

# 用于 MMSE 合并的受约束 LMS 算法分析

赵 力, 孙献璞, 张海林

(西安电子科技大学 通信工程学院, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 建立了受约束最小均方(LMS)算法,实现正交频分复用(OFDM)系统中分集信号的自适应最优(MMSE 准则)合并,解决了输入信号高度相关时传统自适应算法的收敛速度问题.对接收到的分集信号进行变换,使其具有相同的期望响应,然后并行送入自适应滤波器,在给定的约束条件下,完成分集信号的自适应最优合并.推导出的解析式表明,算法的收敛性能与输入信号的自相关矩阵无关,完全由归一化的步长参数控制.

**关键词:** 自适应最优合并;最小均方算法;正交频分复用

**中图分类号:** TN914.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-2400(2008)06-0973-05

## Analysis of a constrained LMS algorithm for MMSE combination

ZHAO Li, SUN Xian-pu, ZHANG Hai-lin

(School of Telecommunication Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** A Constrained least-mean-square (LMS) algorithm is proposed, which is used for an adaptive optimum combination (MMSE criterion) of diversity signals in orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) systems. Compared with the conventional algorithm, the proposed algorithm has no drawback of slow convergence speed when the input signals are highly correlated. Before the received diversity signals are fed to the adaptive filter, they are transformed to have the identical desired response. Then, the transformed signals are optimally combined in the adaptive filter subject to the proposed constraints. The derived analytical expressions indicate that regardless of the input signal correlation matrix, the convergence behavior of the proposed algorithm, in all cases, is only governed by the normalized step size.

**Key Words:** adaptive optimum combining; LMS algorithm; OFDM

正交频分复用(OFDM)是一种高效的多载波调制技术,它在多个子载波上并行传送数据,可以获得很高的数据速率,已被多种宽带无线通信系统采用.宽带系统中不可避免的频率选择性衰落会导致某些子载波在接收端的信噪比过低,为了提高通信的可靠性,宽带或者超宽带 OFDM 系统经常会采用分集方案,将相同的数据信息通过不同的子载波传送.

对接收到的分集信号,通常要先进行信道估计,以获得信道状态信息(CSI),然后按照某种方式合并,其中最小均方误差(MMSE)合并具有最好的性能<sup>[1]</sup>.而自适合并可以不需要 CSI,避免了信道估计误差的引入<sup>[2]</sup>.由于分集信号源于相同的数据信息,它们之间存在较强的相关性,这会使自适应滤波器输入信号自相关矩阵特征值的分散程度加剧,导致传统最小均方(LMS)算法的收敛性能恶化,一般不可用.

在文献[2]中,笔者提出将受约束 LMS 算法用于 OFDM 分集信号的最优(MMSE 准则)合并.文中对该算法做了简单的定性分析,仿真结果也显示该算法有良好的收敛特性,可以获得更高的合并性能.由于之前并无类似文献,该方法尚缺乏完整的理论支撑.为了解决这一问题,笔者从最优权值入手,将梯度向量与最优权值向量做对比分析,使收敛过程中每一步得到的权值(统计均值)都是最优权值乘以一个统一的系数,得出约束算法的收敛特性完全由归一化步长参数控制,而与输入信号的自相关矩阵无关,最后还给出了步长收敛

收稿日期:2008-06-17

基金项目:陕西省自然科学基金研究计划资助(2004F07)

作者简介:赵 力(1975-),男,西安电子科技大学博士研究生,E-mail: zhaoli@mail.xidian.edu.cn.

范围、时间常数等指标的解析式.

### 1 信号模型

设 OFDM 系统采用正交相移键控(QPSK)映射,  $M$  重分集. 考虑发送端的一个数据符号, 这个数据符号被映射为  $M$  个 QPSK 星座信号  $\{X_1(n), X_2(n), \dots, X_M(n)\}$ , 这里  $n$  表示 OFDM 符号的离散时间标号.  $\{X_1(n), X_2(n), \dots, X_M(n)\}$  进入快速傅里叶逆变换(IFFT)模块进行调制, 然后通过不同的子载波传送, 经过  $M$  条支路到达接收端. 这  $M$  条支路具有不同的频域信道参数, 具有频率分集的效果, 可以抵抗频率选择性衰落. 为简化分析, 设

$$X_1(n) = X_2(n) = \dots = X_M(n) = X(n) \quad (1)$$

设接收到的信号既没有符号间干扰(ISI)也没有载波间干扰(ICI). 经过快速傅里叶变换(FFT)模块的解调后,  $n$  时刻第  $m$  条分集支路上接收到的信号为

$$Y_m(n) = X(n)H_m(n) + N_m(n) \quad , \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

其中  $X(n)$  是一个复数, 其功率定义为  $E_s = |X(n)|^2$ ,  $|\cdot|$  表示取复数的模值;  $\{H_1(n), H_2(n), \dots, H_M(n)\}$  为子信道频域参数, 也是复数;  $\{N_1(n), N_2(n), \dots, N_M(n)\}$  是功率皆为  $\sigma^2$ 、互不相关的零均值加性高斯白噪声.

令  $\mathbf{Y}(n) = [Y_1(n), Y_2(n), \dots, Y_M(n)]^T$  表示输入向量,  $\mathbf{W}(n) = [W_1(n), W_2(n), \dots, W_M(n)]^T$  表示权值向量,  $\mathbf{H}(n) = [H_1(n), H_2(n), \dots, H_M(n)]^T$  表示信道参数向量. 这里所采用的方法是将  $\mathbf{Y}(n)$  直接送入自适应滤波器(如果式(1)不满足, 则  $\mathbf{Y}(n)$  需要经过适当的变换, 下面将有说明), 按照自适应的方式得到权值向量  $\mathbf{W}(n)$ , 完成分集信号的 MMSE 合并. 如图 1 所示, 加权合并信号和误差信号分别为

$$Z(n) = \mathbf{W}^H(n)\mathbf{Y}(n) \quad , \quad (3)$$

$$e(n) = X(n) - Z(n) \quad . \quad (4)$$

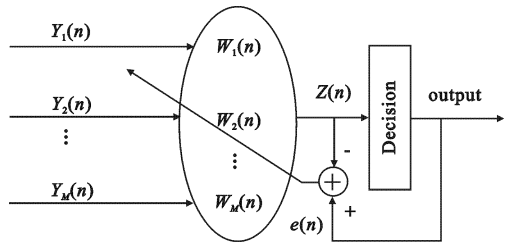


图 1 自适应最优合并信号模型

### 2 无约束条件的算法性能分析

众所周知, LMS 算法是一种随机梯度算法, 它使用瞬时梯度作为梯度的估计值进行迭代运算. 可以按照最陡下降法进行分析, 权值向量为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mu \mathbf{V}(n) \quad , \quad (5)$$

其中,  $\mu$  是一个小的正常数,  $\mathbf{V}(n)$  是均方误差的梯度向量, 且

$$\mathbf{V}(n) = \left[ \frac{\partial E[|e(n)|^2]}{\partial W_1(n)}, \frac{\partial E[|e(n)|^2]}{\partial W_2(n)}, \dots, \frac{\partial E[|e(n)|^2]}{\partial W_M(n)} \right]^T \quad , \quad (6)$$

其中  $E[\cdot]$  表示取统计均值. 这样  $\mathbf{W}(n)$  仅是  $\mathbf{Y}(0), \mathbf{Y}(1), \dots, \mathbf{Y}(n-1)$  的函数, 与  $\mathbf{Y}(n)$  不相关, 故

$$\frac{\partial E[|e(n)|^2]}{\partial W_m(n)} = \frac{\partial E[|X(n) - \mathbf{W}^H(n)\mathbf{Y}(n)|^2]}{\partial W_m(n)} = -2E[e^*(n)Y_m(n)] \quad , \quad m = 1, 2, \dots, M \quad , \quad (7)$$

其中  $(\cdot)^*$  表示对复数取共轭. 所以有

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu(\mathbf{P} - \mathbf{R}\mathbf{W}(n)) \quad , \quad (8)$$

$$\mathbf{P} = E[\mathbf{Y}(n)\mathbf{X}^*(n)] = E_s[H_1(n), H_2(n), \dots, H_M(n)]^T \quad , \quad (9)$$

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] = \begin{pmatrix} |Y_1(n)|^2 & \dots & Y_1(n)Y_M^*(n) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_1^*(n)Y_M(n) & \dots & |Y_M(n)|^2 \end{pmatrix} = E_s \begin{pmatrix} |H_1(n)|^2 + \frac{\sigma^2}{E_s} & \dots & H_1(n)H_M^*(n) \\ \vdots & & \vdots \\ H_1^*(n)H_M(n) & \dots & |H_M(n)|^2 + \frac{\sigma^2}{E_s} \end{pmatrix} \quad . \quad (10)$$

因为  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$ , 所以  $\mathbf{R}$  是一个埃尔米特矩阵, 可以认为它是正定的. 对  $\mathbf{R}$  进行酉相似变换可得:  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^H$ ;  $\mathbf{A}$  是一个对角阵, 对角元素为  $\mathbf{R}$  的特征值, 即  $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ . 按照 LMS 算法的收敛理论<sup>[3]</sup>, 式(8)的收敛的条件是  $[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{A}]^{n+1} \rightarrow 0$ , 其中  $\mathbf{I}$  是单位矩阵. 而  $[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{A}]^{n+1} \rightarrow 0$  的条件是  $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$ , 这样就会导致  $\mu\lambda_{\min}$  是一个较小的值,  $1/\mu\lambda_{\min}$  会变得比较大. 又因为  $1/\mu\lambda_m$  对应的是第  $m$  个自然模式对应的收敛时间常数, 所以相关矩阵  $\mathbf{R}$  的特征值扩散度  $\chi(\mathbf{R}) = \max(\lambda_m)/\min(\lambda_m)$  就决定了算法的收敛速度<sup>[3]</sup>.

求得  $\mathbf{R}$  的特征值的解析式是比较困难的, 但不妨以  $M = 2$  来观察  $\mathbf{R}$  的特征值分布情况. 可以求得  $\mathbf{R}_{M=2}$  的特征值为:  $\lambda_1 = |H_1(n)|^2 E_s + |H_2(n)|^2 E_s + \sigma^2, \lambda_2 = \sigma^2$ . 这时

$$\chi(\mathbf{R})_{M=2} = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} = (|H_1(n)|^2 E_s + |H_2(n)|^2 E_s + \sigma^2)/\sigma^2 \quad (11)$$

令  $|H_m(n)|^2 E_s/\sigma^2 = R_{SN_m}$  为第  $m$  条支路的接收信噪比, 则

$$\chi(\mathbf{R})_{M=2} = R_{SN_1} + R_{SN_2} + 1 \quad (12)$$

说明输入信噪比越高, 则算法将会收敛得越慢. 这就解释了为什么输入信号之间的相关性会导致收敛性能恶化. 在实际情况中, 每一帧 OFDM 信号中所能提供的训练信号通常是很有有限的, 即使不考虑其他因素, LMS 算法也无法直接应用于分集信号的 MMSE 合并.

### 3 约束条件下的快速收敛算法

#### 3.1 理论最优权值

按照 MMSE 准则, 将式(2)~(4), (7)代入式(6)并令  $\mathbf{V}(n) = \mathbf{0}$ , 经过比较复杂的推导, 可以得到<sup>[4]</sup>

$$[\mathbf{W}(n)]_{\text{opt}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^M |H_k(n)|^2 + \sigma^2/E_s} \mathbf{H}(n) \quad (13)$$

这也就是  $n$  时刻理论上的最优权值向量. 将式(13)中的向量展开就可以发现, 每一个最优权值  $(W_m(n))_{\text{opt}}$  是对应信道参数  $H_m(n)$  乘以一个系数, 而这个系数对于每一条支路都是相同的, 下面的分析主要是利用这个特点.

#### 3.2 约束条件分析

在实际的运算过程中, 用  $|e(n)|^2$  替代  $E[|e(n)|^2]$  作为估计值, 则梯度向量的估计值为

$$\hat{\mathbf{V}}(n) = \left[ \frac{\partial |e(n)|^2}{\partial W_1(n)}, \frac{\partial |e(n)|^2}{\partial W_2(n)}, \dots, \frac{\partial |e(n)|^2}{\partial W_M(n)} \right]^T = -2[e^*(n)Y_1(n), e^*(n)Y_2(n), \dots, e^*(n)Y_M(n)] \quad (14)$$

这是一个无偏估计量<sup>[3]</sup>. 则权值向量的迭代公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu[\mathbf{X}(n) - \mathbf{W}^H(n)\mathbf{Y}(n)]^* \mathbf{Y}(n) \quad (15)$$

从上面的分析知道, 输入信号的高度相关会使收敛过程非常缓慢. 为了找出快速收敛条件, 令

$\hat{\mathbf{V}}(n) = [\hat{v}_1(n), \hat{v}_2(n), \dots, \hat{v}_M(n)]^T$ , 对  $\hat{v}_m(n)$  做展开分析

$$\hat{v}_m(n) = -2[X^*(n) - \mathbf{Y}^H(n)\mathbf{W}(n)]Y_m(n) \quad , \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (16)$$

考虑到从  $\mathbf{W}(0), \mathbf{W}(1), \dots, \mathbf{W}(l), \dots, \mathbf{W}(n)$  这个迭代过程中,  $\mathbf{W}(l)$  是随机变量. 对  $\hat{v}_m(l)$  取统计平均, 可得到

$$E[\hat{v}_m(l)] = -2E_s H_m(l) + 2E_s H_m(l) \sum_{k=1}^M E[W_k(l)] H_k^*(l) + 2\sigma^2 E[W_m(l)] \quad (17)$$

从 3.1 节可知, 最优权值  $(W_m(n))_{\text{opt}} = H_m(n) / (\sum_{k=1}^M |H_k(n)|^2 + \sigma^2/E_s)$  是其对应的信道参数  $H_m(n)$  的齐次线性函数, 且系数与支路标号  $m$  无关. 笔者的目标是让迭代过程中每一步得到的权值(统计均值)都是最优权值的齐次线性函数, 这样算法就能快速收敛到最优权值附近. 这就要求式(17)中的每一项都是  $H_m(n)$  的齐次线性函数. 显然, 只有满足

$$H_m(0) = H_m(1) = \dots = H_m(n) \quad , \quad (18)$$

即信道参数在迭代过程中无变化, 这个目标才有可能实现. 这时, 式(17)中的第 1 项满足条件; 第 2 项和第 3

项与  $W_k(l)$  有关,需要加上某些约束条件. 接下来的信道参数记为  $H_m$ , 最优权值记为  $(W_m)_{\text{opt}}$ . 提出下面的假设

$$E[W_m(l)] = \beta(l)H_m, \quad (19)$$

其中  $\beta(l)$  是一个与  $m$  无关的系数. 如果这个假设成立, 并将式(18)代入式(17)可得

$$E[\hat{V}_m(l)] = \left[ -2E_s + 2E_s\beta(l) \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 \right) + 2\sigma^2\beta(l) \right] H_m. \quad (20)$$

这样  $E[\hat{V}_m(l)]$  就成为  $H_m$  得齐次线性函数. 下面分析式(19)成立的条件. 考虑到

$$W_m(n+1) = W_m(n) - \mu \hat{V}_m(n) = W_m(0) - \mu \sum_{l=0}^n \hat{V}_m(l). \quad (21)$$

所以, 要让式(19)成立, 初始权值  $W_m(0)$  必须设置为零, 即

$$W_m(0) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (22)$$

这样, 可以确定  $\beta(0) = 0$ , 并从式(17)可得  $E[\hat{V}_m(0)] = -2E_s H_m$ . 通过联立方程组

$$\begin{cases} E[\hat{V}_m(0)] = -2E_s H_m, & (23a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[W_m(l)] = -\mu \sum_{s=0}^{l-1} E[\hat{V}_m(s)], & (23b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[W_m(l)] = \beta(l)H_m, & (23c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[\hat{V}_m(l)] = \left[ -2E_s + 2E_s\beta(l) \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 \right) + 2\sigma^2\beta(l) \right] H_m, & (23d) \end{cases}$$

求其余  $\beta(l)$  过程如下: 将式(23a)代入式(23b), 可以得到  $E[W_m(1)]$  是  $H_m$  的齐次线性函数, 这样在  $l=1$  时式(23c)的假设是成立的, 并且可以得到  $\beta(1)$ , 再将  $\beta(1)$  代入式(23d), 得到的  $E[\hat{V}_m(1)]$  也是  $H_m$  的齐次线性函数. 重复这个过程, 就可以得到  $l \geq 1$  时  $\beta(l)$  的值是  $H_m$  的齐次线性函数. 又因为  $\beta(0) = 0$ , 所以  $E[W_k(l)] = \beta(l)H_k$  成立.

下面证明  $\beta(n)$  收敛后  $E[W_m(n)]$  与  $(W_m)_{\text{opt}}$  等价. 将式(20), (22)代入式(21)可得

$$E[W_m(n+1)] = 2\mu E_s H_m \sum_{l=0}^n \left[ 1 - \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 \right) \beta(l) - \sigma^2/E_s \cdot \beta(l) \right]. \quad (24)$$

$$\text{所以} \quad \beta(n+1) = 2\mu E_s \sum_{l=0}^n \left[ 1 - \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 \right) \beta(l) - \sigma^2/E_s \cdot \beta(l) \right]. \quad (25)$$

$$\text{经过变形后可得} \quad \beta(n+1) = \beta(n) + 2\mu E_s \left[ 1 - \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2/E_s \right) \beta(n) \right]. \quad (26)$$

当算法收敛时  $\beta(n+1) = \beta(n)$ , 这时

$$1 - \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2/E_s \right) \beta(n) = 0. \quad (27)$$

定义  $\beta_0$  为  $\beta(n)$  的最终收敛值, 则

$$\beta_0 = 1 / \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2/E_s \right). \quad (28)$$

将式(28)代入式(19), 得到的结果与式(13)中给出的理论最优权值(应用条件式(18))完全相同. 这就证明了每一次迭代,  $E[W_m(l)]$  都是最优权值的齐次线性函数, 且最终收敛于最优权值.

从推导过程来看, 式(1), (18), (22)给出的约束是必要的. 将约束条件所对应的物理条件总结如下: (1) 输入自适应滤波器的每一条支路信号具有相同的期望输出  $X(n)$ , 这是自适应合并的前提条件; (2) 在一帧信号时间内, 信道参数基本无变化, 而下一帧重新开始训练, 这在如 MB-OFDM 等高数据速率系统中是合理的; (3) 权值的初始值置零. 从文献[2]可知, 算法对式(1)的要求并不是很严, 接收到的分集信号经过某种变换后具有期望输出  $X(n)$  也是可以的, 这里不做详细说明.

### 3.3 约束条件下的算法性能分析

定义第  $m$  个权值在时刻  $l$  的递进量为  $\Delta(W_m(l)) = E[W_m(l+1)] - E[W_m(l)]$ , 从式(24)可以求得

$$\Delta(W_m(l)) = 2\mu E_s H_m \left[ 1 - \left( \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2 / E_s \right) \beta(l) \right] \quad (29)$$

再将式(28)代入可得 
$$\Delta(W_m(l)) = 2\mu E_s H_m [1 - \beta(l) / \beta_0] \quad (30)$$

所以有 
$$\frac{\Delta(W_m(l))}{(W_m)_{\text{opt}} - E[W_m(l)]} = \frac{\Delta(W_m(l))}{\beta_0 H_m - \beta(l) H_m} = \frac{2\mu E_s}{\beta_0} \quad (31)$$

$$\frac{(W_m)_{\text{opt}} - E[W_m(l+1)]}{(W_m)_{\text{opt}} - E[W_m(l)]} = \frac{(W_m)_{\text{opt}} - E[W_m(l)] - \Delta(W_m(l))}{(W_m)_{\text{opt}} - E[W_m(l)]} = 1 - \frac{2\mu E_s}{\beta_0} \quad (32)$$

式(32)说明权值误差  $((W_m)_{\text{opt}} - E[W_m(l)])$  按照  $(1 - 2\mu E_s / \beta_0)^l$  衰减,具有指数特性.其收敛的条件为  $|1 - 2\mu E_s / \beta_0| < 1$ ,解不等式并将  $\beta_0$  展开可得

$$0 < \mu < 1 / \left( E_s \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2 \right) \quad (33)$$

即  $\mu$  取一个小于输入信号能量倒数的值即可保证权值收敛.  $2\mu E_s / \beta_0 \ll 1$  时,权值误差衰减的时间常数(权值误差衰减为其初始值的  $1/e$  时需要的迭代次数,  $e$  是自然对数的底)近似为

$$\tau_c = 1 / \left( \frac{2\mu E_s}{\beta_0} \right) = \frac{1}{2\mu \left( E_s \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2 \right)} \quad (34)$$

可以近似认为  $(E_s \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2)$  是输入信号的总能量,对步长参数  $\mu$  进行归一化处理:  $\mu =$

$\tilde{\mu} / (E_s \sum_{k=1}^M |H_k|^2 + \sigma^2)$ , 则

$$\tau_c = 1 / 2\tilde{\mu} \quad (35)$$

其中  $\tilde{\mu}$  是一个小的正常数.这说明受约束的 LMS 算法每个权值收敛的时间常数相同,且完全受归一化的步长参数控制,不受输入信号之间相关性的影响.

## 4 结 束 语

分集信号的 MMSE 合并是自适应滤波器的一种新的应用,具有突出的优点.首先,LMS 算法本身有很低的运算复杂度;其次,与传统的合并方法相比,无需信道状态信息,也就避免了信道估计误差对合并性能的影响;最后,还可以根据收敛权值得到各分集子信道的信道状态,提供给系统的其他环节使用.

### 参 考 文 献:

- [1] Clark M V. MMSE Diversity Combining for Wide-Band Digital Cellular Radio [J]. IEEE Trans on Communications, 1992, 40(6): 1128-1135.
- [2] 赵力, 孙献璞, 张海林. MB-OFDM UWB 系统的自适应联合均衡方案[J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(3): 377-382.  
Zhao Li, Sun Xianpu, Zhang Hailin. Adaptive Joint Equalization for MB-OFDM UWB Systems [J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(3): 377-382.
- [3] Haykin S. Adaptive Filter Theory [M]. 4th Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2002.
- [4] Traverso S. Improved Equalization for UWB Multiband OFDM [C]//Information and Communication Technologies, ICTTA 06. 2nd. Kandahar: IEEE, 2006: 2634-2638.

(编辑: 齐淑娟)