

螺旋锥齿轮六轴五联动数控加工模型^{*}

陈书涵 严宏志 明兴祖 谢耀东

【摘要】 基于空间坐标变换原理,研究了六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床的运动规律,并建立了机床的加工坐标系;分析了由传统机床调整参数转换为六轴五联动数控机床调整参数的原理并提出了螺旋锥齿轮六轴五联动数控加工数学模型。此外,根据传统机床的大轮展成加工方法,推导出六轴五联动螺旋锥齿轮机床大轮展成法加工原理。最后根据实例计算,并得到了5个联动轴加工时的瞬时位置以及与时间的四阶表达式。

关键词: 螺旋锥齿轮 六轴五联动 加工模型 转换原理 展成法

中图分类号: TG596; TG580.1

文献标识码: A

Spiral Bevel Gear's Numerical Control Machining Model with Six Axes Five Linkages

Chen Shuhan¹ Yan Hongzhi¹ Ming Xingzu¹ Xie Yaodong²

(1. South Central University, Changsha 410083, China

2. Zhuzhou Limited Liability Company of Gear, Zhuzhou 412000, China)

Abstract

Based on the space coordinates transformation principle, the movement rules of the numerical controls spiral bevel gear machine with six axes five linkages were studied, and the machine machining coordinate systems were established. The principle was analyzed from the traditional machine to the numerical controls machine with six axes five linkages and its numerical control mathematical model was proposed. Moreover, according to the gear generating method of traditional machine, the gear generating machining principle of the spiral bevel gear with six axes five linkages was established. Finally, according to the example computation, the instantaneous locations and fourth-order expressions with the time were obtained when five linkage axes machining.

Key words Spiral bevel gear, Six axes five linkages, Machining model, Transformation principle, Generated method

引言

机械式螺旋锥齿轮加工机床结构复杂,加工调整非常繁杂,对操作人员的技能要求较高,齿轮加工周期较长。然而,对于已经习惯于机械式铣齿机加工调整的操作人员,展成运动不直观的CNC机床使

用起来很不方便。更为重要的是,建立在机械式机床上成熟的齿轮加工理论和获得的丰富经验也不能直接应用于CNC机床上。因此,需要解决两类机床的参数转换问题。国内外有许多学者对此进行了研究,都是通过两次矢量旋转实现的^[1~3]。本文从另一种途径对六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床展成法

收稿日期:2008-02-18

^{*} 国家“973”重点基础研究发展计划资助项目(项目编号:2005CB724104)和中南大学研究生创新项目(项目编号:1343-77202)

陈书涵 中南大学机电工程学院 博士生,410083 长沙市

严宏志 中南大学机电工程学院 教授 博士生导师

明兴祖 中南大学机电工程学院 博士生

谢耀东 株洲齿轮有限责任公司 高级工程师,412000 湖南省株洲市

加工进行研究,提出机床数控加工数学模型。

1 六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床结构

六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床结构如图 1 所示,将加工齿轮所需的运动用 6 个数控轴实现。该机床具 3 个平动轴(X、Y、Z)和 3 个旋转轴(A、B、C),其中 C 轴不参与联动,其余五轴联动。通过复合空间运动,该机床可以灵活地实现刀具与工件在空间展成时的相对位置和运动关系,可以模拟传统机床任何方法加工螺旋锥齿轮。该机床结构简单,功能强;并能够实现刀倾法、变性法等多种方法对螺旋锥齿轮进行铣齿加工。用 6 个轴运动实现锥齿轮加工的所有运动,它的出现为制造啮合性能良好的齿面提供了广阔的前景。理论上,此类机床能够实现齿面加工的任何运动,为齿面的设计与制造提供了几乎无限的自由度。

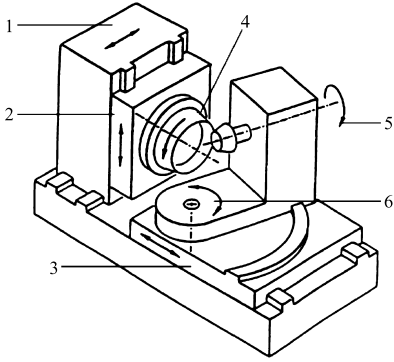


图 1 六轴五联动螺旋锥齿轮机床结构

Fig.1 Structure of spiral bevel gear machine with six axes five linkages

- 1. X 轴,砂轮机主轴水平运动
- 2. Y 轴,砂轮机主轴垂直运动
- 3. Z 轴,床鞍移动
- 4. C 轴,砂轮机主轴
- 5. A 轴,工件主轴
- 6. B 轴,轮坯安装角调整轴

2 六轴五联动螺旋锥齿轮机床 CNC 加工模型

为了在六轴五联动 CNC 机床上再现传统机床上刀具坐标系 S_t 与工件坐标系 S_p 间的运动关系,首先研究 S_t 与 S_p 两者之间的方向矢量与位置矢量。

(1)假设有 4×4 位置矩阵 $(\overline{O_t O_p})_p^{(k)}$ 和 3×3 方向矩阵 $L_{pt}^{(k)}$ ($k = C, G$),其中上标 C 和 G 分别代表六轴五联动 CNC 机床和传统铣齿机。

(2)如果有

$$L_{pt}^{(C)} = L_{pt}^{(G)} \quad (1)$$

则可保证工件与刀具在两种机床框架中具有相同的相对运动方向,即保证刀具相对于工件具有相同的运动姿态。

(3)如果有

$$(\overline{O_t O_p})_p^{(C)} = (\overline{O_t O_p})_p^{(G)} \quad (2)$$

则可保证刀具与工件间的相对运动位置相同。

若式(1)、(2)同时满足,则可以保证两种机床展成齿面时,刀盘与工件具有相同的相对运动方向与相对位置。

2.1 坐标系

建立如图 2 所示的机床坐标系,并结合图 1 来进行分析和研究。坐标系 $S_t(x_t, y_t, z_t)$ 和 $S_p(x_p, y_p, z_p)$ 分别固联于刀具与工件。坐标系 S_h 和 S_m 的各坐标轴与 S_f 相应的坐标轴平行。坐标系 S_e 与 S_m 原点重合,坐标轴 x_e 绕 y_m 旋转后偏离 x_m 的角度为轮坯安装角 ϕ 。辅助坐标系 S_d 与工件箱固联,其各坐标轴分别与 S_e 的相应轴平行,两者坐标原点之间的距离 $x_e^{(O_d)}$ 为轮坯安装距(固定值)。 S_t 相对于 S_h 绕 z_h 轴旋转,转角为 β ; S_p 相对于 S_d 绕 x_d 轴旋转,转角为 ψ 。

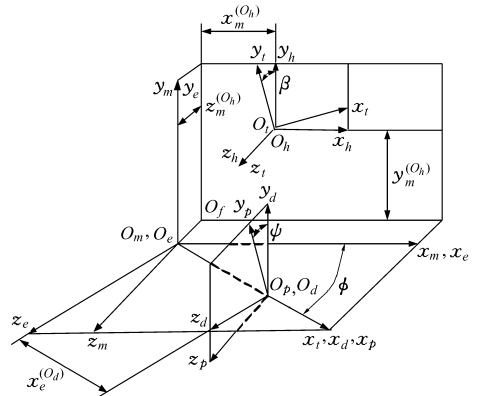


图 2 六轴五联动螺旋锥齿轮机床坐标系

Fig.2 Coordinate systems of spiral bevel gear cutter with six axes five linkages

在图 2 中,先考虑刀具与工件间的相对方向,通过矩阵坐标变换法,可以得到

$$L_{pt}^{(C)}(\beta, \phi, \psi) = L_{pd}(\psi)L_{de}L_{em}(\phi)L_{mh}L_{ht}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\phi & -\sin\beta\cos\phi & \sin\phi \\ -\cos\beta\sin\phi\sin\psi + \sin\beta\cos\psi & \sin\beta\sin\phi\sin\psi + \cos\beta\cos\psi & \cos\phi\sin\psi \\ -\cos\beta\sin\phi\cos\psi - \sin\beta\sin\psi & \sin\beta\sin\phi\cos\psi - \cos\beta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 $L_{pt}^{(C)}$ ——刀具与工件间的相对方向

L_{de} 、 L_{mh} ——单位矩阵

接着求解刀具与工件间的相对位置。如图 2 所示,在工件的坐标系 S_p 中,有

$$(\overline{O_m O_t})_p^{(C)} + (\overline{O_t O_p})_p^{(C)} = (\overline{O_m O_p})_p^{(C)}$$

进而有

$$\begin{aligned} (\overline{O_t O_p})_p^{(C)} &= (\overline{O_m O_p})_p^{(C)} - (\overline{O_m O_t})_p^{(C)} = \\ &= (\overline{O_e O_d})_p^{(C)} - (\overline{O_m O_h})_p^{(C)} = \\ &= x_e^{(O_d)}(i_e)_p - x_m^{(O_h)}(i_m)_p - y_m^{(O_h)}(j_m)_p - z_m^{(O_h)}(k_m)_p \end{aligned} \quad (4)$$

由图2可知, $x_e^{(O_d)}$ 、 $x_m^{(O_h)}$ 、 $y_m^{(O_h)}$ 、 $z_m^{(O_h)}$ 都是变量。

因此,在六轴五联动机床上的工件坐标系 $S_p^{(C)}$ 中,位置矢量 $(\overline{O_t O_p})_p^{(C)}$ 用矩阵表示为

$$\begin{aligned} & (\overline{O_t O_p})_p^{(C)} = \\ & x_e^{(O_d)} \mathbf{L}_{pe} [1 \ 0 \ 0]^T - x_m^{(O_h)} \mathbf{L}_{pm} [1 \ 0 \ 0]^T - \\ & y_m^{(O_h)} \mathbf{L}_{pm} [0 \ 1 \ 0]^T - z_m^{(O_h)} \mathbf{L}_{pm} [0 \ 0 \ 1]^T \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{L}_{pe} = \mathbf{L}_{pd} \mathbf{L}_{de}$ $\mathbf{L}_{pm} = \mathbf{L}_{pd} \mathbf{L}_{de} \mathbf{L}_{em}$

由此可得到

$$\begin{aligned} & (\overline{O_t O_p})_p^{(C)} = \\ & \begin{bmatrix} x_e^{(O_d)} - x_m^{(O_h)} \cos \phi - z_m^{(O_h)} \sin \phi \\ x_m^{(O_h)} \sin \phi \sin \psi - y_m^{(O_h)} \cos \psi - z_m^{(O_h)} \cos \phi \sin \psi \\ x_m^{(O_h)} \sin \phi \cos \psi + y_m^{(O_h)} \sin \psi - z_m^{(O_h)} \cos \phi \cos \psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 机械式螺旋锥齿轮机床坐标系

以展成法加工大轮为例,对于机械式螺旋锥齿轮铣床,同样可以设定机床加工坐标系,用以描述刀具与工件间的相对运动关系。如图3所示,固定坐标系 S_m 固联于摇台中心,运动坐标系 S_c 与摇台固连; $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ 和 $S_p(X_p, Y_p, Z_p)$ 分别固联于刀具与工件。图中 S_r 为径向刀位, q 为角向刀位(初始摇台角), E_m 为垂直轮位, X_B 为床位, X_p 为水平轮位, γ_m 为机床安装角。

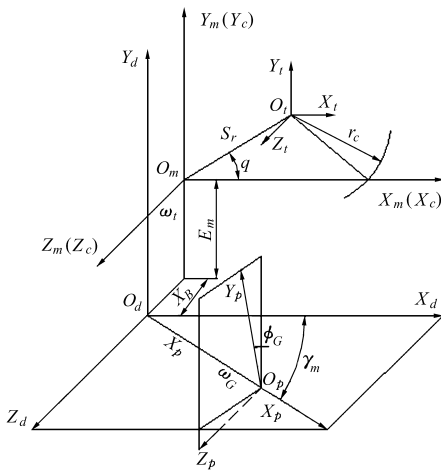


图3 机械式螺旋锥齿轮机床坐标系

Fig.3 Coordinate systems of mechanical spiral bevel gear machine

在图3中,通过一系列的坐标变换,可以得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{pt}^{(G)} = \mathbf{M}_{pd}(\phi_G, \gamma_m) \mathbf{M}_{dm} \mathbf{M}_{mc}(q) \mathbf{M}_{ct} = \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $a_{11} = \cos \gamma_m \cos q$ $a_{12} = -\cos \gamma_m \sin q$
 $a_{13} = \sin \gamma_m$

$$\begin{aligned} a_{14} &= S_r \cos \gamma_m \cos q + X_B \cos \gamma_m - X_p \\ a_{21} &= -\sin \phi_G \sin \gamma_m \cos q + \cos \phi_G \sin q \\ a_{22} &= \sin \phi_G \sin \gamma_m \sin q + \cos \phi_G \cos q \\ a_{23} &= \sin \phi_G \cos \gamma_m \\ a_{24} &= -S_r \sin \phi_G \sin \gamma_m \cos q + S_r \cos \phi_G \sin q - \\ & X_B \sin \phi_G \sin \gamma_m + E_m \cos \phi_G \\ a_{31} &= -\cos \phi_G \sin \gamma_m \cos q - \sin \phi_G \sin q \\ a_{32} &= \cos \phi_G \sin \gamma_m \sin q - \sin \phi_G \cos q \\ a_{33} &= \cos \phi_G \cos \gamma_m \\ a_{34} &= -S_r \cos \phi_G \sin \gamma_m \cos q - S_r \sin \phi_G \sin q - \\ & X_B \cos \phi_G \sin \gamma_m - E_m \sin \phi_G \\ a_{41} &= a_{42} = a_{43} = 0 \quad a_{44} = 1 \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{L}_{pt}^{(G)}$ 为 3×3 阶的变换矩阵,则

$$\mathbf{L}_{pt}^{(G)}(\phi_G, \gamma_m, q) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

而 $(\overline{O_t O_p})_p^{(G)}$ 为刀具与工件间的相对运动位置矢量,则

$$\begin{aligned} & (\overline{O_t O_p})_p^{(G)} = -\mathbf{M}_{pt}^{(G)} [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T = \\ & -[a_{14} \ a_{24} \ a_{34} \ a_{44}]^T \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(3)、(5)与式(7)、(8),求解方程(1)、(2)就可以由传统的机械式调整参数来确定六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床的加工参数,也就是螺旋锥齿轮六轴五联动数控加工模型。

2.3 加工参数

(1) 确定六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床的轮坯安装角(B 轴转动角度) ϕ 。

由式(7)与式(3)相等可得

$$a_{13} = \sin \gamma_m = \sin \phi \quad (9)$$

由式(9)可知,当六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床展成法加工大轮时,轮坯安装角 ϕ 与 γ_m 是相等的。

(2) 确定六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床的工件主轴(A 轴)转动角度 ψ 。

同样由式(7)与式(3)相等可得

$$\begin{cases} a_{23} = \sin \phi_G \cos \gamma_m = \cos \phi \sin \psi \\ a_{33} = \cos \phi_G \cos \gamma_m = \cos \phi \cos \psi \end{cases} \quad (10)$$

由方程组(10)可知

$$\psi = \phi_G = q / m_{cp}$$

式中 m_{cp} ——滚比的倒数

对刀具主轴(C 轴)转动角度 β ,因

$$\begin{cases} a_{11} = \cos \gamma_m \cos q = \cos \beta \cos \phi \\ a_{12} = -\cos \gamma_m \sin q = -\sin \beta \cos \phi \end{cases} \quad (11)$$

由方程组(11)可知

$$\beta = q$$

(3) 将以上结果代入式(5)可得

$$(\mathbf{O}_t \mathbf{O}_p)^{(C)}_p =$$

$$\begin{bmatrix} x_e^{(O_d)} - x_m^{(O_h)} \cos \gamma_m - z_m^{(O_h)} \sin \gamma_m \\ x_m^{(O_h)} \sin \gamma_m \sin \phi_G - y_m^{(O_h)} \cos \phi_G - z_m^{(O_h)} \cos \gamma_m \sin \phi_G \\ x_m^{(O_h)} \sin \gamma_m \cos \phi_G + y_m^{(O_h)} \sin \phi_G - z_m^{(O_h)} \cos \gamma_m \cos \phi_G \end{bmatrix} \quad (12)$$

而由式(8)可得

$$(\mathbf{O}_t \mathbf{O}_p)^{(G)}_p = -[a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34}]^T \quad (13)$$

(4) 由式(2)可知:式(12)与(13)相等,即向量各对应的元素相等,可以分别求得

$$\begin{cases} x_m^{(O_h)} = S_r \cos q + X_B - (X_p - x_e^{(O_d)}) \cos \gamma_m \\ y_m^{(O_h)} = S_r \sin q + E_m \\ z_m^{(O_h)} = (x_e^{(O_d)} - X_p) \sin \gamma_m \end{cases} \quad (14)$$

由式(14)可以看出,在六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床上, X 轴与 Y 轴的联动形成刀盘中心的圆弧运动,这符合传统机床的展成过程。

从以上可以得到六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床的 5 个联动轴的瞬时运动位置,进而可拟合出 5 个联动轴与时间的表达式。各运动轴的位置可用展成时间 t 的四阶多项式表示。如 X 轴表示为^[2]

$$X = X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + X_3 t^3 + X_4 t^4$$

3 计算示例

以传统机床展成法加工大轮为例,准双曲面齿轮副的基本参数如表 1 所示;由中大创远公司提供的加工参数如表 2 所示。计算时, $q = \theta_c + m_{cp} \phi_G$ (θ_c 为初始摇台角, ϕ_G 为大轮的转角)^[4]。结合式(9)、(10)、(14),展成法加工时,六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床各个数控轴在每个加工瞬时的位置如表 3 所示,各个数控轴的四阶表达式的各阶系数通过拟合得到,如表 4 所示。

4 结束语

应用空间坐标变换,分析了传统机床与六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床的结构模型,研究了展成法加工时两类机床加工参数之间的转换原理,建立了六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床数控加工模型。最后以加工一对准双曲面齿轮副的大轮示例,得到

表 1 准双曲面齿轮副基本参数

Tab.1 Basic parameters of hypoid gear vice

项目	小轮	大轮	项目	小轮	大轮
齿数	19	62	节锥角/(°)	17.416 777.583 3	
压力角/(°)	20	20	根锥角/(°)	16.566 775.433 3	
外锥距/mm	132.334 0		轴交角/(°)	19.566 778.433 3	
齿顶高/mm	4.928 0	1.905 0	齿面宽/mm	36.830 0	
齿根高/mm	2.692 4	5.715 0			

表 2 大轮加工参数

Tab.2 Gear machining parameters

参数	数值	参数	数值
径向刀位 S_r /mm	97.944 9	滚比 R_a	1.023 2
初始摇台角 θ_c /(°)	52.808 4	垂直轮位 E_m /mm	0
水平轮位 X_p /mm	0	机床安装角 γ_m /(°)	75.433 3
床位 X_B /mm	-0.033 3		

表 3 六轴五联动机床各数控轴的运动位置

Tab.3 Numerical control axes movement locations of gear machine with six axes five linkages

X 轴/mm	Y 轴/mm	Z 轴/mm	A 轴/(°)	B 轴/(°)
68.579 5	-77.956 9	35.856 0	-53.866 4	75.433 3
71.204 0	-75.889 1	35.856 0	-51.567 1	75.433 3
75.004 7	-72.622 5	35.856 0	-48.346 7	75.433 3
77.443 5	-70.338 6	35.856 0	-46.066 9	75.433 3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
82.005 3	365.611 3	35.856 0	43.133 4	75.433 3
78.554 1	69.245 2	35.856 0	45.034 6	75.433 3
76.151 9	71.567 6	35.856 0	48.783 2	75.433 3
73.672 0	73.806 7	35.856 0	50.093 8	75.433 3

表 4 六轴五联动机床各数控轴的表达式系数

Tab.4 Numerical controls axis expression coefficients of gear machine with six axes five linkages

轴	0 阶	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶
X	-55.120 4	25.865 3	-0.269 8	-0.102 3	0.002 8
Y	-67.216 3	-26.921 5	5.627 6	-0.267 7	0.003 7
Z	35.856 0	0	0	0	0
A	-125.966 4	12.000 0	0	0	0
B	75.433 3	0	0	0	0

了六轴五联动数控螺旋锥齿轮机床 5 个数控轴加工时的瞬时运动位置,并通过拟合得到了 5 个联动数控轴的表达式。

参 考 文 献

1 张艳红,吴联银,魏洪钦,等. 刀倾型机床调整参数转化为 Free-Form 型机床调整参数的原理[J]. 机械科学与技术, 2000,19(5):782~784.

表 7 30PSH 喷头计算网格间距为 1 m 和 0.25 m 下
均匀系数之间的平均绝对偏差值

Tab.7 Water application uniformity deviations between 1 m
and 0.25 m distanced grid points for 30PSH sprinklers

网格 间距/m	邻近点距离线性插值法		三次样条两次插值法	
	正方形组合	正三角形组合	正方形组合	正三角形组合
1	0.8	0.3	0.4	0.2
0.25	0.6	0.3	0.2	0.3

3 结论

(1) 当雨量筒径向布置时,为考虑所有测点数据对插值点降水深的影响,采用径向和周向两次的三次样条插值计算出未知点的降水深,从而计算出喷灌均匀系数。实例证明,三次样条两次插值法计算出来的均匀系数值比目前常用的邻近点距离线性

插值法略低 1 个百分点,因此可以认为 2 种方法精度相当,三次样条两次插值法可以用来评价喷灌组合均匀度。

(2) 邻近点距离线性插值法认为两采样点间的降水深数据呈线性变化的关系,因而插值点与降水深平均值的偏差较小,计算出来的均匀系数高。而三次样条两次插值法是基于水量分布连续性,用三次样条曲线代替直线来描述两采样点间的喷灌水量实际分布规律,因此与降水深平均值的偏差较大,计算出的均匀系数值也较低。

(3) 采样间距越大,均匀系数的计算值越高。采样间距 2 m 比 1 m 计算出来的均匀系数总体高 3~4 个百分点,三次样条两次插值法比邻近点距离线性插值法略低 1 个百分点,2 种网格间距下的均匀系数差值小于 1 个百分点。由此说明,采样间距、插值方法、网格间距对均匀系数的影响依次降低。

参 考 文 献

- 1 韩文霆,吴普特,杨青,等. 喷灌水量分布均匀性评价指标比较及研究进展[J]. 农业工程学报, 2005, 21(9): 172~177.
Han Wenting, Wu Pute, Yang Qing, et al. Advances and comparisons of uniformity evaluation index of sprinkle irrigation [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2005, 21(9): 172~177. (in Chinese)
- 2 Akima H. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distributed data points[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1978(4):148~159.
- 3 黄修桥,廖永诚. 有风条件下喷灌系统组合均匀度的计算理论与方法研究[J]. 灌溉排水,1995,14(1):12~18.
Huang Xiujiao, Liao Yongcheng. The compound uniformity of sprinkler irrigation system under wind condition: a study on its calculation theories and methods[J]. Journal of Irrigation and Drainage, 1995,14(1):12~18. (in Chinese)
- 4 韩文霆. 变量喷洒可控域精确灌溉喷头及喷灌技术研究[D]. 杨凌:西北农林科技大学,2003.
Han Wenting. Variable-rate contour-controlled sprinklers for precision irrigation [D]. Yangling: Northwest A & F University, 2003. (in Chinese)
- 5 韩文霆,吴普特,冯浩,等. 非圆形喷洒域变量施水精确灌溉喷头综述[J]. 农业机械学报, 2004, 35(5): 221~224.
Han Wenting, Wu Pute, Feng Hao, et al. Variable-rate sprinklers for precision irrigation on irregular boundary area[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2004, 35(5): 221~224. (in Chinese)

(上接第 201 页)

- Zhang Yanhong, Wu Lianyin, Wei Hongqin, et al. On the theory of transformation machine setting parameters from cutter-tilt milling machine to Free-Form milling machine[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(5): 782~784. (in Chinese)
- 2 熊越东,王太勇,张威. 螺旋锥齿轮数控加工参数转换计算方法[J]. 组合机床与自动化加工技术,2006(8):5~9.
Xiong Yuedong, Wang Taiyong, Zhang Wei. The calculation method of NC machining setting parameters transformation of spiral bevel and hypoid gears[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2006(8): 5~9. (in Chinese)
- 3 魏冰阳,任东锋,方宗德,等. 传统机床与 Free-form 型机床运动的等效转换[J]. 机械科学与技术,2004,23(4):425~428.
Wei Bingyang, Ren Dongfeng, Fang Zongde, et al. Study on kinematics equivalent transformation from traditional machine tools to Free-form ones[J]. Mechanical Science and Technology, 2004,23(4):425~428. (in Chinese)
- 4 Litvin F L. Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gear, NASA, CR, 4342[R]. Chicago: NASA Lewis Research Center, 1991.