

文章编号:1001-9081(2006)05-1045-03

基于样条模型插值在科学可视化上的应用

杨一山, 顾耀林

(江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214122)

(yys13yys@yahoo.com.cn)

摘要:提出了一个模型插值来重建三维图像的方法。该模型以样条基函数为背景,系数则由周围采样点数据重复迭代产生。实验表明该方法的逼近效果明显优于传统的线性插值拟合得出的图像质量。

关键词:样条模型;插值;梯度;科学可视化

中图分类号:TP391.41 **文献标识码:**A

Scientific visualization with spline interpolation model

YANG Yi-shan, GU Yao-lin

(College of Information Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: A new approach for reconstructing 3D image was proposed. As a model, spline interpolation on a uniform tetrahedral partition was used, and the spline coefficients were repeated by the gridded samples. The results confirm the efficiency of method and demonstrate high visual quality for rendering isosurfaces.

Key words: spline model; interpolation; gradient; scientific visualization

0 引言

插值方法以及插值基函数的选择是可视化技术研究^[1]的一个关键问题。重构数据场的插值方法绝大多数都是基于多项式插值^[2,3](如三次线性插值,双三次线性插值),这种插值方法在处理数据点分布较规则或均匀的数据场时取得了很好的效果。但是,随着科学计算的发展,尤其是在磁共振(MRI)仪、计算机断层成像(CT)仪等医学领域,人们对数据的精度、重建图像显示的效果几乎达到了苛刻的地步。因此,寻求新的插值方法、选择性能优良的插值函数,将有助于推进科学计算可视化技术在这些领域研究的发展。

为了进一步完善图像的三维重建理论及提高其重建的图像质量,本文以规则数据场(如MRI,CT)为研究背景,提出了一个新模型,借助于计算机辅助设计中的样条基函数,同时考虑到体数据周围点的相关性,利用重复迭代的思想来构造了基函数的样条系数。

1 样条模型

1.1 模型建立

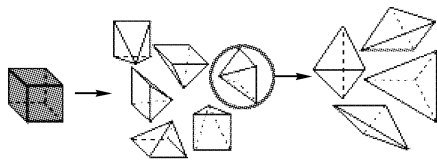


图1 24等分过程

对于任意一个立方体网格单元,首先将其分解为6个四棱锥,四棱锥的顶点在立方体的中心点。然后对每个四棱锥进行分解,四棱锥的顶点和底面的两条对角线形成的两个平面把该四棱锥又分解为4个小四面体^[4]。这样就将一个单位长的立方体分解为24个相同,且可以光滑拼接的小四面体(分解过程如图1所示),我们标记每一个小四面体为 Δ 。

对于任意一个四面体 Δ ,以四个顶点外加六条边的中点作为样条的控制点,则任一基于二次的样条,它的 Bernstein-Bezier^[5,6]形式可以定义如下:

$$p = s|_T = \sum_{i+j+k+l=2} a_{i,j,k,l} B_{i,j,k,l} \quad (1)$$

其中:

$B_{i,j,k,l} = \frac{2!}{i!j!k!l!} \lambda_0^i \lambda_1^j \lambda_2^k \lambda_3^l$; $a_{i,j,k,l} \in IR$ 是 Bernstein-Bezier 多项式的系数; $i+j+k+l=2$ (这里我们选为2次); $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是四面体的重心坐标。

在四面体 $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ 中,体内的任意一点 q , 它的重心坐标都可以表示成如下一个 4×4 线性方程组:

$$\lambda_0(q) \begin{pmatrix} v_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1(q) \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2(q) \begin{pmatrix} v_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3(q) \begin{pmatrix} v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 v_0, v_1, v_2, v_3, q 均为点的向量表示。

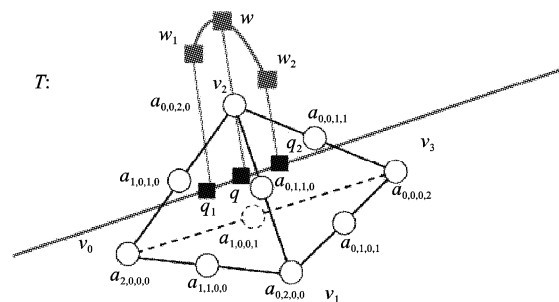


图2 Δ 及其系数分布

由以上的24等分分割过程及模型上的点的取值手法可以知道:一个单位立方体的外表面分布了50个控制点(如图3(a)),分别是顶点8个,每个面上5个,最后加上12条边的中点;内部由两部分组成:一部分是一个小的正方体(如图3(b)),它包含的点的个数为14个,其中顶点8个,还有就是6个面上对角线的交点;最后就是1个单位立方体的中点。

收稿日期:2005-11-17;修订日期:2006-02-27

作者简介:杨一山(1981-),男,江苏常州人,硕士研究生,主要研究方向:计算机图形学、软件集成;顾耀林(1948-),男,江苏无锡人,教授,主要研究方向:计算机图形学、虚拟现实、软件集成。

1.2 模型系数

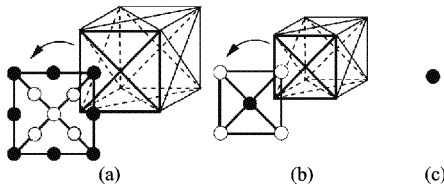


图3 立方体上点的分布

假设网格上的体数据的函数为 $f \in C(\Omega^*)$, 其中 $\Omega^* = [-h, 1+h] \times [-h, 1+h] \times [-h, 1+h]$, 其中 h 为体分隔的层数。则在 (i, j, k) 点的函数值为:

$$f_{(i,j,k)} := f((2i+1, 2j+1, 2k+1) \frac{h}{2})$$

其中 $i, j, k = -1, \dots, n_0$ 。为了方便期间做了如下的定义:

$$\pi_1(a, b, c) := (a, b, c)$$

$$\pi_2(a, b, c) := (b, a, c)$$

$$\pi_3(a, b, c) := (b, c, a)$$

$$\mu \in \{1, 2, 3\}$$

对于原始立方体上 12 条边的中点的函数值, 由于该点与空间的 4 个体素相关, 于是可定义为:

$$a_{[\rho, \sigma, \tau]} = (f_{(i,j,k)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\alpha,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,\beta)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\alpha,\beta)})/4$$

其中 $[\rho, \sigma, \tau] = \pi_\mu(2, 2+2\alpha, 2+2\beta)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$ 。

对于原始立方体上的 8 个顶点, 它们每一个都与空间的 8 个体素相关, 于是可以定义为:

$$a_{[\rho, \sigma, \tau]} = (f_{(i,j,k)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\beta,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,\beta)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\beta,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\beta,\beta)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\beta,\beta)})/8$$

其中 $[\rho, \sigma, \tau] = \pi_\mu(2+2\alpha, 2+2\beta, 2+2\beta)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$ 。

由几何关系, 平均立方体上共用顶点的每两条边上的中点的函数值, 可以求得图 3(a) 中对角线上除交点的 4 个点, 称之为 * 类点, 它们的函数值为:

$$a_{[\rho, \sigma, \tau]} = (2f_{(i,j,k)} + 2f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\beta,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,\gamma)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\beta,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,\gamma)})/8$$

其中 $[\rho, \sigma, \tau] = \pi_\mu(2+2\alpha, 2+\beta, 2+\gamma)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 1\}$ 。

在立方体上的每个面上, 通过平分该面上共线的两个 * 类点, 或者 1/4 划分每个面上的 4 个 * 类点, 可以求得立方体上的面中点值为:

$$a_{[\rho, \delta, \tau]} = (4f_{(i,j,k)} + 4f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,-1,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,1,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,-1)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,1)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,-1,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,1,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,-1)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,1)})/16$$

其中 $[\rho, \sigma, \tau] = \pi_\mu(2+2\alpha, 2, 2)$, $\alpha \in \{-1, 1\}$ 。

在 24 等分分隔的过程中, 立方体内部分隔出来的小立方体(图 3(b)) 的 8 个角顶点的函数值为:

$$a_{[\rho, \sigma, \tau]} = (5f_{(i,j,k)} + 3f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,0)} + 3f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\beta,0)} + 3f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,\beta)} + 3f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\beta,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\beta,0)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,\beta)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\beta,\beta)} - f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\beta,\beta)})/16$$

其中 $[\rho, \sigma, \tau] = \pi_\mu(1+\alpha, 1+\beta, 1+\beta)$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$ 。

内部小立方体(图 3(b)) 的 6 个面的面中点的函数值为:

$$a_{[\rho, \sigma, \tau]} = (20f_{(i,j,k)} + 12f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,0)} + 6f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\alpha,0)} + 6f_{(i,j,k)+\pi_u(0,-\alpha,0)} + 6f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,\alpha)} + 6f_{(i,j,k)+\pi_u(0,0,-\alpha)} + 2f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\alpha,0)} +$$

$$2f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,-\alpha,0)} + 2f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\alpha,-\alpha)} + 2f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,-\alpha)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\alpha,\alpha)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,-\alpha,\alpha)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,\beta)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,-\alpha,\alpha)} + f_{(i,j,k)+\pi_u(0,-\alpha,-\alpha)} - f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\alpha,\alpha)} - f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,\alpha,-\alpha)} - f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,-\alpha,\alpha)} - f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,-\alpha,-\alpha)})/64$$

其中 $[\rho, \sigma, \tau] = \pi_\mu(1+\alpha, 1, 1)$, $\alpha \in \{-1, 1\}$ 。

最后, 单位立方体的中心点 v_q 的函数值为:

$$a_{[v_q]} = \left\{ 40f_{(i,j,k)} - f_{(i-1,j-1,k-1)} - f_{(i+1,j+1,k+1)} + \sum_{\mu=1}^3 \left[\sum_{\alpha \in \{-1,1\}} (12f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,0,0)} - f_{(i,j,k)+\pi_u(\alpha,-\alpha,-\alpha)}) + \sum_{\alpha, \beta \in \{-1,1\}} 2f_{(i,j,k)+\pi_u(0,\alpha,\beta)} \right] \right\} / 128$$

这样借助体素周围点的函数值, 同时借助重复迭代的思维就可以确定所有的 Bernstein-Bezier 系数, 这其中需要与常数的 66 次乘法, 以及体元数据本身的 121 次加法。由于样条本身具有的高度的逼近效果和高效性, 外加系数的确定是由周围点表示, 所以我们可以利用周围数据的相关性来很好的重建和逼近体数据。

1.3 多项式的梯度

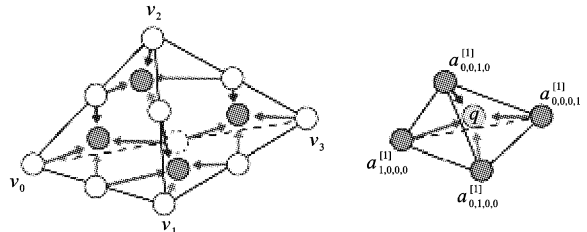


图4 de Casteljau 算法的几何意义

任一基于公式(1) 的多项式 $p = s|_T \in P$, 在本文的样条模型中, 它的 de Casteljau 算法^[7] 表示为(如图 4):

$$a_{i,j,k,l}^{[l]} = \lambda_0(q) a_{i+1,j,k,l}^{[l-1]} + \lambda_1(q) a_{i,j+1,k,l}^{[l-1]} + \lambda_2(q) a_{i,j,k+1,l}^{[l-1]} + \lambda_3(q) a_{i,j,k,l+1}^{[l-1]}$$

其中 $a_{i,j,k,l}^{[0]} = a_{i,j,k,l}$, $l = 1, 2$ (1 表示为一次递归, 2 为两次递归)。该算法需要 20 次乘法, 以及 15 次的加法来确定在 q 点的函数值 p 。

同时在分隔过程中, 可以借助梯度^[8] 来更好的显示体元, 表达体元的一些隐藏图像信息:

$$(\nabla p)(q) = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)(q), \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)(q), \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)(q) \right)$$

假设 δ_v 为 (v_{v+1}, v_0) 方向的向量, 长度为 $\|v_{v+1}, v_0\|$, 则 p 在 δ_v 方向上的导数定义为:

$$\frac{\partial p}{\partial \delta_v} = 2 \sum_{i+j+k+l=1} (a_{i,j+k,l} - a_{i+1,j,k,l}) \lambda_0^i \lambda_1^j \lambda_2^k \lambda_3^l$$

其中 $(j_v, k_v, l_v) = (\delta_{v,\mu})_{\mu=0,1,2}$;

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha_0 \frac{\partial p}{\partial \delta_0} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial \delta_1} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial \delta_2}$$

则 $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial z}$ 可以此类推求得。

2 实验结果

实验中利用光线投影算法重点分析了一组基于测试信号:

$$\rho(x, y, z) = \frac{1 - \sin(\pi z/2) + \alpha(1 + \rho_\gamma(\sqrt{x^2 + y^2}))}{2(1 + \alpha)}$$

的等值面显示,其中 $\rho_\gamma(\gamma) = \cos\left(2\pi f_M \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right)$;

采样的信号是基于 $40 \times 40 \times 40$ 的体单元,其中 $-1 < x; y, z < 1; f_M = 6, \alpha < 0.25$, 我们选取等值面 $\rho(x, y, z) = 0.5$ 。

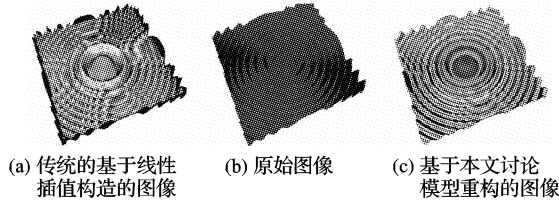


图 5 光线投射法下的等值面图

从图 5 三幅重建图像的比较中,我们可以很清晰地比较出图 5(c) 明显优于图 5(a), 其中图 5(b) 为原始图像。

同时在本文中,随着分隔层数 H 的变化,显示图像的效果也会有所不同。 H 越小,图像粗糙度越明显;随着 H 的不断变大,图像会越来越清晰。从数学的角度出发,本文列出了 H 在不同取值下的各种误差对应情况(表 1), 我们可以很清晰地得出随着 H 的增大,我们各种误差会越来越小,几乎达到原始的效果。

表 1 误差分析表

H (单位立方体的分割层数)	err_{mean}^{ml} (平均误差)	err_{rms}^{ml} (均方差)	err_{max}^{ml} (最大误差)
16	0.0637338	0.0763573	0.1794933
32	0.0469557	0.0548679	0.1202057
64	0.0175995	0.0206885	0.0395824
128	0.0049393	0.0058288	0.0105322
256	0.0012735	0.0015042	0.0026710

3 结语

针对规则数据场的重建的研究,提出了一种基于样条模

(上接第 1036 页)

随机噪声 (speckle 噪声)、高斯噪声和椒盐噪声并进行测试。在实验中,各种算法的阈值都和加噪声时一样保持不变。其中 speckle 噪声的均值为零,方差为 0.005;高斯噪声均值为零,方差为 0.001;椒盐噪声的强度为 0.01。

从图 5 中我们可以看出,对于 speckle 噪声,本文算法的边缘检测效果要明显优于 Roberts 算法和 Prewitt 算法。在阈值不变的情况下,Roberts 算法变得非常模糊,Prewitt 算法虽然整体检测性能和本文算法差不多,但在某些区域对噪声的抑制比较差,如图像右下角区域存在较大的噪声。对于高斯噪声,本文算法和 Prewitt 算法的检测效果差不多,但要优于 Roberts 算法。对含椒盐噪声图像,Prewitt 检测出来的每一个噪声点都包含噪声周围的四个像素,所以从图像可以看出它的检测结果中噪声非常明显,而本文算法和 Roberts 算法所检测出来的图像中对每个椒盐噪声点都只有单像素,效果要好很多。

从仿真结果可以看出,本文算法抗 speckle 和高斯噪声性能较好,抗椒盐噪声的性能还不够理想。但是,本文所提出的边缘检测方法在检测精度,抗噪声方面都优于传统的边缘检测方法。

4 结语

本文通过引入灰色系统的灰色关联度理论,并把它与 Sobel 算子相结合,提出了一种新的边缘检测新方法。通过仿真实验表明,该方法检测精度较高,抗噪声能力较强。

型重建的方法。该方法充分利用了数据场周围点的相关性及其梯度来重建采样点,给出的实验结果和数据分析表表明本方法能很好提高体绘制的质量。

既然本文是在基于规则数据场中讨论图像的重建,那么在大规模的散乱数据场^[9]中的应用也将是本文进一步研究的课题。由于本文是用逼近的思想来重建图像,那么数据的压缩也是未来可以研究的一个课题。合理的数据结构设计也将大大改进该方法的运行速度和占有的存储容量。

参考文献:

- [1] THEUSL T, MOLLER T, HLADUVKA J, *et al.* Reconstruction issues in volume visualization[Z]. *Data Visualization: The State of the Art*, 2003. 109 - 126.
- [2] CARR H, MOLLER T, SNOEYINK J. Simplicial Subdivisions and Sampling Artifacts[A]. *Proc. IEEE Visualization[C]*, 2001. 99 - 106.
- [3] BARTHE L, MORA B, DODGSON N, *et al.* Triquadratic Reconstruction for Interactive Modelling of Potential Fields[A]. *Proc. Shape Modeling Int'l 2002[C]*, 2002. 145 - 153.
- [4] GERSTNER T, RUMPF M. Multiresolutional Parallel Isosurface Extraction Based on Tetrahedral Bisection[A]. CHEN M, KAUFMAN A, YAGEL R, ed. *Volume Graphics[C]*, 2000. 267 - 278.
- [5] DE BOOR C. "B-Form Basics" In *Geometric Modelling* [A]. FARIN G, ed. *SIAM[C]*, 1987. 131 - 148.
- [6] CHUI C. *Multivariate Splines*[A]. *CBMS 54, SIAM[C]*, 1988.
- [7] DE CASTELJAU P. *Courbes et Surfaces a Poles*[Z]. Andre Citroen, Automobiles SA, Paris, 1963.
- [8] THEVENAZ P, UNSER M. High-Quality Isosurface Rendering with Exact Gradients[A]. *Proc. Int'l Conf. Image Processing (ICIP '01) 2001[C]*, 2001. 854 - 857.
- [9] HABER J, ZEILFELDER F, DAVYDOV O, *et al.* Smooth Approximation and Rendering of Large Scattered Data Sets [A]. *Proc. IEEE Visualization 2001[C]*, 2001. 341 - 347.

本文所加的噪声都比较小,如果噪声进一步提高则在边缘检测之前要先对图像进行平滑滤波。灰色系统理论在图像处理中的应用还只是处于刚刚起步的阶段,而把经典的 Sobel 算子和灰色关联度相结合进行图像的边缘检测更是一次大胆的尝试,这方面的理论还有待于进一步的完善和提高。

参考文献:

- [1] 陆宗骥, 梁诚. 用 Sobel 算子细化边缘[J]. *中国图象图形学报*, 2000, (6): 516 - 520.
- [2] 王爱民, 赵忠旭, 沈兰荪. 基于矢量 Prewitt 算子的多尺度彩色图像边缘检测方法[J]. *中国图象图形学报*, 1999, (12): 1024 - 1028.
- [3] 李小红. 基于 LOG 滤波器的图像边缘检测算法的研究[J]. *计算机应用与软件*, 2005, (5): 107 - 108.
- [4] 王植, 贺赛先. 一种基于 canny 理论的自适应边缘检测方法[J]. *中国图象图形学报*, 2004, (8): 957 - 962.
- [5] 夏明革, 何友, 苏峰, 黄晓冬. 一种基于小波多尺度边缘检测的图像融合算法[J]. *电子与信息学报*, 2005, (1): 56 - 59.
- [6] 李映, 焦李成. 基于自适应免疫遗传算法的边缘检测[J]. *中国图象图形学报*, 2003, (8): 890 - 895.
- [7] 马苗, 樊养余, 谢松云. 基于灰色系统理论的图像边缘检测新算法[J]. *中国图象图形学报*, 2003, (10): 1136 - 1139.
- [8] 邓聚龙. *灰色系统基本方法*[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996.
- [9] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. *灰色系统理论及其应用*[M]. 北京: 科学出版社, 1999.