

左手材料阶跃型光纤的模场特性*

沈陆发^{1,2}, 王子华¹

(1 上海大学 通信与信息工程学院, 上海 200072)

(2 浙江省湖州师范学院 理学院, 浙江 湖州 313000)

摘 要:从 Maxwell 方程组出发, 讨论纤芯为左手材料, 包层为右手材料阶跃型光纤, 推导了矢量解的场方程. 经过数学计算, 求得了左手材料阶跃型光纤矢量解的特征方程. 根据矢量模的分类, 找到了 TE 模、TM 模、HE 模和 EH 模的特征方程. 根据各模的特征方程, 并且与右手材料光纤相关的特征方程, 在靠近截止和远离截止两种情况下进行了比较, 得到了左手材料光纤的某些奇异特性.

关键词:光纤; 左手材料; 特征方程; 模场特性

中图分类号: TN252

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2008)03-0581-4

0 引言

近年来, 电磁场理论与电磁材料研究开拓了一个新领域, 即负折射率研究. 负折射率材料是指同时具有负介电常量 ϵ 和负的磁导率 μ 的人工电磁材料结构, 又称双负介质. 由于负折射率材料介电常量和磁导率都为负值, 电磁波在其中传播时, 电场、磁场和波矢量的方向三者满足左手法则, 所以又称为左手材料(通常的电磁材料三者满足右手法则, 所以相应的称为右手材料). 负折射率的概念是 Vesalago^[1] 在 1968 年提出的, 但由于自然界没有这种材料, 所以不被人们所重视, 直到 Smith et al^[2] 在微波波段得到了负的介电常量 ϵ 和磁导率 μ , 随后关于负折射率的讨论很快热了起来. 多位学者已经对平面波导的传输特性进行了研究^[3-6]. 但对左手材料光纤传输特性进行研究的学者并不多, 浙江大学何金龙等对左手材料光纤导模的异常特性进行了分析^[7], H. Cory 和 T. Blum 左手材料光纤的表面波特性进行了研究^[8], 得到了有别于右手材料光纤的部分特性. 但是, 他们只是对左手材料光纤的部分特性进行了研究, 还需要有待于深入. 为了进一步了解左手材料光纤的特性, 本文从 Maxwell 方程组出发, 讨论纤芯为左手材料, 包层为右手材料的阶跃型光纤, 推导了矢量解的场方程. 经过数学计算, 求得了左手材料阶跃型光纤的精确解, 建立了矢量解的特征方程. 根据矢量模的分类, 找到了 TE 模、TM 模、HE 模和 EH 模的特征方程. 根据各个模的特征方程, 并和右手材料光纤相应模的特征方程, 分别在

截止条件和远离截止的两种情况下进行了比较, 得到了左手材料光纤的某些特性, 确定了 HE₁₁ 模不是左手材料阶跃型光纤最低阶模.

1 矢量解的场方程

左手材料阶跃型光纤的截面如图 1. 纤芯的介电常量、磁导率和折射率分别为 ϵ_1 、 μ_1 和 n_1 , 且都小

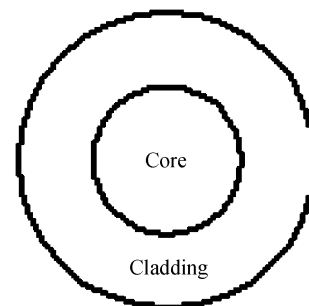


图 1 光纤截面图

Fig. 1 Geometry of the optical fiber

于 0, 它的半径为 a ; 包层的介电常量、磁导率和折射率分别为 ϵ_2 、 μ_2 和 n_2 , 且都大于零, 它的半径为 b . 采用柱坐标系, 横向分量的单位矢量为 \mathbf{a}_r 、 \mathbf{a}_θ , 纵向分量的单位矢量为 \mathbf{a}_z , 电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{H} 可表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r + \mathbf{a}_\theta E_\theta + \mathbf{a}_z E_z \quad (1a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_r H_r + \mathbf{a}_\theta H_\theta + \mathbf{a}_z H_z \quad (1b)$$

Z 向场分量的亥姆霍兹方程为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2 n_i^2 E_z = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2 n_i^2 H_z = 0 \quad (2b)$$

式中 $i=1, 2$, 分别对应于纤芯和包层, k_0 为真空中的波数. 类似于右手材料光纤的数学处理方法, 可得 E_z 的表达式为

$$E_z = A \cos m\theta \exp(-j\beta z) \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)}, \quad r \leq a \quad (3a)$$

*国家自然科学基金(60277025)和上海市重点学科建设项目(T0102)资助

Tel: 021-56333252 Email: shenlufa0410@sina.com

收稿日期: 2006-10-12

$$E_z = A \cos m\theta \exp(-j\beta z) \frac{K_m(\frac{U}{a}r)}{K_m(U)}, r \geq a \quad (3b)$$

式中 $U = a \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}$, $W = a \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ 以下相同. A 为常量.

同理可得磁场的 Z 向分量

$$H_z = B \sin m\theta \exp(-j\beta z) \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)}, r \leq a \quad (4a)$$

$$H_z = B \sin m\theta \exp(-j\beta z) \frac{K_m(\frac{U}{a}r)}{K_m(U)}, r \geq a \quad (4b)$$

其中 B 为常量. 根据 E_z, H_z 的表达式, 其它场分量可根据 Maxwell 方程分别解出为

$$E_{\theta 1} = -j \left(\frac{a}{U}\right)^2 \left[\frac{m\beta A}{r} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} + \frac{\omega B U |\mu_1|}{a} \right] \frac{J'_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} \cos m\theta, r \leq a \quad (5a)$$

$$E_{\theta 2} = -j \left(\frac{a}{W}\right)^2 \left[\frac{m\beta A}{r} \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} - \frac{\omega B W \mu_2}{a} \right] \frac{K'_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} \cos m\theta, r \geq a \quad (5b)$$

$$E_{r 1} = -j \left(\frac{a}{U}\right)^2 \left[\frac{\omega B m |\mu_1|}{r} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} + \frac{\beta A U}{a} \right] \frac{J'_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} \sin m\theta, r \leq a \quad (5c)$$

$$E_{r 2} = -j \left(\frac{a}{W}\right)^2 \left[-\frac{\omega B m \mu_2}{r} \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} + \frac{\beta A W}{a} \right] \frac{K'_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} \sin m\theta, r \geq a \quad (5d)$$

$$H_{\theta 1} = -j \left(\frac{a}{U}\right)^2 \left[-\frac{\beta n B}{r} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} - \frac{\omega A U |\epsilon_1|}{a} \right] \frac{J'_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} \sin m\theta, r \leq a \quad (5e)$$

$$H_{\theta 2} = j \left(\frac{a}{W}\right)^2 \left[-\frac{\beta n B}{r} \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} + \frac{\omega \epsilon_2 A W}{a} \right] \frac{K'_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} \sin m\theta, r \geq a \quad (5f)$$

$$H_{r 1} = -j \left(\frac{a}{U}\right)^2 \left[\frac{\omega A m |\epsilon_1|}{r} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} + \frac{\beta B U}{a} \right]$$

$$\frac{J'_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} \cos m\theta, r \leq a \quad (5g)$$

$$H_{r 2} = j \left(\frac{a}{W}\right)^2 \left[-\frac{\omega \epsilon_2 m A}{r} \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} + \frac{\beta B W}{a} \right]$$

$$\frac{K'_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} \cos m\theta, r \geq a \quad (5h)$$

形成导波时, 它的相位常量 β 介于纤芯和包层材料平面波的波数之间, 即 $n_2 k_0 \leq \beta \leq n_1 k_0$; 若 $\beta = n_2 k_0$, 导波则处于截止的临界状态, $W = 0, U = V$; 若 $\beta > n_2 k_0$, 波在包层中形成辐射模.

2 矢量解的特征方程

利用纤芯和包层交界面上的电场和磁场切向分量的连续性, 可得下列方程

$$E_{\theta 1} = E_{\theta 2}: \omega B \mu_0 \left[\frac{1}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} - \frac{1}{U} \frac{J'_m(U)}{J_m(U)} \right] = m\beta A \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (6a)$$

$$H_{\theta 1} = H_{\theta 2}: \omega A \left[\frac{\epsilon_2}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} - \frac{|\epsilon_1|}{U} \frac{J'_m(U)}{J_m(U)} \right] = m\beta B \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (6b)$$

式中令 $\mu_2 = -\mu_1 = \mu_0$, (6a) \times (6b) 经数学计算可得

$$\left[\frac{1}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} - \frac{1}{U} \frac{J'_m(U)}{J_m(U)} \right] \left[\frac{1}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} - \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{J'_m(U)}{U J_m(U)} \right] = m^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{n_2^2 U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (7)$$

对于弱导光纤, 近似可认为 $n_2 \approx |n_1|$, 可得弱导左手材料阶跃型光纤的近似特征方程为

$$\frac{1}{U} \frac{J'_m(U)}{J_m(U)} - \frac{1}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} = \pm m \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (8)$$

3 矢量模的分析

3.1 TE 模和 TM 模

类似于右手材料光纤 TE, TM 模的定义, 由 $m = 0$ 代入式 (7), 可得精确解的 TE, TM 模的特征方程分别为

$$\text{TE 模: } \frac{1}{U} \frac{J_1(U)}{J_0(U)} = \frac{1}{W} \frac{K_1(W)}{K_0(W)} \quad (9a)$$

$$\text{TM 模: } \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{J_1(U)}{U J_0(U)} = \frac{1}{W} \frac{K_1(W)}{K_0(W)} \quad (9b)$$

形式与右手材料光纤 TE, TM 模的特征方程相似, 但由于纤芯是左手材料, 介电常量和磁导率的变负, 其特征方程表达式中的符号发生改变^[9].

3.2 EH 模和 HE 模

参照右手材料光纤 EH 模和 HE 模的定义办法, EH 模和 HE 模的特征方程分别为

$$\text{EH 模: } \frac{1}{U} \frac{J'_m(U)}{J_m(U)} - \frac{1}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} = m \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (10a)$$

$$\text{HE 模: } \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{J'_m(U)}{U J_m(U)} - \frac{1}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} = -m \left(\frac{n_1^2}{n_2^2 U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (10b)$$

4 矢量模的特性

4.1 靠近截止时的各模式

靠近截止时, 即 $W \rightarrow 0$.

4.1.1 TE 和 TM 模

在弱导的情况下, 由式(9a)和式(9b)计算可得, TE 和 TM 模在靠近截止时的特征方程为: $J_0(U) = 0$, 因此, 所有的 TE 和 TM 模中, TE 模和 TM 模的截止频率最低, 为 2.404 83. 这和右手材料光纤在靠近截止时的 TE 和 TM 模的特征方程以及最低截止频率相同^[9].

4.1.2 EH 模

由式(10a), 经数学计算可得

$$\frac{J_{m+1}(U)}{U J_m(U)} = \frac{K_{m-1}(W)}{W K_m(W)} \quad (11)$$

在靠近截止的情况下, 式(11)可变为

$$\frac{J_{m+1}(U)}{U J_m(U)} = \frac{1}{2(m-1)} \quad (12)$$

当 $m = 1$ 时, EH 模在靠近截止时的特征方程为

$$J_1(U_c) = 0 \text{ 且 } J_2(U_c) \neq 0 \quad (13)$$

当 $m > 1$ 时, EH 模在靠近截止的特征方程为

$$U_c J_{m+2}(U_c) = 4 J_{m+1}(U_c) \quad (14)$$

由此可见, 其最低模式为 EH_{11} , 它的相应的截止频率为 3.831 71. 从方程(12)的形式来看, 这类似于右手材料光纤 HE 模靠近截止时的表达式. 但左手材料光纤 EH 模和右手材料光纤 HE 模在靠近截止时的特征方程完全不同. 而左手材料光纤和右手材料光纤 EH 模的最低截止频率相等^[9].

4.1.3 HE 模

根据式(10b), 考虑弱导情况, HE 模的特征方程为

$$-\frac{J_{m-1}(U)}{U J_m(U)} = \frac{K_{m+1}(W)}{W K_m(W)} \quad (15)$$

当 $m \geq 1$ 时, HE 模在靠近截止时的特征方程为

$$J_m(U_c) = 0 \text{ 且 } J_{m-1}(U_c) < 0 \quad (16)$$

左手材料光纤 HE 模在靠近截止时的特征方程(16)类似于右手材料光纤 EH 模在靠近截止时的特

征方程, 但又不完全相同^[9]. 当 $m = 1$ 时, 满足式(16)的最低归一化频率为 3.831 71, 这一频率明显比 TE 和 TM 模的最低截止频率大, 因此 HE_{11} 模肯定不是左手材料光纤的最低模. 而右手材料光纤 HE_{11} 模的最低截止频率为 0, 是最低模. 这又是左手材料光纤的特性之一.

综上所述, 在弱导的情况下, 左手材料光纤在靠近截止时的各模式中, 其最低模为 TE_{01} 和 TM_{01} 模, 而不是 HE_{11} 模. 同时由于 TE_{01} 和 TM_{01} 的截止频率相等, 所以, 在左手材料光纤中不可能单模传输.

4.2 远离截止时的各模式

远离截止时, 即 $W \rightarrow \infty$.

4.2.1 TE 模和 TM 模

由式(9a)和(9b)数学计算, 可得 TE 模和 TM 模在远离截止时的特征方程为: $J_1(U) = 0$.

4.2.2 EH 模

对(10a)数学计算, 可得 EH_m 模在远离截止时的特征方程为: $J_{m+1}(U) = 0$, 同理可得 HE 模在远离截止时的特征方程为: $J_{m-1}(U) = 0$.

综上所述, 在远离截止的情况下, 左手材料光纤所有模的特征方程与相关的右手材料光纤的特征方程相一致^[9].

5 结论

经过数学计算, 求得了左手材料阶跃型光纤矢量解的特征方程. 根据矢量模的分类, 找到了 TE 模、TM 模、HE 模和 EH 模的特征方程. 根据各模的特征方程, 并且与右手材料光纤相关的特征方程, 在截止条件和远离截止两种情况下进行了比较, 得到了左手材料光纤的某些奇异特性. 如: TE 模和 TM 模的特征方程, 由于介电常量和磁导率的变负符号改变; EH 模和 EH 模在靠近截止时的特征方程不同于常规的光纤方程; HE_{11} 模最低归一化频率为 3.831 71, 肯定不是在靠近截止时的最低模. 而且它存在 TE 模和 TM 模, 这又不同于左手材料平面波导的传输特性.

参考文献

- [1] VESELAGO V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ [J]. *Sov Phys Usp*, 1968, **10**(4): 509-514.
 - [2] SMITH D R, PADILLA W J, VIER D C, et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity [J]. *Phys Rev Lett*, 2000, **84**(18): 4184-4187.
 - [3] YANG Li-gong, GU Pei-fu, HUANG Bi-qin, et al. Transmission characters of optical waves at the interface between LHM and RHM [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(10): 1225-1227.
- 杨立功, 顾培夫, 黄弼勤, 等. 光波在左右手系材料界面处的传

- 播特性[J]. 光子学报, 2003, **32**(10):1225-1227.
- [4] MARQUES R, BAENA J. Effect of losses and dispersion on the focusing properties of left-handed media[J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2004, **41**(4):290-294.
- [5] CORY H, ZACH C. Wave propagation in metamaterial multi-layered structures [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2004, **40**(6):460-465.
- [6] TIAN Xiu-lao. Fresnel formulate and brewster law of optical waves in the left-handed materials[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(7):1103-1106.
田秀劳. 光波在左手材料中的菲涅尔公式和布儒斯特定律[J]. 光子学报, 2006, **35**(7):1103-1106.
- [7] HE Jin-long, SHEN Lin-fang, HE Sai-ling, *et al.* Abnormal characteristics of guided modes in a fiber formed by a medium with negative-refractive index [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11):1327-1329.
何金龙, 沈林放, 何赛灵, 等. 负折射率介质光纤的导模异常特性分析[J]. 光子学报, 2004, **33**(11):1327-1329.
- [8] CORY H, BLUM T. Surface-wave propagation along a metamaterial cylinder guide [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2005, **44**(1):31-35.
- [9] YE Pei-da, Wu Yi-zun. Fundamental theory of optical waveguides[M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 1981:199-219.
叶培大, 吴彝尊. 光波导技术基本理论[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1981:199-219.

Characteristics of Modes in Fiber Including Left-handed Material

SHEN Lu-fa^{1,2}, WANG Zi-hua¹

(1 School of Communication and Information Engineerin, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

(2 Science College, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000, China)

Received date: 2006-10-12

Abstract: A step-index optical fiber has been discussed with left-handed material as the core, and right-handed material as the cladding by using Maxwell's equations. An equation of electromagnetic fields is obtained. Through complex procedure, a characteristic equation of the rigorous solution is obtained. According to classification of vector modes, eigenvalue equations about TE modes, TM modes, EH modes and HE modes are deduced. By using those equations and comparison with that of right-handed material fiber, some novel characteristics of the left-handed material fiber near cutoff and far from cutoff are gained respectively.

Key words: Optical fiber; Left-handed material; Eigenvalue equations; Characteristics of modes



SHEN Lu-fa was born in 1963. Now he is a Ph. D. degree candidate and his main researches focus on wave-guide optics and optical fiber.