带权的排序问题和二次规划

张　倩

(上海第二工业大学 应用数学系, 上海 200051)

摘　要: 把带权的排序问题 $1\|\sum w_jC_j$ 表示成一个二次规划, 证明这个二次规划最优解的充分必要条件是成立 WSPT 规则, 从而也证明 WSPT 规则是带权排序问题的充分必要条件. 同时还证明了 $1\|\sum w_jC_j$ 问题目标函数的的最小值是 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} p_{\pi(j)}w_{\pi(i)}$, 为用二次规划研究其他带权的排序问题打下基础.

关键词: 排序; 二次规划; WSPT 规则

中图分类号: O223　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(2001)03-0026-06

0 引 言

近年来, 用线性规划、二次规划和半定规划等数学规划方法来研究组合最优化问题(包括排序问题)得到了不少新的成果[1~8,10~14]. 1995年 GOEMANS 和 WILLIAMSON[2]把图论中最大割问题松弛成为半定规划, 再用随机化方法对这个问题提出近似算法, 使得到的近似算法的界达到0.651, 改进了当时最好的界0.5. 这是第一次用半定规划成功研究组合最优化问题. 这个成果引起了国际学术界的关注. 叶荫宇用半定规划对最大割问题提出的新的算法, 使近似算法的界达到了0.699[11]. 韩继业[5]和徐大川[10]用半定规划对不同推广的最大割问题分别提出算法使近似解的界分别为0.656和0.6445. 因此, 用二次规划和半定规划来研究 NP 困难的组合最优化问题是一个很有前途的方向.

我们知道 $1\|\sum C_j$ 是一个经典的排序问题, 其最优解的充分必要条件是 SPT 序, 即把所有的工件按它们的加工时间 p_j 的非降次序排列, 并按这一次序对各工件进行加工, 就能使所有工件的完工时间之和达到最小, 反之亦然. 罗守成、张峰、唐国春[6]用二次规划描述单机排序问题, 他们把不带权的排序问题 $1\|\sum C_j$ 转化成指派问题, 从而用指派问题的匈牙利算法证明 SPT 序是问题 $1\|\sum C_j$ 最优解的充分条件[6]. 这个结论似乎很平凡而且并没有证明必要性, 但对于用二次规划来研究排序问题是一个很有意义的进展. 正是在此文的基础上, 张峰、唐国春[12]用凸二次规划松弛的方法研究加工时间的可控排序问题 $1|cpt|\sum w_jC_j+\sum C_jt_j$, 这里 cpt 代表"加工时间可控(controllable processing times)". 张峰、唐国春[13]用凸二次规划松弛的方法对这个 NP 难题提出界为1.5的多项式时间近似算法. 他们还把这个方法运用到平行机排序问题, 并得到相应的结果[13].

早在1956年 SMITH[9]就证明带权的排序问题 $1\|\sum w_jC_j$ 存在一个最优解是 WSPT(Weighted

收稿日期: 2001-04-10

作者简介: 张　倩(1965-), 女, 上海第二工业大学应用数学系讲师.

Shortest Processing Time）序，即把所有的工件按 p_j/w_j 的非降次序排列，并按这一次序对各工件进行加工，就能使所有工件加权的完工时间之和达到最小．笔者用二次规划不但重新证明这个结论，而且证明序是最优解的必要条件，还证明问题 $1\|\sum w_jC_j$ 的最小值是 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}p_{\pi(j)}w_{\pi(i)}$，其中 $\pi=\{\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n)\}$ 是 WSPT 序，从而为用二次规划研究其他带权的排序问题打下基础．

1　问题的提出

设有 n 个工件的工件集 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$ 要在同一台机器上加工．设工件 $J_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的加工时间为 p_j，权为 w_j，完工时间为 C_j．这里权表示工件的"重要性"，是取正数值．我们考虑的单机排序问题 $1\|\sum w_jC_j$ 是要确定一个排法使所有工件的加权完工时间之和 $\sum_{J_j\in J}w_jC_j$ 为最小．

2　二次规划

2.1　约束条件

记 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)^T$ 和 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 分别表示工件集 J 的加工时间向量和权向量．以 n 阶方阵 $X_{n\times n}=(x_{ij})$ 表示工件集 J 中的工件的加工状态，其中

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{表示工件 } J_j \text{ 在机器上排在第 } i \text{ 个位置上加工}\\ 0 & \text{表示机器上第 } i \text{ 个位置上加工的工件不是 } J_j\end{cases}$$

由于每个工件在机器上只能加工一次，机器每次只能加工一个工件，而工件在任何时刻只能处于加工或不加工状态，所以对 x_{ij} 有如下的约束：

$$x_{ij}\in\{0,1\},\quad \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\ (j=1,2,\cdots,n),\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{2.1}$$

下面的引理是不证自明的．

引理1　n 阶方阵 $X_{n\times n}=(x_{ij})$ 所描述的工件加工状态能够作为任何单机排序问题的可行解的充分必要条件 $X_{n\times n}$ 为满足约束条件(2.1)．

2.2　目标函数

对 $X_{n\times n}=(x_{ij})$，我们记 $X_{i\cdot}$ 为其第 i 行的行向量，$X_{\cdot j}$ 为第 j 列的列向量，则：

(1) 机器上第 l 个工件的加工时间为 $\sum_{k=1}^{n}x_{lk}p_k$；

(2) 机器上前 t 个工件的加工时间之和为 $u_t=\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}x_{lk}p_k$，此和即为第 t 个工件的完工时间；

(3) 工件 J_j 的完工时间也可表示为 $\sum_{t=1}^{n}u_tx_{tj}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}x_{lk}p_kx_{tj}$；

(4) 因此工件 J_j 的加权完工时间为 $w_j\sum_{t=1}^{n}u_tx_{tj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}x_{lk}p_kw_jx_{tj}$；

(5) 所有工件的加权完工时间之和 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}x_{lk}p_kw_jx_{tj}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}X_{l\cdot}PW^TX_{t\cdot}^T$.

2.3　二次规划

由以上讨论知排序问题 $1\|\sum w_jC_j$ 等价于下列整数的二次规划：

$$\min \sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t} X_{l.}PW^{T}X_{l.}^{T}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, & i=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}\in\{0,1\}, & i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{2.2}$$

3 WSPT 的最优性

定理2 排列 $\pi=(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$ 是问题 $1\|\sum w_jC_j$ 的最优排列的充分必要条件是 WSPT 规则成立,即成立 $\frac{p_{\pi(1)}}{w_{\pi(1)}}\leqslant\frac{p_{\pi(2)}}{w_{\pi(2)}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_{\pi(n)}}{w_{\pi(n)}}$.

3.1 充分性的证明

为了简化计算我们假设工件已满足 WSPT 序,即已按 $\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_n}{w_n}$ 排列了,这时只要证明:如果 $\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_n}{w_n}$,则 $X_{n\times n}=I$(I 为单位阵)为二次规划(2.2)的的最优解,也就是 $\pi=(1,2,\cdots,n)$ 为 $1\|\sum w_jC_j$ 的最优序. 为此,下面我们先看下面两个引理.

引理3 如果 $X=I$,则

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t} X_{l.}PW^{T}X_{l.}^{T}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t} p_lw_t. \tag{3.1}$$

引理4 如果 $\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_n}{w_n}$ 则有 $\min\limits_{k=1}^{n}R(k)=R(n)=0$,其中

$$R(k)=\begin{cases}(p_{k+1}+\cdots+p_n)w_k-p_k(w_{k+1}+\cdots+w_n), & k=1,2,\cdots,n-1\\ 0, & k=n\end{cases} \tag{3.2}$$

这两个引理的证明都较简单.将条件代入即可得,有了上面两个引理我们用数学归纳法来证明定理的充分性.

当 $n=2$ 时:表示这台机器加工两个工件,这时工件加工的次序只有两种:$\pi=(1,2)$ 或 $\pi=(2,1)$. 当加工次序为 $\pi=(1,2)$,即 $X_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,代入有:

$$\sum_{t=1}^{2}\sum_{l=1}^{t} X_{l.}PW^{T}X_{l.}^{T}=p_1w_1+p_2w_2+p_1w_2.$$

当加工次序为 $\pi=(2,1)$,即 $X_{2\times2}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 时

$$\sum_{t=1}^{2}\sum_{l=1}^{t} X_{l.}PW^{T}X_{l.}^{T}=p_1w_1+p_2w_2+p_2w_1.$$

如果 $\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}$,$X_{2\times2}=I$ 时 $\sum_{t=1}^{2}\sum_{l=1}^{t} X_{l.}PW^{T}X_{l.}^{T}$ 有最小值 $\sum_{t=1}^{2}\sum_{l=1}^{t} p_lw_t$,此时工件1排在工件2前面,所以当 $n=2$ 时定理成立.

假设定理当 $n=s$ 时成立,即当 $\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_s}{w_s}$ 及 $X_{s\times s}=I$ 时,$\sum_{t=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} p_lw_t$ 为 $\sum_{t=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} X_{l.}PW^{T}X_{l.}^{T}$ 的最小值.

当 $n=s+1$ 时,我们要证明充分性也成立,对 $k=1,2,\cdots,s+1$ 先引入记号:P^k, W^{Tk} 分别为

$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_{s+1}\}^T,W=\{w_1,w_2,\cdots,w_{s+1}\}^T$ 去掉第 k 个元素后的 s 维向量.$X^k_{s\times s}$ 为 $X_{(s+1)\times(s+1)}$ 去掉第 $s+1$ 行第 k 列的元素后的 s 阶方阵.

当$\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_{s+1}}{w_{s+1}}$,设 $X_{(s+1)\times(s+1)}$ 为满足二次规划问题(2.2)的条件的方阵,再设此方阵的第$s+1$行第k列交点的元素为1,则 $s-1$ 行其余元素和第 k 列的其余元素均为0,将第 $s+1$ 行第 k 列的元素去掉后的方阵 $X^k_{s\times s}$ 为满足 $n=s$ 时的二次规划问题(2.2)的条件的 s 阶方阵.此时有

$$\sum_{i=1}^{s+1}\sum_{l=1}^{s}X_{l\cdot}PW^TX_{i\cdot}^T=\sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}X_{l\cdot}PW^TX_{i\cdot}^T+\sum_{l=1}^{s+1}X_{l\cdot}PW^TX_{s+1\cdot}^T=$$
$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}X_{l\cdot}P(W^k)^T(X_{i\cdot}^k)^T+(p_1+p_2+\cdots+p_{s+1})w_k.$$

由前假设 $\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_{s+1}}{w_{s+1}}$ 及 P^k,W^k 的定义必有$\frac{p_1^k}{w_1^k}\leqslant\frac{p_2^k}{w_2^k}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_s^k}{w_s^k}$,再根据前面 $n=s$ 时的假设有:$X^k_{s\times s}=I$ 为 $n=s$ 时二次规划问题(2.2)的最优解,最小值为 $\sum_{i=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}X_{l\cdot}P(W^k)^T(X^k_{i\cdot})^T=\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{i}p_j^k)w_i^k$.

再来看 $n=s+1$时二次规划问题(2.2)的最优解和最小值,因为 P^k,W^k 为 P,W 去掉第 k 行所得的 s 维向量,所以对任意 $k=1,2,\cdots,s+1$ 都有:

$$\min(\sum_{i=1}^{s+1}\sum_{l=1}^{s}X_{l\cdot}PW^TX_{i\cdot}^T)=\min\{\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{i}p_j^k)w_i^k\}+(p_1+p_2+\cdots+p_{s+1})w_k=$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{i}p_j^k)w_i^k+\sum_{i=k}^{s}(\sum_{j=1}^{k-1}p_j^k+\sum_{j=k}^{i}p_j^k)w_i^k+(\sum_{j=1}^{s+1}p_j)w_k=$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{i}p_j)w_i+\sum_{i=k+1}^{s+1}(\sum_{j=1}^{k-1}p_j+\sum_{j=k+1}^{i}p_j)w_i+(\sum_{j=1}^{s+1}p_j)w_k=$$
$$\sum_{i=1}^{s+1}(\sum_{j=1}^{i}p_j)w_i+R(k)\ (\text{其中 } R(k) \text{ 同前引理 4 所设}).$$

如果 $\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_{s+1}}{w_{s+1}}$,由引理 4 知:$\min_{k=1}^{s+1}R(k)=R(s+1)=0$,所以(2.2)的最小值为 $\min_{k=1}^{s+1}\{\sum_{i=1}^{s+1}(\sum_{j=1}^{i}p_j)w_i+R(k)\}=\sum_{i=1}^{s+1}\sum_{j=1}^{i}p_jw_i+\min_{k=1}^{s+1}R(k)=\sum_{i=1}^{s+1}\sum_{j=1}^{i}p_jw_i$(最小值在 $k=s+1$ 时取得).此时 $X_{(s+1)\times(s+1)}=\begin{vmatrix}X^{s+1}_{s\times s}&0\\0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}I&0\\0&1\end{vmatrix}=I_{(s+1)\times(s+1)}$就是二次规划问题(2.2)的最优解.所以对一切 n,如果$\frac{p_1}{w_1}\leqslant\frac{p_2}{w_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_n}{w_n}$,则 $X=I$ 是二次规划(2.2)的最优解,排序 $\pi=(1,2,\cdots,s+1)$ 是问题 $1\|\sum w_jC_j$ 的最优加工顺序,$\sum w_jC_j$ 的最小值为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}p_jw_i$.

3.2 必要性的证明

要证明:如果 $X_{n\times n}$ 是二次规划问题(2.2)的最优解,它所对应的加工顺序为 $\pi=\{\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n)\}$,则必成立:

$$\frac{p_{\pi(1)}}{w_{\pi(1)}}\leqslant\frac{p_{\pi(2)}}{w_{\pi(2)}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_{\pi(n)}}{w_{\pi(n)}}. \tag{3.3}$$

只要证明下式即可:

$$\frac{p_{\pi(i)}}{w_{\pi(i)}}\leqslant\frac{p_{\pi(i+1)}}{w_{\pi(i+1)}}\quad(i=1,2,\cdots,n-1). \tag{3.4}$$

对 $m=1,2,\cdots,n$ 及任意满足约束条件(2.1)的方阵 $X_{n\times n}$ 均有下式成立:

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}X_{l\cdot}PW^{T}X_{t\cdot}^{T}=\sum_{t=1,t\neq m}^{n}\sum_{l=1,l\neq m}^{t}X_{l\cdot}PW^{T}X_{t\cdot}^{T}+\sum_{l=1}^{m-1}X_{l\cdot}PW^{T}X_{m\cdot}^{T}+\sum_{t=m}^{n}X_{m\cdot}PW^{T}X_{t\cdot}^{T}. \quad (3.5)$$

设 $X^*_{n\times n}$ 是二次规划问题(2.2)的最优解,则有 $x^*_{ij}=\begin{cases}1, & j=\pi(i)\\ 0, & j\neq\pi(i)\end{cases}$,在(3.5)式中令 $X=X^*_{n\times n}$,$m=i$ 有

$$\min\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}X_{l\cdot}PW^{T}X_{t\cdot}^{T}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}X^*_{l\cdot}PW^{T}(X^*_{t\cdot})^{T}=$$
$$\sum_{t=1,t\neq i}^{n}\sum_{l=1,l\neq i}^{t}X^*_{l\cdot}PW^{T}(X^*_{t\cdot})^{T}+\sum_{l=1}^{i-1}X^*_{l\cdot}Pw_{\pi(i)}p_{\pi(i)}W^{T}\sum_{t=i}^{n}(X^*_{t\cdot})^{T}. \quad (3.6)$$

现定义 n 阶方阵 $X^{(i)}_{n\times n}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为由最优解 $X^*_{n\times n}$ 的 i 行与 $i+1$ 行互换构成,则 $X^{(i)}_{n\times n}$ 为同样满足约束条件(2.1)的 n 阶方阵,在(3.5)中令 $X=X^{(i)}_{n\times n}$,$m=i$ 有

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}X^{(i)}_{l\cdot}PW^{T}(X^{(i)}_{t\cdot})^{T}=$$
$$\sum_{t=1,t\neq i+1}^{n}\sum_{l=1,l\neq i+1}^{t}X^{(i)}_{l\cdot}PW^{T}(X^{(i)}_{t\cdot})^{T}+\sum_{l=1}^{i}X^{(i)}_{l\cdot}PW^{T}(X^{(i)}_{(i+1)\cdot})^{T}+\sum_{t=i+1}^{n}X^{(i)}_{(i+1)\cdot}PW^{T}(X^{(i)}_{t\cdot})^{T}=$$
$$\sum_{t=1,t\neq i}^{n}\sum_{l=1,l\neq i}^{t}X^*_{l\cdot}PW^{T}(X^*_{t\cdot})^{T}+\Big[\sum_{l=1}^{i-1}X^*_{l\cdot}P+p_{\pi(i+1)}\Big]w_{\pi(i)}+p_{\pi(i)}\Big[w_{\pi(i)}+W^{T}\sum_{t=i+2}^{n}(X^*_{t\cdot})^{T}\Big]. \quad (3.7)$$

由(3.6)和(3.7)即得

$$\sum_{t=1,t\neq i}^{n}\sum_{l=1,l\neq i}^{t}X^*_{l\cdot}PW^{T}(X^*_{t\cdot})^{T}+\sum_{l=1}^{i-1}X^*_{l\cdot}Pw_{\pi(i)}+p_{\pi(i)}W^{T}\sum_{t=i}^{n}(X^*_{t\cdot})^{T}\leqslant$$
$$\sum_{t=1,t\neq i}^{n}\sum_{l=1,l\neq i}^{t}X^*_{l\cdot}PW^{T}(X^*_{t\cdot})^{T}+\Big[\sum_{l=1}^{i-1}X^*_{l\cdot}P+p_{\pi(i-1)}\Big]w_{\pi(i)}+p_{\pi(i)}\Big[w_{\pi(i)}+W^{T}\sum_{t=i+2}^{n}(X^*_{t\cdot})^{T}\Big].$$

约掉相同的部分得 $p_{\pi(i)}w_{\pi(i+1)}\leqslant p_{\pi(i+1)}w_{\pi(i)}$ 所以有 $\frac{p_{\pi(i)}}{w_{\pi(i)}}\leqslant\frac{p_{\pi(i+1)}}{w_{\pi(i+1)}}$,$i=1,2,\cdots,n$)即 $\frac{p_{\pi(1)}}{w_{\pi(1)}}\leqslant\frac{p_{\pi(2)}}{w_{\pi(2)}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_{\pi(n)}}{w_{\pi(n)}}$ 成立.

必要性证毕.也就是证明了如果 $\sum w_jC_j$ 有最小值,其对应的排列 π 必定满足 WSPT 序.

综合以上3.1和3.2两部分,我们用二次规划证明了 WSPT 规则是带权排序问题 $1\|\sum w_jC_j$ 的最优排序的充分必要条件;同时,我们还得到了问题 $1\|\sum w_jC_j$ 目标函数的最小值为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}p_{\pi(j)}w_{\pi(i)}$.

感谢唐国春教授对本文的指导.

参考文献:

[1] DYER M E, WOLSEY L A. Formulating the single machine sequencing problem with release dates as a mixed integer program[J]. Discrete Applied Mathematics, 1990, 26: 252-270.

[2] GOEMANS M X, WILLIAMSON D P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming[J]. Journal of Association for Computing Machinery, 1995, 42: 1115-1145.

[3] GOEMANS M X, WEIN J M, WILLIAMSON D P. A 1.47-approximation algorithm for a preemptive single-machine scheduling problem[J]. Operations Research Letters, 2000, 26: 149-154.

[4] HALL L A, SCHULZ A S, SHMOYS D B, WEIN J. Scheduling to minimize average completion time: Off-

line and on-line approximation algorithms[J]. Mathematics of Operation Research, 1997, 22(3): 513-544.

[5] 韩继业. Improved approximation algorithm for MAX$^{n/2}$-density problem[Z]. SJOM, 2000.

[6] 罗守成,张峰,唐国春. 单机排序问题的数学规划表示[J]. 应用数学与计算数学学报, 2000,14.

[7] PHILLIPS C A. Improved bounds on relaxation of a parallel machine scheduling problem[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 1998(1): 413-426.

[8] SKTELLA M. Semidefinite Relaxations for parallel machine scheduling[A]. Proceeding of the 39th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science[C]. 1998: 472-481.

[9] SMITH W E. Various optimizers for single-stage production[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1956(3): 59-66.

[10] 徐大川. Improved approximation algorithm for MAX$^{n/2}$-directed-bisection problem[J]. SJOM, 2000.

[11] 叶荫宇. A 0.699-approximation algorithm for MAX-bisection[R]. Working paper.

[12] 张 峰,唐国春. 可控排序问题的凸二次规划松弛近似算法[J]. 系统工程理论方法应用, 2001(10).

[13] 张 峰,唐国春,陈志龙. A 3/2-approximation algorithm for parallel machine scheduling with controllable processing times[Z]. SJOM, 2000.

A Weighted Scheduling Problem and Quadratic Program

ZHANG Qian

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 200205l, China)

Abstract: We express the weighted scheduling problem $1\|\sum w_jC_j$ in the form of quadratic programming and prove that a sequence is optimal in terms of both the quadratic programming and the weighted scheduling problem $1\|\sum w_jC_j$ if and only if it is the WSPT. Thus we lay a foundation for studying other weighted scheduling problems using the quadratic programming.

Key words: scheduling; quadratic programming; WSPT programming