

文章编号:1000-6893(2007)06-1307-05

## 最优两脉冲行星际轨道转移优化算法

任远<sup>1</sup>, 崔平远<sup>1</sup>, 栾恩杰<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 深空探测基础研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150080)

(2. 国防科学技术工业委员会 月球探测工程中心, 北京 100080)

### Interplanetary Optimum Two-impulse Transfer Trajectories

Ren Yuan<sup>1</sup>, Cui Pingyuan<sup>1</sup>, Luan Enjie<sup>2</sup>

(1. Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

(2. Lunar Exploration Engineering Center, Commission of Science Technology and Industry for National Defense, Beijing 100080, China)

**摘 要:** 研究了最优两脉冲轨道转移问题。以行星际飞行为背景, 结合状态转移矩阵和古典变分理论, 推导了两脉冲行星际轨道转移的性能指标对可调参数的解析偏导数, 并利用这些解析偏导数提出了一种快速的两脉冲轨道转移优化算法。解决了传统两脉冲行星际轨道转移优化算法中存在的计算速度慢, 无法控制计算精度的问题。最后, 以地球-火星轨道转移为例, 将提出的优化算法计算的结果与传统的“能量等高线法”的计算结果进行对比, 验证了此算法的正确性和快速性。

**关键词:** 两脉冲转移轨道; 状态转移矩阵; 变分法; 行星际轨道; 探测机会

**中图分类号:** V412.41

**文献标识码:** A

**Abstract:** The optimum two-impulse transfer trajectory is investigated. Taking the interplanetary mission as the background, the state transition matrix and variational method are utilized, and the analytical partial derivatives of the index with respect to the adjustable variables is inferred. Based on these analytical partial derivatives, a fast optimization algorithm for two-impulse transfer trajectory is given out. The problems of slow speed and the uncontrollable precision flaws in the traditional optimization of interplanetary two-impulse transfer trajectory are solved. At the end, taking the Earth-Mars orbit transfer as an example, the result calculated by the optimization method brought up in this paper is compared with the result computed by the traditional “pork-chop” figure, and the accuracy and speediness of this algorithm are validated.

**Key words:** two-impulse transfer trajectory; state transition matrix; variational method; interplanetary trajectory; launch opportunity

近年来世界各国的深空探测活动日益频繁, 美国接连向火星和其他小天体发射探测器, 如火星勘探者、NEAR 计划<sup>[1-2]</sup> 和星尘计划; 欧洲的卡西尼探测器对土卫六进行了探测; 日本的 Muses-C 探测器则要执行小行星采样返回任务。中国也提出自己的月球探测计划, 迈出了深空探测的第一步。

在行星际探测任务中, 各种新型的轨道转移方法层出不穷。但由于两脉冲轨道转移是各种转移轨道设计的基础, 同时由于其在工程上易于实现, 所以两脉冲轨道转移在行星际探测任务中仍然有着广泛的应用。如果在设计两脉冲转移轨道时能够合理地选择两次施加速度脉冲的时刻, 则可以大大减小所需的速度增量, 从而达到节省燃

料增加有效载荷质量的目的, 即最优两脉冲转移问题。行星际探测任务中的两脉冲轨道转移通常是要求飞行器从地球出发并最终与目标天体交会。由于计算过程中需要求解超越方程, 因此此类最优两脉冲转移问题不存在解析解。求解此类问题目前最为常用的方法为“能量等高线法”<sup>[3]</sup>。能量等高线法实质上是一种穷举方法, 存在计算量大、得到的施加脉冲时刻精度差等问题。

为了解决能量等高线法中存在的问题, 实现对最优两脉冲转移轨道快速精确求解的目的。本文利用状态转移矩阵和古典变分理论推导了两脉冲轨道转移中所需的总的速度增量对两次施加脉冲时刻偏导数的解析表达形式, 从而提出一种快速有效的两脉冲轨道转移优化算法, 并在文章的最后通过数值算例验证了此算法的正确性和快速性。

收稿日期: 2006-11-08; 修订日期: 2007-10-28

基金项目: 国家自然科学基金(10672044)

通讯作者: 任远 E-mail: missiles\_400@yahoo.com.cn

## 1 传统两脉冲轨道优化算法及其缺陷

两脉冲轨道转移是对飞行器施加两次速度脉冲,从而使得飞行器从初始轨道转移到目标轨道的一种轨道转移方法。两脉冲转移轨道优化问题即是在已知初始和目标轨道根数的情况下,确定两次施加脉冲的时刻使转移过程中所需的速度增量达到最小,从而达到节省燃料的目的。在研究过程中,学者们发展出很多算法以求解最优两脉冲轨道转移问题。其中针对行星际探测任务中的最优两脉冲转移轨道,能量等高线法是一种最常用的求解方法,其基本过程如下:

(1) 在已知初始和目标轨道根数的情况下,选取感兴趣的发射和到达时段,并将这两个时段分别均分为若干时间节点;

(2) 分别选取不同的发射到达时间节点,结合星历表,并根据兰伯特定理求解与这对时间节点对应的开普勒轨道;

(3) 结合初始和目标轨道根数求解各对时间节点所对应的速度增量;

(4) 将具有相同速度增量的点用等高线连接起来,则得到速度增量等高线图,如图 1。

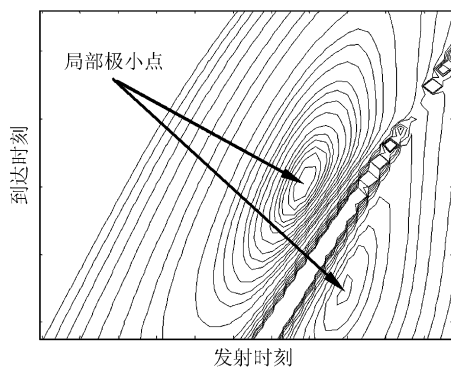


图 1 能量等高线示意图  
Fig. 1 "Pork-chop" figure

图 1 中每个局部极小值点都对应着一次相应的发射机会。能量等高线法原理简单直观,并能对发射机会做出一个全局的估计,因此应用十分广泛。NASA 甚至将部分时段向各大行星飞行的能量等高线图绘制成手册供轨道设计者使用。但是能量等高线法本质上是一种穷举的方法,需要耗费大量计算时间,并且无法精确控制计算的精度,若要提高精度就需要将时间节点划分得更密,计算量也会随之成倍增长。因此迫切需要开发一种快速的算法对任意两轨道之间的两脉冲转移进行寻优。

## 2 基于解析梯度的搜索算法

两脉冲转移轨道优化就是要对发射时刻和到达时刻这两个参数进行优化,使得两脉冲转移过程所需的速度增量达到初始猜测附近的局部最小值点。

通常情况下,在优化问题中如果能求得性能指标对各个可调参数偏导数的解析形式就可以极大地提高优化的速度。本节就利用状态转移矩阵和古典变分原理<sup>[4]</sup>分别推导性能指标对于两次施加速度脉冲的時刻的偏导数解析表达式。

### (1) 端点状态变分之间的关系

飞行器的初始状态摄动和末端状态摄动可通过状态转移矩阵建立联系<sup>[5]</sup>,形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \delta r_1 &= \Phi_{rr} \delta r_0 + \Phi_{rv} \delta v_0 \\ \delta v_1 &= \Phi_{vr} \delta r_0 + \Phi_{vv} \delta v_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

通过式(1)可以求出  $\delta v_0$  和  $\delta v_1$ ,形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \delta v_0 &= F \delta r_0 + E \delta r_1 \\ \delta v_1 &= H \delta r_0 + G \delta r_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} E &= \Phi_{rv}^{-1} \\ F &= -\Phi_{rv}^{-1} \Phi_{rr} \\ G &= \Phi_{vv} \Phi_{rv}^{-1} \\ H &= \Phi_{vr} - \Phi_{vv} \Phi_{rv}^{-1} \Phi_{rr} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

两体问题中的状态转移矩阵有解析表达式<sup>[6-7]</sup>,多体问题中轨道的状态转移矩阵<sup>[8]</sup>也可以通过数值方法求得。

以上分析是建立在等时变分基础上的,下面将以上推导扩展到可动边界变分的情况下进行分析。如果时间端点  $t_1$  不再固定,而是产生了一个微小的改变  $\delta t_1$ ,那么状态轨线的变化如图 2 所示。

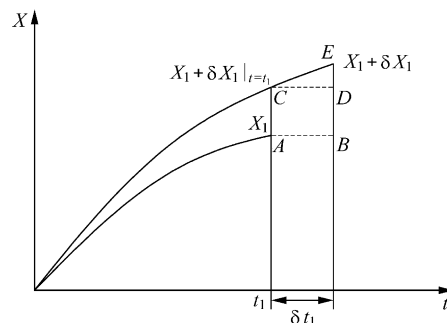


图 2 可动边界变分示意图  
Fig. 2 Variations with unfixed boundaries

可见图 2 中的 AC 段对应等时变分  $\delta X_1|_{t=t_1}$ , 而 BE 段对应可动边界变分  $\delta X_1$ 。若边界  $\delta t_1$  变分很小,可以导出以下近似关系:

$$\delta X_1 \approx \delta X_1|_{t=t_1} + \left. \frac{dX_1}{dt} \right|_{t=t_1} \delta t_1 \quad (4)$$

按式(4)推导  $r, v$  的可动边界变分与等时变分在两端点时刻  $t_0, t_1$  上的关系,可以得到

$$\left. \begin{aligned} \delta r_0 &= \delta r_0|_{t=t_0} + v_0 \delta t_0 \\ \delta r_1 &= \delta r_1|_{t=t_1} + v_1 \delta t_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $v_0, v_1$  为对应  $t_0, t_1$  时刻飞行器的速度。

$$\left. \begin{aligned} \delta v_0 &= \delta v_0|_{t=t_0} + a_0 \delta t_0 \\ \delta v_1 &= \delta v_1|_{t=t_1} + a_1 \delta t_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中:  $a_0, a_1$  为对应  $t_0, t_1$  时刻飞行器的加速度。

结合式(2),式(5),式(6)可以求得在边界可动情况下两端点速度变分的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \delta v_0 &= \mathbf{F}(\delta r_0 - v_0 \delta t_0) + a_0 \delta t_0 + \mathbf{E}(\delta r_1 - v_1 \delta t_1) \\ \delta v_1 &= \mathbf{H}(\delta r_0 - v_0 \delta t_0) + a_1 \delta t_1 + \mathbf{G}(\delta r_1 - v_1 \delta t_1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### (2) 边界条件分析

对于从地球到其他天体的两脉冲转移轨道来说,影响所需速度增量的参数只有 2 个,即从地球发射时刻和到达目标天体的时刻。因此要设法消去式(7)中的  $\delta r_0$  和  $\delta r_1$  才能得到  $v_0, v_1$  对  $t_0, t_1$  的偏导数。

在研究行星际转移轨道时通常将整个轨道分为 3 段:从地球出发到离开地球影响球为逃逸段;从逃出地球影响球至到达目标天体影响球的转移过程为日心转移轨道段;从进入目标天体影响球到形成绕飞轨道的过程为俘获轨道段。由于行星引力的作用范围远远小于太阳引力的作用范围,所以逃逸轨道段和俘获轨道段在飞行距离和飞行时间上都远远小于日心转移轨道段。行星际飞行轨道初始设计的首要任务就是确定日心转移轨道。因此研究日心转移轨道时可以忽略地球和目标天体的引力作用,而将地球和目标天体看做空间中的两个按照各自星历运动的点。这样  $r_0$  和  $r_1$  应满足以下关系:

$$\left. \begin{aligned} r_0(t) &= \psi_0(t) \\ r_1(t) &= \psi_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:  $\psi_0(t)$  为地球的星历;  $\psi_1(t)$  为目标天体的星历。两端点都受到星历约束的状态轨线如图 3 所示。

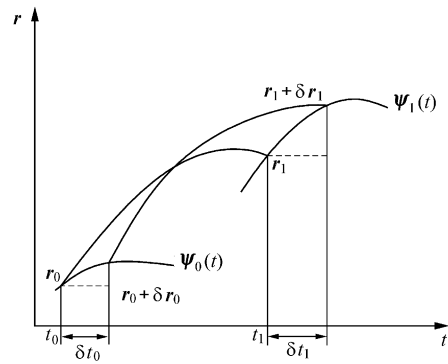


图 3 两端均受星历约束的状态轨线

Fig. 3 Time histories of states under the constrain of ephemeris

由图 3 可见  $r_0$  和  $r_1$  应满足:

$$\left. \begin{aligned} \delta r_0 &\approx v_{\text{Earth}}(t_0) \delta t_0 \\ \delta r_1 &\approx v_{\text{target}}(t_1) \delta t_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中:  $v_{\text{Earth}}(t_0)$  和  $v_{\text{target}}(t_1)$  分别为地球在  $t_0$  时刻的速度和目标天体在  $t_1$  时刻的速度。

将式(9)代入式(7)可得

$$\left. \begin{aligned} \delta v_0 &= [\mathbf{F}(v_{\text{Earth}}(t_0) - v_0) + a_0] \delta t_0 + \mathbf{E}(v_{\text{target}}(t_1) - v_1) \delta t_1 \\ \delta v_1 &= \mathbf{H}(v_{\text{Earth}}(t_0) - v_0) \delta t_0 + [\mathbf{a}_1 + \mathbf{G}(v_{\text{target}}(t_1) - v_1)] \delta t_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

根据式(10)可以得到以下偏导数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t_0} &= \mathbf{F}(v_{\text{Earth}}(t_0) - v_0) + a_0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t_1} &= \mathbf{E}(v_{\text{target}}(t_1) - v_1) \\ \frac{\partial v_1}{\partial t_0} &= \mathbf{H}(v_{\text{Earth}}(t_0) - v_0) \\ \frac{\partial v_1}{\partial t_1} &= a_1 + \mathbf{G}(v_{\text{target}}(t_1) - v_1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

### (3) 解析梯度及优化公式

两脉冲轨道转移的性能指标可定义为

$$\Delta v = \| v_0 - v_{\text{Earth}}(t_0) \| + \| v_1 - v_{\text{target}}(t_1) \| \quad (12)$$

下面推导所需速度增量对发射时刻的偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v}{\partial t_0} &= \frac{\partial \Delta v}{\partial v_0} \frac{\partial v_0}{\partial t_0} + \frac{\partial \Delta v}{\partial v_{\text{Earth}}(t_0)} \frac{\partial v_{\text{Earth}}(t_0)}{\partial t_0} + \\ &\frac{\partial \Delta v}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial t_0} + \frac{\partial \Delta v}{\partial v_{\text{target}}(t_1)} \frac{\partial v_{\text{target}}(t_1)}{\partial t_0} \end{aligned} \quad (13)$$

将式(11)中各偏导数代入式(13)中,可以得到

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial t_0} = (\mathbf{P}_0 \mathbf{F} + \mathbf{P}_1 \mathbf{H})(v_{\text{Earth}}(t_0) - v_0) \quad (14)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \frac{\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{\text{Earth}}(t_0)}{\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{\text{Earth}}(t_0)\|} \\ \mathbf{P}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{target}}(t_1)}{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{target}}(t_1)\|} \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)在很多文献中被称为“主矢量”,是轨道优化问题中的一个重要的参数。

同理,性能指标对到达时刻的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v}{\partial t_1} &= \frac{\partial \Delta v}{\partial \mathbf{v}_0} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t_1} + \frac{\partial \Delta v}{\partial \mathbf{v}_{\text{Earth}}(t_0)} \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{Earth}}(t_0)}{\partial t_1} + \\ &\frac{\partial \Delta v}{\partial \mathbf{v}_1} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Delta v}{\partial \mathbf{v}_{\text{target}}(t_1)} \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{target}}(t_1)}{\partial t_1} = \\ &(\mathbf{P}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_1 \mathbf{G})(\mathbf{v}_{\text{target}}(t_1) - \mathbf{v}_1) \end{aligned} \quad (16)$$

至此,已经求得了两脉冲转移所需的速度增量对于发射时刻、到达时刻的偏导数的解析表达形式。利用这两个导数信息并采用牛顿法进行优化,具体优化公式如下:

$$\begin{bmatrix} t_{0(\text{new})} \\ t_{1(\text{new})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{0(\text{old})} \\ t_{1(\text{old})} \end{bmatrix} - h \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta v}{\partial t_0} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial t_1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

搜索过程分2个阶段:第1阶段采用两体动力学模型,通过求解兰伯特问题获得转移轨道,利用解析状态转移矩阵对转移轨道进行校正,当趋近局部最优点时切换为第2阶段;第2阶段采用摄动模型,利用打靶法获得转移轨道<sup>[9]</sup>,通过数值方法计算状态转移矩阵,并对转移轨道进行优化,直到获得摄动模型下的最优转移轨道。

计算两脉冲星际转移轨道并不是要获得全局最优解,而是要获得搜索范围内存在的多个局部最优解。实际计算过程中采用随机生成多组<sup>[10]</sup>(通常5组)初值的方法进行搜索,这样基本可以覆盖搜索范围内的局部极小值点。

### 3 数值算例

为了检验本文提出的优化算法的正确性,将新算法的收敛过程和能量等高线图绘制在同一个坐标系下。为了便于比较,算例对从地球向火星两脉冲转移轨道进行了优化。

图4中横轴表示从地球发射的时刻,范围为2007年8月28日至2007年10月1日;纵轴表示到达火星的时刻,范围为2008年8月1日至2008年11月1日。图中圆点所组成的轨迹为使用本文提出的优化算法时性能指标的下降过程。由图可见圆点不断地向等高线的谷底运动,并最终收敛于极小值点。采用本文提出的优化方法时

可以得到和能量等高线法相当的结果。算例中优化前发射时刻为2007年9月28日;到达时刻为2008年10月26日,所需速度增量为6.9167 km/s。优化后的发射时刻为2007年9月13日8时27分;到达时刻为2008年8月24日17时55分,所需速度增量为6.1692 km/s。所需的速度增量比优化前减小了0.7474 km/s。在绘制能量等高线图时发射时段和到达时段均被分成了18个离散节点,即计算了324个交叉点上的性能指标,计算共耗时24.3 s。而采用本文提出的优化算法时共迭代112步,计算共耗时8.7 s,并且采用本文提出的方法时可以对计算精度进行控制。以上算例证明本文提出的优化算法可以快速使性能指标到达极小值。该算法是一种有效的两脉冲行星际转移轨道优化方法。

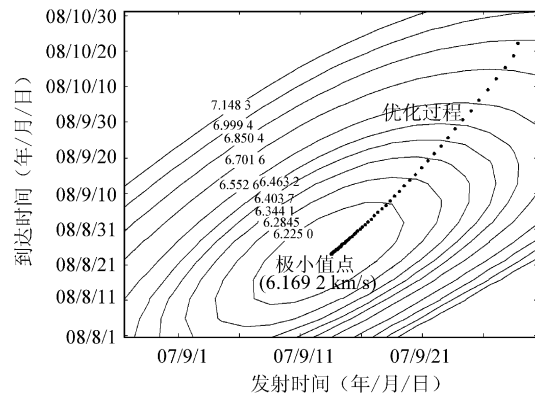


图4 迭代收敛过程

Fig. 4 Convergence process of iteration

## 4 结论

通过利用状态转移矩阵的性质并结合变分理论给出了一种行星际最优两脉冲转移轨道的计算方法。此方法既适用于两体模型又适用于摄动模型,且对各种模型具有相同的表达形式。此方法可代替传统的“能量等高线法”进行最优两脉冲轨道搜索。最后通过数值算例对该算法进行了验证,证明该算法与“能量等高线法”相比具有计算速度快、计算精度可以控制的优点,是一种求解最优两脉冲转移轨道的有效方法。同时该方法对各种轨道拦截问题和考虑各种摄动影响下的精确轨道优化也具有重要的参考价值。

## 参考文献

- [1] Robert W, Farquhar R W. NEAR mission overview and trajectory design[C]//AAS/AIAA Astrodynamics Con-

- ference. Halifax, Nova Scotia; AAS, 1995: 8-14.
- [2] Dunham D W. NEAR mission design[R]. Johns Hopkins APL Technical Digest, 2002,23(1):18-32.
- [3] Sims J A. Delta-V gravity-assist trajectory design: theory and practice[D]. West Lafayette, US: Purdue University, 1996.
- [4] 艾利斯哥尔兹. 变分法[M]. 苏联国立技术理论出版社, 1956.  
Alice Gleze. Variational method [M]. Press of National Technical Knowledge of CCCP, 1956. (in Chinese)
- [5] Carl G. Optimization of interplanetary trajectories with unpowered planetary swingbys [J]. AAS, 1987,65(1):253-272.
- [6] Damario L A, Sackett L L, Stanford R H, et al. Optimization of multiple flyby trajectories [J]. AAS, 1979, 40(1):459-494.
- [7] Pastrone D. Indirect optimization method for round-trip mars trajectories [J]. AAS, 1996,90(1):85-91.
- [8] Montenbruck O, Gill E. Satellite orbits, models, methods and applications[M]. Berlin: Springer, 2000.
- [9] 李立涛,张振民,杨涤. 奔月转移轨道的快速设计方法研究[J]. 航空学报,2003,24(2): 152-156.  
Li Litao, Zhang Zhenmin, Yang Di. Study of rapid design method for cislunar transfer trajectory[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2003,24(2): 152-156. (in Chinese)
- [10] Ren Y, Cui P Y, Luan E J. Exploration opportunity search for near Earth small body[C]// IEEE 25th Chinese Control Conference. Harbin: IEEE, 2006: 1864-1868.

**作者简介:**

任远(1980—) 男,博士研究生。主要研究方向:小推力飞行器轨道设计与优化。  
Tel:0451-86418320-410  
E-mail:missiles400@yahoo.com.cn

(责任编辑:刘振国)