldsymbol{\beta}(t)-\boldsymbol{\beta}(s)][\boldsymbol{\beta}(t)-\boldsymbol{\beta}(s)]^{\mathrm{T}}\}=\int_s^t\boldsymbol{Q}_d(\tau)\,\mathrm{d}\tau\quad.$$
在式(31)的两边取给定的条件 $\boldsymbol{Y}(0)=Y_0$ 下取条件期望,得
$$\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)=\boldsymbol{\theta}(1,0)\hat{\boldsymbol{x}}(0^+)+\boldsymbol{B}_0(1)\boldsymbol{u}(1)\quad. \tag{32}$$
由式(17)和上式(18),误差估计协方差矩阵为
$$\boldsymbol{P}(1^-)=\boldsymbol{\theta}(1,0)\boldsymbol{P}(0^+)\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}(1,0)+\boldsymbol{B}_0(1)\boldsymbol{u}(1)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}(1)+\int_0^1\boldsymbol{\theta}(1,\tau)\boldsymbol{\Gamma}_0(1)\boldsymbol{\theta}_d(\tau)\boldsymbol{\Gamma}_0^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{\theta}(1,\tau)\,\mathrm{d}\tau\quad. \tag{33}$$

③ 在时刻 1^+,$[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(1),\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(1)]^{\mathrm{T}}$ 是联合高斯随机变量,并且在给定条件 $\boldsymbol{Y}(1)=\boldsymbol{Y}_1$ 下,它的均值向量和协方差矩阵分别为
$$[\hat{\boldsymbol{x}}(1^-),\ \hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(1)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(1)]^{\mathrm{T}}\quad,\qquad\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}(1) & \boldsymbol{B}_{12}(1)\\ \boldsymbol{B}_{21}(1) & \boldsymbol{B}_{22}(1)\end{bmatrix}\quad,$$
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_{11}(1)=\boldsymbol{P}(1^-)-\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\,\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(1^-)\quad,\\
&\boldsymbol{B}_{12}(1)=\boldsymbol{P}(1^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(1)+\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(1)-\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(1^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(1)-\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(1)\quad,\\
&\boldsymbol{B}_{21}(1)=\boldsymbol{C}_0(1)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(1^-)+\boldsymbol{D}_0(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)-\boldsymbol{C}_0(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(1^-)-\boldsymbol{D}_0(1)\boldsymbol{u}(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\quad,\\
&\boldsymbol{B}_{22}(1)=\boldsymbol{C}_0(1)\boldsymbol{P}(1^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(1)+\boldsymbol{C}_0(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(1)+\boldsymbol{D}_0(1)\boldsymbol{u}(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(1)+\\
&\qquad\boldsymbol{D}_0(1)\boldsymbol{u}(1)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(1)+\boldsymbol{R}_d(1)-\boldsymbol{C}_0(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(1^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(1)-\boldsymbol{C}_0(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(1)-\\
&\qquad\boldsymbol{D}_0(1)\boldsymbol{u}(1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(1)-\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)\boldsymbol{u}(1)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(1)\quad.
\end{aligned}$$
在给定条件 $\boldsymbol{Y}_1=[y_0,y_1]^{\mathrm{T}}$ 下,$x(1)$ 的最优估计是
$$\hat{\boldsymbol{x}}(1^+)=\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)+\boldsymbol{B}_{12}(1)\boldsymbol{B}_{22}^{-1}(1)[\boldsymbol{Y}(1)-(\boldsymbol{C}_0(1)-\boldsymbol{D}_0(1)\boldsymbol{u}(1))\hat{\boldsymbol{x}}(1^-)]\quad. \tag{34}$$
相应地,误差估计协方差矩阵是
$$\boldsymbol{P}(1^+)=\boldsymbol{B}_{11}(1)-\boldsymbol{B}_{12}(1)\boldsymbol{B}_{22}^{-1}(1)\boldsymbol{B}_{12}^{\mathrm{T}}(1)\quad. \tag{35}$$

④ 改变时间下标重复步骤②,得到
$$\hat{\boldsymbol{x}}(2^-)=\boldsymbol{\theta}(2,1)\hat{\boldsymbol{x}}(1^+)+\boldsymbol{B}_0(2)\boldsymbol{u}(2)\quad, \tag{36}$$
$$\boldsymbol{P}(2^-)=\boldsymbol{\theta}(2,1)\boldsymbol{P}(1^+)\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}(2,1)+\boldsymbol{B}_0(2)\boldsymbol{u}(2)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(2)\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}(2)+\int_1^2\boldsymbol{\theta}(2,1)\boldsymbol{\Gamma}_0(2)\boldsymbol{Q}_d(\tau)\boldsymbol{\Gamma}_0^{\mathrm{T}}(2)\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}(2,1)\,\mathrm{d}\tau \tag{37}$$

⑤ 重复步骤③和④直至时刻 k,则最优递推方程的一般形式可表示为
$$\hat{\boldsymbol{x}}(k^+)=\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)+\boldsymbol{B}_{12}(k)\boldsymbol{B}_{22}^{-1}(k)[\boldsymbol{Y}(k)-(\boldsymbol{C}_0(k)-\boldsymbol{D}_0(k)\boldsymbol{u}(k))\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)]\quad, \tag{38}$$
其中
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_{12}(k)=\boldsymbol{P}(k^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(k)+\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(k)\quad,\\
&\boldsymbol{B}_{22}(k)=\boldsymbol{C}_0(k)\boldsymbol{P}(k^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{C}_0(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{D}_0(k)\boldsymbol{u}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(k)+\\
&\qquad\boldsymbol{D}_0(k)\boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{R}_d(k)-\boldsymbol{C}_0(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(k)-\\
&\qquad\boldsymbol{C}_0(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(k)-\boldsymbol{D}_0(k)\boldsymbol{u}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k^-)\boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_0^{\mathrm{T}}(k)\quad,
\end{aligned}$$
$$\boldsymbol{x}((k+1)^-)=\boldsymbol{\theta}(k+1,k)\boldsymbol{x}(k^+)+\boldsymbol{B}_0(k+1)\boldsymbol{u}(k+1)\quad, \tag{39}$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}(0^-)=\bar{\boldsymbol{x}}_0\quad,\qquad\boldsymbol{P}(0^-)=\boldsymbol{P}_0\quad. \tag{40}$$

(2) 当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_{22}(k)<n-r$ 时,由文献[7]中的引理 2 及 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{A}_{12}(k) & \boldsymbol{B}_1(k)\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}(k) & \boldsymbol{B}_2(k)\end{bmatrix}=n$,得
$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}_{22}(k)\quad\boldsymbol{B}_2(k)]=n-r\quad.$$
令 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_{22}(k)=r_1$,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{J}\in R^{(n-r)\times(n-r)}$,使得
$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{22}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1(k) & \boldsymbol{\Delta}_2(k)\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad,$$
其中 $\boldsymbol{\Delta}_1(k)\in R^{r_1\times r_1}$ 是上三角矩阵,并且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{\Delta}_1(k)=r_1$,$\boldsymbol{\Delta}_2(k)\in R^{r_1\times(n-r-r_1)}$.

令 $\boldsymbol{D}(k)=\boldsymbol{J}\boldsymbol{B}_2(k)=[\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}(k)\quad\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{D}_1(k)\in R^{r_1\times l}$,$\boldsymbol{D}_2(k)\in R^{(n-r-r_1)\times l}$,得

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{A}_{22}(k)\quad \boldsymbol{B}_2(k)]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1(k) & \boldsymbol{\Delta}_2(k) & \boldsymbol{D}_1(k)\\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2(k)\end{bmatrix}\quad,\quad \mathrm{rank}\,\boldsymbol{D}_2(k)=n-r-r_1\quad .$$

从而 $\boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}(k)$ 可逆，令 $\boldsymbol{K}_2(k)=\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}(k))^{-1}$，则

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{A}_{22}(k)\quad \boldsymbol{B}_2(k)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_1 & 0\\ \boldsymbol{K}_1(k) & \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1(k) & \boldsymbol{\Delta}_2(k) & \boldsymbol{D}_1(k)\\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{11} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_{12} & 0\\ 0 & \boldsymbol{K}_2(k) & \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}\quad ,$$

其中 $\boldsymbol{I}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{11} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_{12}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{I}_{11}$ 和 $\boldsymbol{I}_{12}$ 分别是 l 阶，r_1 阶和$n-r-r_1$ 阶单位矩阵并且$\boldsymbol{K}_1(k)=[0\quad \boldsymbol{K}_2(k)]$是$l\times(n-r)$ 阶矩阵. 由于$\boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{K}_2(k)=\boldsymbol{I}_{n-r-r_1}$，因此

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{A}_{22}(k)+\boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{K}_1(k)\quad \boldsymbol{B}_2(k)\quad]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1(k) & \boldsymbol{\Delta}_2(k)+\boldsymbol{D}_1(k)\boldsymbol{K}_2(k) & \boldsymbol{D}_1(k)\\ 0 & \boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{K}_2(k) & \boldsymbol{D}_2(k)\end{bmatrix}\quad ,$$

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{A}_{22}(k)+\boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{K}_1(k)]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1(k) & \boldsymbol{\Delta}_2(k)+\boldsymbol{D}_1(k)\boldsymbol{K}_2(k)\\ 0 & \boldsymbol{I}_{n-r-r_1}\end{bmatrix}\quad .$$

于是　$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}_{22}(k)+\boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{K}_1(k))=n-r\quad ,$

令 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}_1(k)\boldsymbol{x}_2(k)+\boldsymbol{\eta}(k)$，并代入式(19)～(21)，然后再令

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{12}(k)=\boldsymbol{A}_{12}(k)+\boldsymbol{B}_1(k)\boldsymbol{K}_1(k)\quad,\quad \widetilde{\boldsymbol{A}}_{22}(k)=\boldsymbol{A}_{22}(k)+\boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{K}_1(k)\quad .$$

则

$$\boldsymbol{\Sigma x}_1(k+1)=\boldsymbol{A}_{11}(k)\boldsymbol{x}_1(k)+\widetilde{\boldsymbol{A}}_{12}(k)\boldsymbol{x}_2(k)+\boldsymbol{B}_1(k)\boldsymbol{\eta}(k)+\boldsymbol{\Gamma}_1(k)\boldsymbol{v}^*(k)\quad ,\tag{41}$$

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}_{21}(k)\boldsymbol{x}_1(k)+\widetilde{\boldsymbol{A}}_{22}(k)\boldsymbol{x}_2(k)+\boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{\eta}(k)+\boldsymbol{\Gamma}_2(k)\boldsymbol{v}^*(k)\quad ,\tag{42}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_1(k)\boldsymbol{x}_1(k)+\boldsymbol{C}_2(k)\boldsymbol{x}_2(k)+\boldsymbol{e}^*(k)\quad ,\tag{43}$$

并且 $\mathrm{rank}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{22}(k)=n-r$. 这样就把情形(2)转化成(1)的情况.

3　结 束 语

针对目前广义系统的研究状况，讨论了广义离散随机非线性系统的最优递推问题，利用矩阵的奇异值分解理论，得到了该系统的最优递推算法，由于得到的是递推法，因此使得该算法具有便于应用，计算量小的特点.

参考文献：

[1] Rosenbrock H H. State Space and Multivariable Theory[M]. New York：Wiley，1970.
[2] Cobb D. Controllability and Duality in Singular System[J]. IEEE Trans on Automatic Control，1984，29(12)：1076-1082.
[3] Luenbrger D C. Dynamic Equation in Descriptor Form[J]. IEEE Trans on Automatic Control，1977，22(3)：312-321.
[4] 王朝珠，王恩平. 带有脉冲模的广义控制系统设计[J]. 控制理论与应用，1988，5(3)：47-56.
[5] 王恩平. 广义离散随机线性系统的次优滤波[J]. 科学通报. 1989，34(15)：1186-1188.
[6] Zhang Zhuokui，Chen Huichan. Optimal Recursiveness for Generalized Discrete Stochastic Linear System[J]. Journal of Xidian University，2006，33(2)：273-277.
[7] Zhang Zhuokui，Chen Huichan，Liu Sanyang. A State Estimation of Singular Discrete Stochastic Linear System[J]. Journal of Xidian University，2002，29(1)：110-114.
[8] 张卓奎，陈慧婵，刘三阳. 带状随机线性系统状态的估计问题[J]. 系统工程与电子技术，2002，24(11)：56-59.

（编辑：齐淑娟）