

液滴变形能鞍点计算的数值方法

李素梅 吴锡真

液滴变形能 $E(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_6)$ 是一组变形参数 $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_6$ 的函数。它是由核子间相互排斥的库仑能 B_c ，核子间短程作用所产生的表面能 B_s 以及作为 B_s 修正的曲率能 B_{curv} 组成。本文使用二次多项式逼近方法，计算了液滴变形能鞍点这一多元不稳定极值问题，并验证了极大值方向。对重核计算结果与已有的结果符合得较好。

一、基本公式

1. 原子核的能量 E

根据液滴模型，由下面的公式给出 E ：

$$E = a_s A^{2/3} \left[1 - K \frac{(N-Z)^2}{A^2} \right] (B_s - 1) + a_{\text{curv}} A^{1/3} \left[1 - K \frac{(N-Z)^2}{A^2} \right] (B_{\text{curv}} - 1) + a_c Z^2 A^{-1/3} (B_c - 1). \quad (1.1)$$

其中 $a_s, a_c, a_{\text{curv}}, K$ 是常数； A, Z, N 分别是原子核的核子数、质子数、中子数； B_s 是核子之间短程作用所产生的表面能，它是使液滴保持体积不变，表面积最小； B_c 是核子之间相互排斥的库仑能，它使液滴变形； B_{curv} 作为 B_s 修正的曲率能。它们均是变形参数 $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_6$ 的函数。

2. 表面能 B_s

$$B_s = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{R(\theta)}{R_0} \left[\left(\frac{R(\theta)}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{d \left(\frac{R(\theta)}{R_0} \right)}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} \sin \theta d\theta. \quad (1.2)$$

这里 $\frac{R(\theta)}{R_0}$ 是描述液滴形状的半径：

$$\frac{R(\theta)}{R_0} = \left(\frac{W_0}{W} \right) \left[1 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \cos^2 \theta \right]^{-1/2} [f(\cos \theta)]^{-1/2},$$

而

$$f(\cos \theta) = 1 - \frac{2}{3} \varepsilon_2 P_2(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_1 P_1(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_3 P_3(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_4 P_4(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_5 P_5(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_6 P_6(\cos \theta_t),$$

其中

$$\cos \theta_t = \cos \theta \frac{\left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon_2 \right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \cos^2 \theta \right)^{1/2}}.$$

$P_l(\cos \theta_t)$ 为第 l 阶勒让德多项式。 ε_l 值满足下式:

$$\int_{-1}^1 \left[1 - \frac{2}{3} \varepsilon_2 P_2(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_1 P_1(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_3 P_3(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_4 P_4(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_5 P_5(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_6 P_6(\cos \theta_t) \right]^{-2} \cos \theta_t d \cos \theta_t = 0.$$

$\frac{\overset{\circ}{W}_0}{W_0}$ 为球形谐振子壳的能量与变形核谐振子壳能量之比, 它由下式给出:

$$\left(\frac{\overset{\circ}{W}_0}{W_0} \right)^3 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon_2 \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 \right)} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{3} \varepsilon_2 P_2(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_1 P_1(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_3 P_3(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_4 P_4(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_5 P_5(\cos \theta_t) + 2 \varepsilon_6 P_6(\cos \theta_t) \right]^{-3/2} d \cos \theta_t.$$

$$\frac{d \left(\frac{R(\theta)}{R_0} \right)}{d \theta} = - \left(\frac{R(\theta)}{R_0} \right) \left\{ \varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta \left[1 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \cos^2 \theta \right]^{-1} + \frac{1}{2} [f(\cos \theta)]^{-1} \cdot \frac{d[f(\cos \theta)]}{d \theta} \right\},$$

$$\frac{d f(\cos \theta)}{d \theta} = - \frac{2}{3} \varepsilon_2 \frac{d P_2(\cos \theta_t)}{d \theta} + 2 \varepsilon_1 \frac{d P_1(\cos \theta_t)}{d \theta} + 2 \varepsilon_3 \frac{d P_3(\cos \theta_t)}{d \theta} + 2 \varepsilon_4 \frac{d P_4(\cos \theta_t)}{d \theta} + 2 \varepsilon_5 \frac{d P_5(\cos \theta_t)}{d \theta} + 2 \varepsilon_6 \frac{d P_6(\cos \theta_t)}{d \theta}.$$

3. 库仑能 B_c

$$B_c = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{V(R)}{V_0} \left(\frac{R(\theta)}{R_0} \right)^3 \sin \theta d \theta, \quad (1.3)$$

其中 $\frac{V(R)}{V_0}$ 是核表面的位, 它由下面公式给出:

$$\frac{V(R)}{V_0} = \frac{3}{2\pi} \int_\pi^0 \frac{\rho' \left[(\rho + \rho') \frac{dz'}{d\theta'} + (z - z') \frac{d\rho'}{d\theta'} \right] K(k)}{[(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} d\theta - \frac{3}{2\pi} \int_\pi^0 \frac{2 \rho \rho' \frac{dz'}{d\theta'} D(k)}{[(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} d\theta'.$$

$$\rho = \left(\frac{R(\theta)}{R_0} \right) \sin \theta, \quad z = \left(\frac{R(\theta)}{R_0} \right) \cos \theta,$$

$$\rho' = \left(\frac{R'(\theta')}{R_0} \right) \sin \theta', \quad z' = \left(\frac{R'(\theta')}{R_0} \right) \cos \theta',$$

$$\frac{d \left(\frac{R'(\theta')}{R_0} \right)}{d \theta'} = - \left(\frac{R'(\theta')}{R_0} \right) \left\{ \varepsilon_2 \cos \theta' \sin \theta' \left[1 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \cos^2 \theta' \right]^{-1} + \right.$$

$$\frac{1}{2} [f(\cos \theta')]^{-1} \frac{df(\cos \theta')}{d\theta'} \left. \right\},$$

$$\frac{df(\cos \theta')}{d\theta'} = -\frac{2}{3} \varepsilon_2 \frac{dP_2(\cos \theta'_t)}{d\theta'} + 2 \varepsilon_1 \frac{dP_1(\cos \theta'_t)}{d\theta'} + 2 \varepsilon_3 \frac{dP_3(\cos \theta'_t)}{d\theta'}$$

$$+ 2 \varepsilon_4 \frac{dP_4(\cos \theta'_t)}{d\theta'} + 2 \varepsilon_5 \frac{dP_5(\cos \theta'_t)}{d\theta'} + 2 \varepsilon_6 \frac{dP_6(\cos \theta'_t)}{d\theta'},$$

$$\cos \theta'_t = \cos \theta' \frac{\left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon_2\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \cos^2 \theta'\right)^{1/2}},$$

$$D(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2},$$

$$k^2 = \frac{4 \rho \rho'}{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}.$$

而 $K(k)$ 和 $E(k)$ 为第一类和第二类全椭圆函数, 即:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{[1 - k^2 \sin^2 x]^{1/2}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} [1 - k^2 \sin^2 x]^{1/2} dx.$$

4. 曲率能 B_{curv}

$$B_{\text{curv}} = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{\rho \cdot \frac{d^2 \rho}{dz^2}}{1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2} \right) \frac{dz}{d\theta} d\theta. \quad (1.4)$$

其中,

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} = \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} \bigg/ \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 - \frac{d^2 z}{d\theta^2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \bigg/ \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \cos \theta \frac{d\left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right)}{d\theta} - \left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right) \sin \theta,$$

$$\rho = \left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right) \sin \theta,$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right) \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{d\left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right)}{d\theta},$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{d\theta} \bigg/ \frac{dz}{d\theta},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\left(\frac{R(\theta)}{R_0}\right)}{d\theta^2} &= \frac{R(\theta)}{R_0} \left\{ \varepsilon_2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \left[1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 - \varepsilon_2\cos^2\theta \right]^{-1} + 3\varepsilon_2^2\cos^2\theta \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin^2\theta \left[1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 - \varepsilon_2\cos^2\theta \right]^{-2} + \varepsilon_2\cos\theta\sin\theta \left[1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 - \varepsilon_2\cos^2\theta \right]^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [f(\cos\theta)]^{-1} \cdot \frac{df(\cos\theta)}{d\theta} + \frac{3}{4}[f(\cos\theta)]^{-2} \left[\frac{df(\cos\theta)}{d\theta} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}[f(\cos\theta)]^{-1} \frac{d^2f(\cos\theta)}{d\theta^2} \right\}, \\ \frac{d^2f(\cos\theta)}{d\theta^2} &= \left[-\frac{2}{3}\varepsilon_2 \frac{d^2P_2(\cos\theta_t)}{d\theta^2} + 2\varepsilon_1 \frac{d^2P_1(\cos\theta_t)}{d\theta^2} + 2\varepsilon_3 \frac{d^2P_3(\cos\theta_t)}{d\theta^2} \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon_4 \frac{d^2P_4(\cos\theta_t)}{d\theta^2} + 2\varepsilon_5 \frac{d^2P_5(\cos\theta_t)}{d\theta^2} + 2\varepsilon_6 \frac{d^2P_6(\cos\theta_t)}{d\theta^2} \right]. \end{aligned}$$

二、计算方法

1. 求极值(鞍点)方法

在 5 维参数空间中, 用向量 $\vec{\varepsilon}$ 表示 5 个待求参数 $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_6$, 用函数 $x = E(\vec{\varepsilon})$ 表示一个超曲面。问题是找出这样的向量 $\vec{\varepsilon}$, 使得

$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, 6.$$

直接求解上述问题是比较困难的。为此, 在鞍点 $\vec{\varepsilon}$ 附近我们利用二次多项式 $\bar{E}(\vec{\varepsilon})$ 代替 $E(\vec{\varepsilon})$ ^[1], 这样求 $E(\vec{\varepsilon})$ 的极值问题变成求 $\bar{E}(\vec{\varepsilon})$ 的极值问题。求 $\bar{E}(\vec{\varepsilon})$ 的极值比较容易, 一般说来, 事先给出极值的初始坐标 ε_i , 计算在 ε_i 的 δ 邻域内液滴能的函数值, 并且用这些座标点的函数拟合二次表达式, 再确定它的极值位置。利用这个极值位置重复计算, 一直到相邻两次座标点之差比指定误差小时, 则迭代结束, 并把后一次的座标点做为极值点。

2. 多项式的构成

(1) 二次多项式 $\bar{E}(\vec{\varepsilon})$ 的形式 用 M 个变数可以构成 $(M^2 + 3M + 2)/2$ 项的二次多项式, 于是当 $M = 5$ 时, $\bar{E}(\vec{\varepsilon})$ 是由 21 项组成的二次多项式, 即

$$\begin{aligned} \bar{E}(\vec{\varepsilon}) &= a_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \dots + a_6\varepsilon_6 + a_7\varepsilon_2\varepsilon_3 + \dots + a_{10}\varepsilon_2\varepsilon_6 \\ &\quad + a_{11}\varepsilon_3\varepsilon_4 + \dots + a_{13}\varepsilon_3\varepsilon_6 + a_{14}\varepsilon_4\varepsilon_5 + a_{15}\varepsilon_4\varepsilon_6 + a_{16}\varepsilon_5\varepsilon_6 + \\ &\quad a_{17}\varepsilon_2^2 + a_{18}\varepsilon_3^2 + a_{19}\varepsilon_4^2 + a_{20}\varepsilon_5^2 + a_{21}\varepsilon_6^2. \end{aligned}$$

(2) $\bar{E}(\vec{\varepsilon})$ 多项式系数 a_1, a_2, \dots, a_{21} 的确定 为了确定系数 a_1, a_2, \dots, a_{21} , 需要根据 (1.1) 式在 $(M^2 + 3M + 2)/2$ 个点上计算液滴能 E 的值, 并将这些值做为线性方程组的右端项。对于点的选取我们是这样得到的: 用 M 个变量的每一个加一个增量和减去一个增量, 共有 $2M$ 个; 以及变量的增量成对出现, 共有 $M(M-1)/2$, 用不增不减的点补充最后一点。用这些点构成 21 阶线性方程组的系数方阵, 然后用全主元素消去法求解, 得到

系数 a_1, a_2, \dots, a_{21} 。

在这里增量 $\Delta\varepsilon$ 的值为

$$\Delta\varepsilon_2 = \pm 0.01, \Delta\varepsilon_3 = \pm 0.001, \dots, \Delta\varepsilon_6 = \pm 0.001.$$

(3) 迭代法求极值点 为了满足一定的精度,对极值点需要迭代,即给出极值点的初始座标 ε_i ,按上面所述的方法构成多项式 $\bar{E}(\varepsilon)$ 以后,用全主元素消去法解下列方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon_2} = 0, \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon_3} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon_6} = 0. \end{cases}$$

并将其解做为极值点的第一次迭代,按上述(2),(3)的方法重复计算,一直到

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2^{n+1} - \varepsilon_2^n| &\leq 0.005, \\ |\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n| &\leq 0.001, \quad i=3,4,5,6, \end{aligned}$$

成立时,则迭代结束,并把 $\varepsilon_i^{n+1}, i=2,3, \dots, 6$,作为极值点。这里 n 为迭代次数。

(4) 积分计算 在求极值点的过程中,需要根据(1.1)式计算函数 E 的值,因此首先求出 B_s, B_c, B_{curv} 的积分值。积分值 B_s, B_{curv} 是用辛卜生公式计算的。积分 B_c 比较复杂,注意解决以下问题:

当 $z' = z, \rho = \rho'$ 时, $K(k)$ 发散,这时将 $\frac{V(R)}{V_0}$ 的整个被积函数取为: $\rho \frac{dz'}{d\theta'}$ 。

当 $\theta = 0, \pi$, 或 $\theta' = 0, \pi$ 时, 取 $D(0) = \frac{\pi}{4}, K(0) = \frac{\pi}{2}$ 。

椭圆函数 $K(k), E(k)$ 利用渐近公式计算,即

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-k^2 \sin^2 x)^{1/2}} \simeq \sum_{j=0}^4 a_j (AM)^j - \left(\sum_{j=0}^4 b_j (AM)^j \right) \ln(AM),$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 x)^{1/2} dx \simeq 1 + \sum_{j=1}^4 c_j (AM)^j - \left(\sum_{j=1}^4 d_j (AM)^j \right) \ln(AM).$$

其中,

$$\begin{aligned} AM &= 1 - k^2, \quad 0 \leq k \leq 1; \\ a_0 &= 1.38629436112, \quad b_0 = 0.5; \\ a_1 &= 0.09666344259, \quad b_1 = 0.12498593597; \\ a_2 &= 0.03590092383, \quad b_2 = 0.06880248576; \\ a_3 &= 0.03742563713, \quad b_3 = 0.03328355346; \\ a_4 &= 0.01451196212, \quad b_4 = 0.004417817012; \\ c_1 &= 0.44325141463, \quad d_1 = 0.24998368310; \\ c_2 &= 0.06260601220, \quad d_2 = 0.09200180037; \end{aligned}$$

$$c_3=0.04757383546, d_3=0.04069697526;$$

$$c_4=0.01736506451, d_4=0.00526449639.$$

并用高斯公式计算 B_c , 点数取 96 个。

三、计算结果的分析与讨论

按上述方法, 在 NOVA-840 机上用 FORTRAN-5 语言编制了计算程序, 并进行了计算, 计算情况列在表 1 和表 2 上。

表 1 计算参数及公式形式

方案 编号	方 案 参 数							变 量 迭 代 初 值					计 算 公 式 形 式	
	a_c	a_g	a_{curv}	K	A	Z	N	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	修正项 B_{curv}	变量个数
1	0.75	17.8	6.5	1.7826	252	100	152	0.6	0	0	0	0	有	3
2	0.75	17.8	6.5	1.7826	252	100	152	0.8	0	0	0	0	有	3
3	0.768	17.8	6.5	1.7826	252	100	152	0.6	0	0	0	0	有	3
4	0.717	17.8	6.5	1.7826	252	100	152	0.6	0	0	0	0	有	5
5	0.75	17.8	6.5	1.7826	235	92	143	0.8	0	0	0	0	有	3
6	0.768	17.8	6.5	1.7826	235	92	143	0.8	0	0	0	0	有	3
7	0.717	17.8	6.5	1.7826	235	92	143	0.8	0	0	0	0	有	3
8	0.717	17.8	6.5	1.7826	235	92	143	0.8	0	0	0	0	无	3
9	0.717	17.8	6.5	1.7826	238	92	146	0.8	0	0	0	0	无	3
10	0.717	17.8	6.5	1.7826	238	92	146	0.618	0	0.159	0	-0.0719	无	3
11	0.717	17.8	6.5	1.7826	238	92	146	0.711	0	0.105	0	-0.019	无	3
12	0.75	17.8	6.5	1.7826	239	94	145	0.8	0	0	0	0	有	3
13	0.75	17.8	6.5	1.7826	232	90	132	0.8	0	0	0	0	有	3

表 2 计 算 结 果

方案 编号	计 算 结 果						迭代次数	极大值方向
	极 值	鞍 点 位 置						
1	1.1814	$\varepsilon_2=0.51790,$	—	$\varepsilon_4=0.0526,$	—	$\varepsilon_6=-0.00577$	3	ε_2
2	找不到	—	—	—	—	—	—	—
3	1.14	$\varepsilon_2=0.44,$	—	$\varepsilon_4=0.03221,$	—	$\varepsilon_6=-0.00309$	3	ε_2
4	3.6828	$\varepsilon_2=0.66,$	$\varepsilon_3=0.00368,$	$\varepsilon_4=0.089,$	$\varepsilon_5=-0.00192,$	$\varepsilon_6=-0.013$	3	沿某个方向
5	6.167	$\varepsilon_2=0.815,$	—	$\varepsilon_4=0.14358,$	—	$\varepsilon_6=-0.0297$	4	沿某个方向
6	4.619	$\varepsilon_2=0.7304,$	—	$\varepsilon_4=0.118,$	—	$\varepsilon_6=-0.0196$	4	沿某个方向
7	找不到	—	—	—	—	—	—	—
8	4.416	$\varepsilon_2=0.712,$	—	$\varepsilon_4=0.1056,$	—	$\varepsilon_6=-0.0179$	5	沿某个方向
9	4.4696	$\varepsilon_2=0.713,$	—	$\varepsilon_4=0.1058,$	—	$\varepsilon_6=-0.0179$	5	沿某个方向
10	4.4692	$\varepsilon_2=0.713,$	—	$\varepsilon_4=0.1057,$	—	$\varepsilon_6=-0.0178$	3	沿某个方向
11	4.469	$\varepsilon_2=0.713,$	—	$\varepsilon_4=0.1058,$	—	$\varepsilon_6=-0.0179$	1	沿某个方向
12	4.6983	$\varepsilon_2=0.73,$	—	$\varepsilon_4=0.112,$	—	$\varepsilon_6=-0.0197$	3	沿某个方向
13	找不到	—	—	—	—	—	—	—

由表 2 可得出以下两点: 一是系数 a_c, a_g, a_{curv}, K 的选取对计算结果影响较大, 尤其是在含有修正项 B_{curv} 时, a_c 的影响更为主要。对它取不同的值, 就可导致迭代不收敛, 或

者收敛而改变极值及相应的极值点。二是迭代变量初值的选取好坏影响收敛，或者影响收敛速度。为了检验方法及程序的可靠性还做了如下计算：

第一，验证 $\frac{\partial \bar{E}}{\partial \varepsilon_i} = 0$ 的点 ε_i 为 $E(\vec{\varepsilon})$ 的鞍点，并存在一个极大方向。

为验证这一点，首先看曲面 $\bar{E}(\vec{\varepsilon})$ 的二次项系数构成的矩阵是恒定还是不恒定(前者特征值全同号，后者有正有负)。如果不定，则二次曲面是双曲型的，且极值点为鞍点。例如，在迭代求 $A=235$, $Z=92$, $N=143$ 的鞍点时，三个变量的初值依次取 $\varepsilon_2=0.8$, $\varepsilon_4=0.05$, $\varepsilon_6=0.005$ ，迭代最后一次，二次项系数构成的对称矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} -10.511 & -\frac{281.1}{2} & -\frac{201.58}{2} \\ -\frac{281.1}{2} & 626.1 & \frac{1293.56}{2} \\ -\frac{201.58}{2} & \frac{1293.56}{2} & 1318.7 \end{pmatrix},$$

其特征根为：

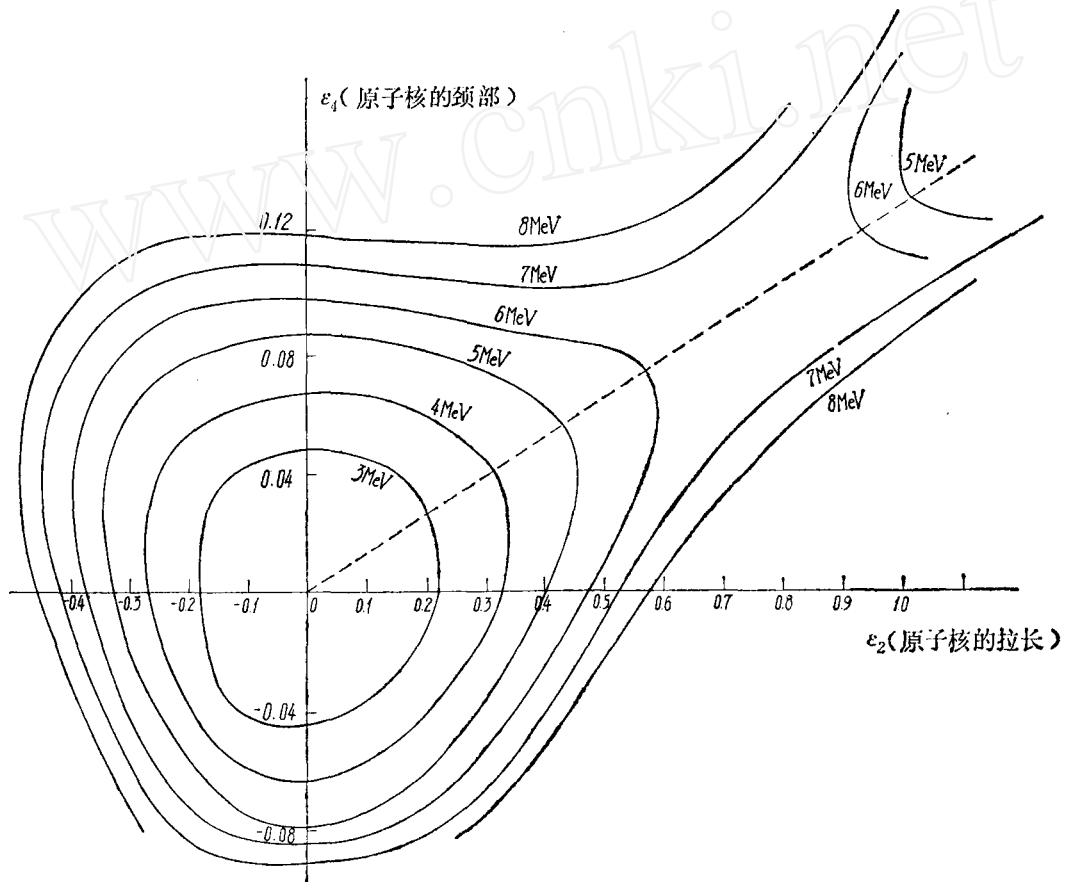


图 1 ^{235}U 的 $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_4$ 位能曲面图
 $a_6=0.75$, $a_8=17.8$, $a_{\text{curv}}=6.5$, $K=1.7826$; 实线为能量等值线，虚线表示裂变时原子核所走的路途。图 2 同。

$$\lambda_1 = 256.707, \lambda_2 = -22.17629, \lambda_3 = 1720.8124.$$

由上可以得出 $\vec{E}(\vec{\varepsilon})$ 的曲面是双曲型的，即极值点为曲面 $\vec{E}(\vec{\varepsilon})$ 的鞍点，可近似做曲面 $E(\varepsilon)$ 的鞍点。

极大值方向有时明显，有时不明显(见表 2)，但它却隐含了极大值的方向，即在极值点附近寻找使 E 值小于极值 E 的一组点 ε_i ，然后将其点与极值点连线，就可确定一个近似极大值方向。

第二，参数取 $a_c = 0.75, 0.717, a_s = 17.8, a_{\text{curv}} = 6.5, K = 1.7826$ 时，对 $^{235}\text{U}, ^{252}\text{Fm}$ 的液滴能作成随 $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ 变化的曲面(图 1—3)。曲面的变化趋势符合物理过程规律。从静力学观点正确反映了原子核裂变的路途。

对 $a_c = 0.75$ 时，计算的极值 E 一部分结果与文献[1~4]的结果一起列于表 3 中。可以看出，符合情况较好。

表 3 $a_c = 0.75$ 时计算的 E 值比较(单位：兆电子伏)

元 素	本 工 作	[1]	[2]	[3]	[4]
^{252}Fm	1.815	2.102	1.83		
^{235}U	6.167	6.858		6.14	5.027
^{239}Pu	4.6983	5.432			3.664

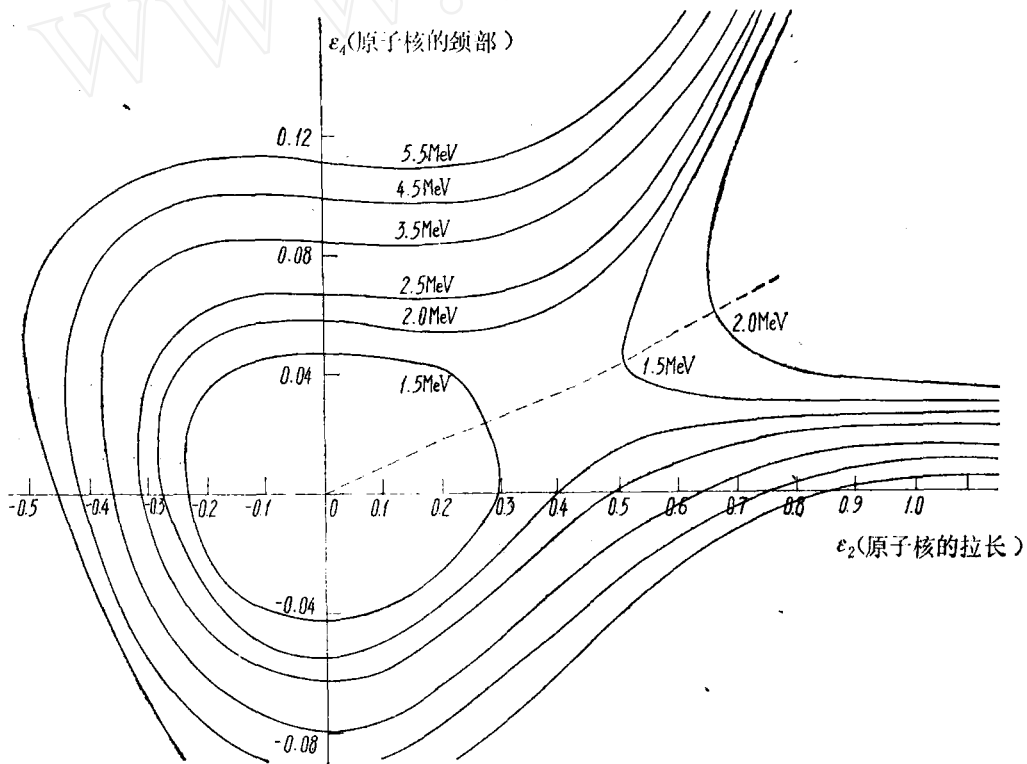


图 2 ^{252}Fm 的 $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_4$ 位能曲面图

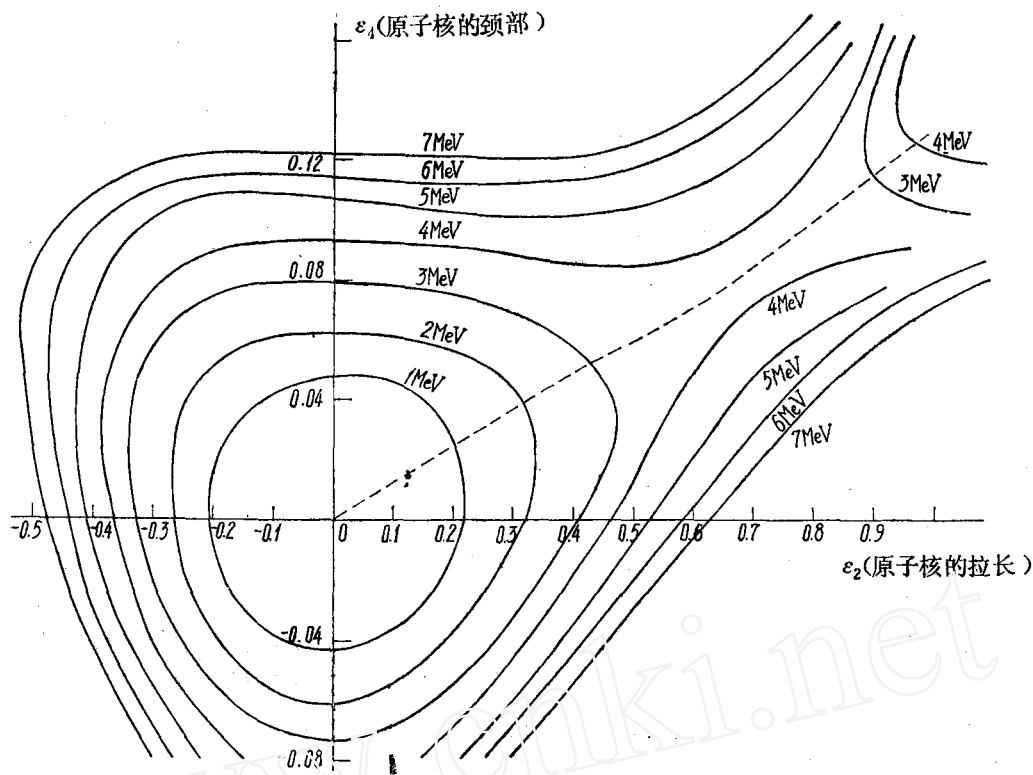


图3 ^{252}Fm 的 $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_4$ 位能曲面图
 $a_c = 0.717$, 其余参数及图例同图1。

结论。本程序使用的方法是可靠的。由于描述液滴形状的矢径 $R(\theta)/R_0$ 的形式对变量 ε_2 有一定的限制，因而此程序仅适于重核。从表3还可以看出系数 a_c 取 0.75 比较合适。

最后，作者对华大平、严柏龄同志在数学方法上的有益讨论表示感谢。

参 考 文 献

- [1] S. Cohen & W. J. Swiatecki, *Ann. Phys.*, **22**, 406 (1963).
- [2] S. G. Nilsson, *Nucl. Phys.*, **A131**, 1 (1969).
- [3] V. S. Barashenkov, *Nucl. Phys.*, **A 206** 131 (1973).
- [4] W. Myers & W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys.*, **81**, 1 (1966).

(上接第 74 页)

- [8] Neutron Cross Sections, Vol. 1, Resonance Parameters, BNL-325, 3rd Edition, 1973.
- [9] W. H. Walker, AECL-3037 (1969).
- [10] T. B. Ryves, *J. Nucl. Energy*, **25**, 129 (1971).
- [11] W. L. Zijp, Nuclear Data for Neutron Metrology, Proc. Symp. Paris, Vol. 2, IAEA, Vienna, 1973, p. 271.
- [12] T. B. Ryves, *J. Nucl. Energy*, **24**, 35 (1970).