2006年10月 西安电子科技大学学报(自然科学版) Oct. 2006
第33卷 第5期 JOURNAL OF XIDIAN UNIVERSITY Vol. 33 No. 5

用保角变换结合矩量法计算均匀波导的最低截止频率

朱满座, 梁昌洪
(西安电子科技大学 电子工程学院,陕西 西安 710071)

摘要: 建立了一种计算波导内TE和TM波最低截止频率的新方法,该方法使用保角变换将波导截面变换为圆形区域,再使用矩量法数值计算波导中正规波形TE和TM最低截止频率,可方便地找到满足边界条件的全域基函数.

关键词: 截止频率;保角变换;矩量法
中图分类号: TM151⁺.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2006)05-0709-02

A MoM calculation of the lowest cutoff frequencies of uniform waveguides by conformal mapping

ZHU Man-zuo, *LIANG Chang-hong*
(School of Electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: A new approach to the computation of the lowest cutoff frequencies of TE and TM models in uniform waveguides is presented, which uses the method of moment(MoM) combined with a conformal mapping. A conformal mapping is applied to transform the waveguides section onto the circle, and the lowest cutoff frequencies is calculated by the MoM. Comparisons with numerical results found in the literature validate the presented method.

Key Words: cutoff frequencies; conformal mapping; method of moment

均匀波导的截止频率除矩形、圆形、特殊的三角形(如等边三角形、等腰直角三角形、一个内角为$\pi/3$的直角三角形)、椭圆等规则形状可解析求解以外,一般都需数值求解. 分析波导截止频率的数值方法常常使用有限元法、有限差分法、变分法和矩量法等[1~5]. 笔者使用保角变换法结合矩量法,将波导截面通过数值或者解析的方法变换到圆形区域,再用矩量法在圆形区域内数值计算截止频率.

1 分析方法

均匀波导的截止波数k_c由亥姆霍兹方程确定:

$$\nabla_t^2 \psi + k_c^2 \psi = 0 \quad , \tag{1}$$

其中ψ分别是TE波和TM波的H_z和E_z, ∇_t是z平面的横向微分算子. 在波导的边界上,对TE波

$$\partial\psi/\partial n = 0 \quad , \tag{2}$$

对TM波

$$\psi = 0 \quad . \tag{3}$$

当用解析函数$z = f(w)$将z平面($z = x + \mathrm{i}y$)保角变换到w平面时,亥姆霍兹方程变化为

$$\nabla_T^2 \phi + k_c^2 |f'|^2 \phi = 0 \quad , \tag{4}$$

式中 ∇_T是w平面的横向微分算子,ϕ是变换以后相应的场纵向分量.

在变换以后,由于区域的边界形状规则,边界条件容易处理,这样就为矩量法计算时寻找全域基函数带

收稿日期:2005-11-16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(69931030)
作者简介:朱满座(1960-),男,教授.

来许多方便. 以下一律将原来问题的截面用解析法或者数值法变换为单位圆. 在圆形区域,选取满足边界条件的波函数作为基函数,将 ϕ 展开为基函数的线性组合,代入方程(4),选取权函数和基函数相同,使用伽辽金法数值求解这个方程,即可得到截止波数.

对于 TM 波最小截止波数,在 w 平面内($w = r\exp(\mathrm{i}\theta)$)选取波函数近似为 $\phi = \sum b_i\phi_i$,$\phi_i = (1 - r^{2i})$,将其代入方程(4),用 $\phi_j = (1 - r^{2j})$ 作为权函数,采用加权余量法数值求解方程(4),即在方程的左右两边同乘以权函数,并对波导的截面积分,得到本征值方程,求解该方程,可得出 TM 波的最低截止波数.

对于 TE 波,因为满足支配方程与边界条件的最低本征值是零,与其相应的波函数 ϕ_0 是一个常数,故在计算第一非零本征值时,所选取的波函数要与 ϕ_0 正交,所以在计算 TE 波的最低非零截止波数时,选取 $\phi_i = r\cos\theta(1 - r^{2i}/(2i+1))$.

对于和圆形波导里 TE_{01} 波类似的波形,其 H_z 仅仅是径向坐标的函数,展开时选取既与 ϕ_0 正交,又满足边界条件的基函数,即 $\phi_1 = 1 - 3r^2 + \dfrac{3}{2}r^4$, $\phi_i = 1 - \dfrac{1}{2}(i+1)(i+2)r^{2i} + \dfrac{i(i+2)}{2}r^{2i+1}$.

在求得最低非零本征值以后,后续的本征值对应的本征函数应该满足与低阶本征函数正交的条件,其本征值采用与最低非零本征值类似的方法计算.

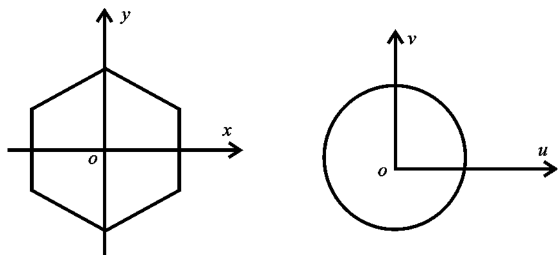

图 1 区域变换示意图

2 示例及计算结果

算例 1 求正多边形(边数为 n)波导的最低截止波数. 如图 1 所示,选取正多边形的中心在 z 平面的原点,设其内切圆的半径是 a_p,将其保角变换到 w 平面的单位圆内部的变换为[4]

$$z = a_p\left(\int_0^w [1+t^n]^{-2/n}\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^1 [1+t^n]^{-2/n}\,\mathrm{d}t\right) \quad . \tag{5}$$

式(5)将正多边形的某一个边上的中点变换到 $w = 1$,可将其表示成幂级数的形式[4]

$$z = a_p(C_1 w - C_2 w^{n+1} + C_3 w^{2n+1} - \cdots) \quad . \tag{6}$$

对于正方形($n = 4$),$C_1 = 1.0787$,$C_2 = 0.10787$,….

表 1 给出了正多边形($a_p = 1$)波导 TM 的最低截止波数(类似于圆形波导的 TM_{01}). 表 2 给出了 TE 波最低非零截止频率(类似于圆形波导的 TE_{11})的计算结果.

表 1 正多边形波导最低 TM 波的波数

边数 n	3	4	5	6	8	∞
笔者提出的方法	2.10280	2.22290	2.28250	2.31670	2.35270	2.40481
有限元法[4]	2.09600	2.22300	2.28300	2.31700	2.35300	2.40500
精确值	2.09440	2.22144				2.40483

表 2 正多边形波导 TE 波最低非零截止波数

边数 n	3	4	5	6	8	∞
笔者提出的方法	1.2125	1.5712	1.6978	1.7450	1.7892	1.8411
精确值	1.2092	1.5708				1.8412

算例 2 求半径等于 1 的半圆形波导的最低截止波数. 这个问题的截止波数本身有解析结果,为了检验笔者提出的方法的有效性,先用解析的方法将半圆区域变换到单位圆. 如图 2 所示,第 1 步先用分式线性变换将 z 平面的半圆变换到 ζ 平面的第一象限,即 $\zeta = -(z+1)/(z-1)$;第 2 步,用变换 $t = \zeta^2$ 将 ζ 平面的第一象限变换到 t 平面的上半平面;第 3 步,再使用分式线性变换 $w = (t-i)/(t+i)$ 将 t 平面的上半平面变换到 w 平面的单位圆盘. 整理得到最后的变换函数为 $w = ((z+1)^2 - i(z-1)^2)/((z+1)^2 + i(z-1)^2)$.

这个变换的逆变换为

(下转第 715 页)