

时变多径 Rayleigh 衰落信道中的匹配滤波界

韩芳明¹, 张贤达²

(1. 西安电子科技大学 雷达信号处理重点实验室, 陕西 西安 710071;

2. 清华大学 清华信息科学与技术国家实验室, 北京 100084)

摘要: 通过将时变多径 Rayleigh 衰落信道中传输符号的判决变量表示为高斯随机矢量的二次形式, 得出其特征函数以加权协方差矩阵之特征值为变量的解析表达式. 因而该信道下的匹配滤波界可以简洁地表示为该特征函数部分分式展开中负特征值对应的系数之和. 进一步比较了几种调制脉冲波形在时变多径 Rayleigh 衰落信道下的匹配滤波性能, 发现矩形脉冲可以取得最好的时频分集.

关键词: 时变多径 Rayleigh 衰落信道; 特征函数; 匹配滤波界

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2007)02-0205-04

Matched filter bound for time-varying multipath Rayleigh fading channels

HAN Fang-ming¹, ZHANG Xian-da²

(1. State Key Lab. of Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China; 2. National Lab. of Tsinghua Information Science and Technology, Tsinghua Univ., Beijing 710071, China)

Abstract: By expressing the decision variables of transmission symbols in time-varying multipath Rayleigh fading channels as the Gaussian quadratic vector form, we derive the analytic expression for its characteristic function as a function of the eigenvalues of the weighted covariance matrix. Therefore, the matched filter bound for such channels can be expressed as the sum of the coefficients corresponding to the negative eigenvalues in the partial fraction expansion of the characteristic function. We further compare in matched filtering performance several modulation pulses in time-varying multipath Rayleigh fading channels, with the result that the rectangular pulse can achieve the best time and frequency diversity.

Key Words: time-varying multipath Rayleigh fading channels; characteristic function; matched filter bound

当信息符号在时变多径衰落信道中传输时, 由于多径时延扩展, 会发生码间干扰 (ISI), 从而降低系统性能. 因此, 在接收端通常采用各种均衡技术来克服 ISI, 以提高信息传输的可靠性^[1]. 不同的均衡器具有不同的性能. 在研究各种均衡技术时, 常常希望得出其误码率 (BER) 的解析表达式, 以对其效果进行理论分析. 遗憾的是, 对于一些性能卓越的非线性均衡技术, 如判决反馈均衡器或最大似然均衡器^[2,8], 很难得出其理论误码率的闭式表达式. 转而希望用 BER 下界或上界来刻画其性能. 匹配滤波界 (MFB) 就是这样一种性能下界. 它表示 ISI 已经被完全对消 (即理想均衡) 情况下单脉冲传输的最佳性能.

文献[3,4]分别给出了时不变离散和连续多径 Rayleigh 衰落信道下的 MFB 性能. 基于对接收脉冲频谱的卡亨南-洛维 (Karhunen-Loeve) 展开, 文献[5]得出了时变连续多径 Rayleigh 衰落信道下的 MFB 表达式. 笔者基于高斯随机矢量二次形式的特征函数, 来研究时变离散多径 Rayleigh 衰落信道下的 MFB 性能, 并对不同脉冲波形的时频分集效应进行比较.

1 信号模型与问题表述

由于在研究 MFB 性能时,假定 ISI 已经被完全对消,因此可以只考虑单符号(脉冲)传输,其基带离散时间发射信号可以表示为

$$s_0(k) = c_0 g(k) \quad , \quad 1 \leq k \leq L_g \quad , \quad (1)$$

其中 c_0 为信息符号,假定其具有单位能量;而 $g(k)$, $k = 1, 2, \dots, L_g$ 为调制脉冲. 发射信号在无线信道中传输时,会受到信道衰落及背景噪声的扰动. 时变频率选择性衰落信道可以用其时变脉冲响应 $h(k, l)$, $l = 0, 1, \dots, L-1$ 来描述,其中 L 表示时延扩展的多径数. 本文中假定信道衰落幅度服从 Rayleigh 分布,因此, $h(k, l)$ 是均值为 0 方差为 σ_l^2 的复高斯随机变量,其中 σ_l^2 表示第 l 条传播路径的功率. 不失一般性,进一步假定

$\sum_{l=0}^{L-1} \sigma_l^2 = 1$. 因此,接收信号可以表示为

$$r(k) = \sum_{l=0}^{L-1} h(k, l) s_0(k-l) + \eta(k) = c_0 s(k) + \eta(k) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, K \quad , \quad (2)$$

其中 $K = L_g + L - 1$ 为接收信号 $r(k)$ 的有效长度, $\eta(k)$ 为具有零均值和方差 σ_n^2 的加性白高斯噪声

(AWGN), 而 $s(k) = \sum_{l=0}^{L-1} h(k, l) g(k-l)$ 为经信道扰动后的传输波形.

假定接收端完全知道信道衰落信息,则以 $s(k)$ 为接收波形对 $r(k)$ 进行匹配滤波形成判决统计变量(这里假定采用 QPSK 调制)

$$d = \text{Re}(y) = \text{Re}\left(\sum_k r(k) s^*(k)\right) \quad , \quad (3)$$

其中上标 $(\cdot)^*$ 表示复共轭,而 $\text{Re}(\cdot)$ 为实部算子. 因此错误概率可以表示为

$$P_e = P_r\{d < 0 \mid c_0 = \exp(j\pi/4)\} \quad . \quad (4)$$

下面的目标就是求解 P_e 的确切表达式.

2 MFB 的计算

如果定义 $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]^T$, $\mathbf{s} = [s(1), \dots, s(K)]^T$ 和 $\boldsymbol{\eta} = [\eta(1), \dots, \eta(K)]^T$, 其中上标 T 表示转置运算,则式(3)中的 y 可以写成矢量形式

$$y = \mathbf{s}^H \mathbf{r} = \mathbf{s}^H (c_0 \mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}) \quad , \quad (5)$$

其中上标 H 表示共轭转置. 进一步判决统计变量 d 可以表示为

$$d = \text{Re}(y) = \frac{1}{2}(y + y^*) = \frac{1}{2} [\mathbf{s}^H \quad c_0^* \mathbf{s}^H + \boldsymbol{\eta}^H] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ c_0 \mathbf{s} + \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^H \mathbf{Q} \mathbf{z} \quad , \quad (6)$$

其中, \mathbf{I} 为 $K \times K$ 的单位阵, $\mathbf{0}$ 为 $K \times K$ 的全 0 矩阵. 由于在 Rayleigh 衰落信道及加性高斯背景噪声的假设下, $h(k, l)$ 与 $\eta(k)$ 均为复高斯随机变量,因此 \mathbf{z} 是一个复高斯随机矢量. 这样,式(6)实际上将判决统计变量 d 写成了复高斯随机矢量的二次形式. 根据文献[6],复高斯随机矢量的二次形式的累积分布函数和特征函数可以唯一地由其“加权”协方差矩阵 $\text{Cov}(\mathbf{z})\mathbf{Q}$ 的特征值来确定,其中 $\text{Cov}(\mathbf{z}) = E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\}$.

$$\text{Cov}(\mathbf{z})\mathbf{Q} = E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ c_0 \mathbf{s} + \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^H & c_0^* \mathbf{s}^H + \boldsymbol{\eta}^H \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^* \mathbf{R}_s & \mathbf{R}_s \\ \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_\eta & c_0 \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \quad , \quad (7)$$

其中 $E\{\cdot\}$ 为期望算子, $\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\}$ 以及 $\mathbf{R}_\eta = E\{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^H\} = \sigma_\eta^2 \mathbf{I}$ 分别为 \mathbf{s} 与 $\boldsymbol{\eta}$ 的(自)协方差矩阵. 在得到(7)式的过程中,还利用了 \mathbf{s} 与 $\boldsymbol{\eta}$ 之间的独立性,即 $E\{\mathbf{s}\boldsymbol{\eta}^H\} = \mathbf{0}$. 通常无线传输信道满足广义平稳非相关(WSSUS)假设^[1],即不同时延路径的衰落系数互不相关,因此 \mathbf{R}_s 的第 (m, n) 个元素可以表示为

$$\mathbf{R}_s(m, n) = E\left\{\sum_{l=0}^{L-1} h(m, l) g(m-l) \sum_{p=0}^{L-1} h^*(n, p) g^*(n-p)\right\} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{p=0}^{L-1} E\{h(m, l) h^*(n, p)\} \cdot$$

$$g(m-l)g^*(n-p) = \sum_{l=0}^{L-1} \sigma_l^2 \zeta[(m-n)T_s] g(m-l)g^*(n-l) \quad (8)$$

其中 T_s 为抽样间隔, $\zeta[(m-n)T_s] = E\{h(m,l)h^*(n,l)\}/\sigma_l^2$ 为信道衰落系数的归一化时间自相关函数,它是多普勒频谱的傅立叶反变换. 若再定义 $G_l = \text{diag}\{g(1-l), \dots, g(K-l)\}$, $l=0, \dots, L-1$, 则由式(8), R_s 可以写成

$$R_s = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ \begin{bmatrix} g(1-l) & & \\ & \ddots & \\ & & g(K-l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(0) & \dots & \zeta[(K-1)T_s] \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta[-(K-1)T_s] & \dots & \zeta(0) \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} g^*(1-l) & & \\ & \ddots & \\ & & g^*(K-l) \end{bmatrix} \right\} = \sum_{l=0}^{L-1} G_l \sigma_l^2 \zeta G_l^H = \mathbf{G} \mathbf{\Gamma} \mathbf{G}^H \quad (9)$$

其中 $\mathbf{G} = [G_0, \dots, G_{L-1}]$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\sigma_0^2, \dots, \sigma_{L-1}^2\} \otimes \zeta$, 而 ζ 为衰落信道的时延自相关矩阵, 其第 (m, n) 个元素为 $\zeta[(m-n)T_s]$; 另外, 符号 \otimes 表示 Kronecker 积.

将 R_s 和 R_η 代入式(7), 就可计算 $\text{Cov}(z)Q$, 并对其作特征值分解. 从而判决变量 d 的特征函数可表示为

$$\psi_d(j\omega) = \prod_{p=1}^P \frac{1}{(1-j\omega\lambda_p)^{Q_p}} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^{Q_p} \frac{A_{p,q}}{(1-j\omega\lambda_p)^q} \quad (10)$$

其中 P 为矩阵 $\text{Cov}(z)Q$ 中相异特征值 λ_p 的个数, Q_p 为 λ_p 的重数; 而 $A_{p,q}$ 为部分分式展开系数, 并由下式给定

$$A_{p,q} = \frac{1}{(-\lambda_p)^{Q_p-q} (Q_p - q)!} \left[\frac{d^{(Q_p-q)}}{ds^{(Q_p-q)}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^P (1 - \lambda_i s)^{-Q_i} \right]_{s=1/\lambda_p} \quad (11)$$

从而, 误码率 P_e 可以表示为^[7]
$$P_e = \sum_{p:\lambda_p < 0} \sum_{q=1}^{Q_p} A_{p,q} \quad (12)$$

即为负特征值对应的部分展开式系数之和. 特别地, 当所有特征值都互不相同, $Q_p = 1, p = 1, \dots, P$, 而部分分式展开系数 $A_{p,q}$ 可以简化为

$$A_{p,q} = A_p = \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^P \frac{1}{1 - j\omega\lambda_q} \Big|_{\omega=1/(\lambda_p)} = \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^P \frac{1}{1 - \lambda_q/\lambda_p} \quad (13)$$

3 数值结果与分析

在这一节, 将通过一些数值结果来进一步研究时变多径 Rayleigh 衰落信道下的 MFB 性能. 假定多普勒频谱为广泛采用的 U 型谱或 Jakes 谱 $S(\nu) = (1/(\pi f_d)) / (1 - (\nu/f_d)^2)^{1/2}, |\nu| < f_d$, 其中 f_d 表示最大多普勒频率. 其时间自相关函数表示为

$$\zeta(\Delta t) = J_0(2\pi f_d \Delta t) \quad (14)$$

其中 $J_0(\cdot)$ 为第一类零阶 Bessel 函数. 调制类型均采用 QPSK.

图 1 给出了高斯脉冲 ($g(t) = (2/\sigma)^{1/4} \exp(-(\pi/\sigma)t^2)$)、半正弦脉冲 ($g(t) = (2/T_s)^{1/2} \sin(\pi t/T_s), 0 \leq t \leq T_s$) 以及矩形脉冲在指数多径时延功率分布和均匀多径时延功率分布下的误码率随信噪比变化的情况. 这里设定最大多普勒频率为 $f_d = 400$ Hz. 由图可见, 无论采用何种调制脉冲, 两种多径时延功率分布下的 BER 性能基本没有差别. 虽然高斯脉冲具有最好的能量时频聚集性, 但却具有最差的 MFB 性能; 而矩形脉冲具有最低的 BER, 说明它能取得最好的时间与频率分集.

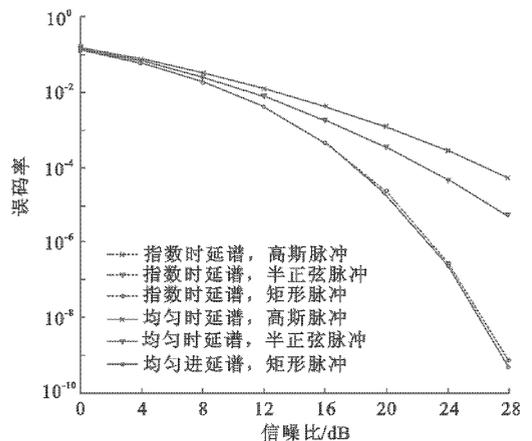


图 1 高斯脉冲、半正弦脉冲以及矩形脉冲在指数和均匀多径时延功率分布下的误码率随信噪比变化的情况

图 2 给出了半正弦脉冲与矩形脉冲在均匀多径时延功率分布下的 MFB 性能随最大多径时延 T_m 变化的情况。这里固定 $f_d = 400$ Hz 以及 SNR = 20 dB。由图可见,随着最大多径时延的增加,两种调制脉冲的误码率单调下降,说明它们均能有效地取得多径分集或频率分集,而且矩形脉冲尤为显著。

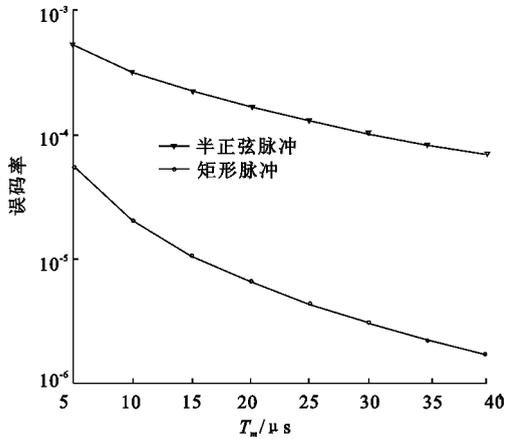


图 2 半正弦脉冲与矩形脉冲在均匀多径时延功率分布下的 BER 随最大多径时延 T_m 变化的情况

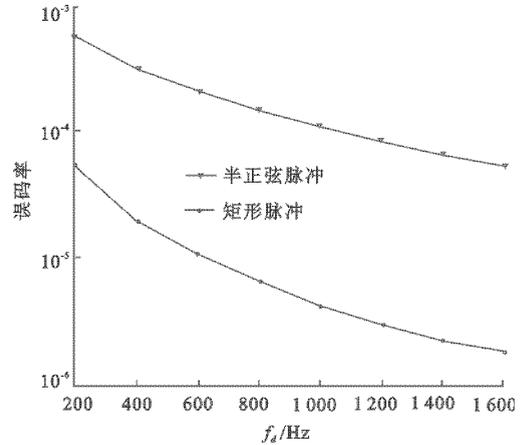


图 3 半正弦脉冲与矩形脉冲在均匀多径时延功率分布下的 BER 随最大多普勒频率 f_d 变化的情况

图 3 给出了半正弦脉冲与矩形脉冲在均匀多径时延功率分布下的 MFB 性能随最大多普勒频率 f_d 变化的情况。由图可见,它们具有与图 2 相似的现象,即随着最大多普勒频率的增大,两种调制脉冲的误码率单调下降。说明它们均能有效地取得时间分集或多普勒分集。

4 结束语

通过将判决变量表示成高斯随机矢量的二次形式,利用其特征函数推导了时变多径 Rayleigh 衰落信道下的 MFB 解析表达式。再利用该结果对几种有代表性的调制脉冲的 MFB 性能进行了比较。结果表明,虽然矩形脉冲具有很差的时频聚集性,却可以取得相对较好的时间与频率分集。另外,虽然文中 MFB 是针对为克服 ISI 的均衡技术问题而提出来的,它同样可以扩展到其它领域,如多用户检测问题中的多址干扰分析以及多载波信号传输中的子载波间干扰分析等。

参考文献:

- [1] Proakis J G. Digital Communications [M]. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [2] Ungerboeck G. Adaptive Maximum-likelihood Receiver for Carrier-modulated Data-transmission Systems [J]. IEEE Trans on Commun, 1974, 22(5): 624-635.
- [3] Ling F. Matched Filter-bound for Time-discrete Multipath Rayleigh Fading Channels [J]. IEEE Trans on Commun, 1995, 43(2/3/4): 710-713.
- [4] Clark M V, Greenstein L J. Matched Filter Bounds for Diversity Combining Receivers in Digital Mobile Radio [J]. IEEE Trans on Veh Tech, 1992, 41(4): 356-362.
- [5] Baas N J, Taylor D P. Matched Filter Bounds for Wireless Communication over Rayleigh Fading Dispersive Channels [J]. IEEE Trans on Commun. 2001, 49(9): 1525-1528.
- [6] Schwartz M, Bennet W R, Stein S. Communication Systems and Techniques [M]. NY: McGraw-Hill, 1966.
- [7] Barrett M J. Error Probability for Optimal and Suboptimal Quadratic Receivers in Rayleigh Fading Channels [J]. IEEE J Select Areas Commun, 1987, 5(2): 302-304.
- [8] Yang Peng, Ge Jianhua. Combination of Turbo Equalization and Turbo TCM with Low-complexity [J]. Journal of Xidian University, 2006, 33(3): 411-415.