第30卷第2期
2001年6月

上海师范大学学报(自然科学版)
J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)

Vol. 30, No. 2
Jun. 2001

带五次项的弱耗散 NLS 方程的谱逼近的大时间性态

向新民，顾绍泉

（上海师范大学 数学科学学院，上海 200234）

摘　要：讨论用 Fourier 谱方法求解一类带五次项且具弱阻尼的非线性 Schrodinger 方程的周期初值问题，得到大时间误差估计以及近似吸引子的存在性，并考虑了近似吸引子的弱上半连续性.

关键词：Fourier 谱方法；大时间误差估计；近似吸引子

中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2001)02-0001-06

0　引　言

非线性 Schrödinger 方程(NLS)是数学物理中的一类重要方程，它描述了很多物理学上的问题. 已经有许多文章涉及到其解的存在性、正则性、稳定性等问题[1~4]，对此类问题的数值解法也有不少研究工作[5~6]，但对带五次项的 NLS 研究甚少，而在某些情况下，方程解的能量在有限时间内将出现 blow-up[7~8]. 由于无限维动力系统研究的深入，解的大时间性态已经引起一些研究者的关注，例如文献[9～11]. 本文讨论一类带五次项且具弱阻尼的 NLS 周期初值问题，给出了用 Fourier 谱方法求解时的大时间误差估计、近似吸引子 A_N 的存在性及 A_N 弱收敛到原问题的整体吸引子 A 等性质. 在文章的第一部分介绍一些预备知识，给出原始问题并导出谱格式解的大时间先验估计，第二部分将对近似解作误差分析，第三部分则考虑近似解的吸引子存在性及弱上半连续性.

1　问题与解的大时间先验估计

考虑如下带五次项且具弱阻尼的 NLS 的周期初值问题

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - |u|^4 u + i\delta u = g(x,t),\ x \in R,\ t > 0, & (1.1) \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in R, & (1.2) \\ u(x+1,t) = u(x,t),\ x \in R,\ t > 0. & (1.3) \end{cases}$$

其中 $u(x,t)$ 为未知的复值函数，$\delta > 0$，$u_0(x)$、$g(x,t)$ 为已知的关于 x 周期为 1 的复值函数.

收稿日期：2000-12-08

基金项目：国家自然科学基金(19871056)，上海市科技发展基金及上海市高校科技发展基金资助项目(00JC14057)

作者简介：向新民(1941-)，男，上海师范大学数学科学学院教授，博士生导师.

先给出本文需用的一些记号和引理.

记 $S_N=\mathrm{Span}\{e^{i2\pi jx}\mid -N\leqslant j\leqslant N-1\}$, $\Omega=(0,1)$, $H_p^m(\Omega)$ 为 $C_p^\infty(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 范数意义下的完备化空间,其中范数 $\|u\|_m=\left(\sum\limits_{\alpha\leqslant m}\|D^\alpha u\|^2\right)^{1/2}$,而 $L^q(R^+;H_p^m(\Omega))=\{u\mid u\in H_p^m(\Omega),\ \int_0^{+\infty}\|u\|_m^q dt<+\infty\}$, $L^\infty(R^+;H_p^m(\Omega))=\{u\mid u\in H_p^m(\Omega),\ \sup\limits_{t\in R^+}\|u(t)\|_m<+\infty\}$. 令 P_N 为从 $L^2(\Omega)$ 到 S_N 的正交投影算子.对任意 $v\in L^2(\Omega)$,P_Nv 由下式确定

$$(P_Nv,\chi)=(v,\chi),\ \forall\ \chi\in S_N.$$

引理 1[12] 对任意 $0\leqslant\mu\leqslant\sigma$,则存在与 N 无关的常数 c,使得

$$\|u-P_Nu\|_\mu\leqslant cN^{-\sigma+\mu}|u|_\sigma,\quad \forall\ u\in H_p^\sigma(\Omega).$$

引理 2[13] 设 $D^mu\in L^r(\Omega)$, $u\in L^q(\Omega)$, $1\leqslant q,\ r\leqslant+\infty$, $0\leqslant j\leqslant m$, $\frac{j}{m}\leqslant a\leqslant 1$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 若 $m-j-\frac{1}{r}$ 不是一个非负整数,则存在与 u 无关的常数 c,使得

$$\|D^ju\|_{L^p}\leqslant c\|D^mu\|_{L^r}^a\|u\|_{L^q}^{1-a},$$

其中 a 满足 $\frac{1}{p}=j+a(\frac{1}{r}-m)+(1-a)\frac{1}{q}$.

对于问题(1.1)~(1.3)构造如下的 Fourier 谱格式:求 $u_N\in S_N$,满足

$$\begin{cases}i(u_{Nt},\chi)-(u_{Nx},\chi_x)-(|u_N|^4u_N,\chi)+i\delta(u_N,\chi)=(g,\chi),\ \forall\ \chi\in S_N, & (1.4)\\ (u_N(0),\chi)=(u_0,\chi),\ \forall\ \chi\in S_N. & (1.5)\end{cases}$$

对于上面的格式有如下的先验估计

引理 3 若 $u_0\in L_p^2(\Omega)$, $g\in L^2(R^+;L_p^2(\Omega))$,则有和 N 无关的常数 E_0, E_1,使得

$$\sup_{t\in R^+}\|u_N(t)\|^2\leqslant E_0,\quad \int_0^{+\infty}\|u_N(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant E_1.$$

证明 在(1.4)中令 $\chi=u_N$,两边取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_N\|^2+\delta\|u_N\|^2=\mathrm{Im}\int_0^1 g\bar{u}_N\mathrm{d}x\leqslant\frac{\delta}{2}\|u_N\|^2+\frac{1}{2\delta}\|g\|^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_N\|^2+\delta\|u_N\|^2\leqslant\frac{1}{\delta}\|g\|^2.$$

于是有

$$\|u_N(t)\|^2\leqslant e^{-\delta t}\|u_N(0)\|^2+\frac{1}{\delta}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\|g(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant e^{-\delta t}\|u_0\|^2+\frac{1}{\delta}\int_0^{+\infty}\|g(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau, \quad (1.6)$$

故当 $u_0\in L_p^2(\Omega)$, $g\in L^2(R^+;L_p^2(\Omega))$ 时 $\|u_N(t)\|^2\leqslant E_0$. 在(1.6)中关于 t 在 R^+ 上积分得

$$\int_0^{+\infty}\|u_N(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}\|u_N(0)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{\delta}\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\|g(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{\delta}\|u_N(0)\|^2+\frac{1}{\delta}\int_0^{+\infty}e^{\delta\tau}\|g(\tau)\|^2\int_\tau^{+\infty}e^{-\delta t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\frac{1}{\delta}\|u_0\|^2+\frac{1}{\delta^2}\int_0^{+\infty}\|g(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau.$$

即得 $\int_0^{+\infty}\|u_N(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant E_1$.

引理 4 若 $u_0\in H_p^1(\Omega)$, $g\in L^\infty(R^+;H_p^1(\Omega))\cap L^2(R^+;H_p^1(\Omega))$,则存在与 N 无关的常数 E_2 和 E_3 使得

$$\sup_{t\in R^+}\|u_{Nx}(t)\|^2\leqslant E_2,\quad \sup_{t\in R^+}\|u_N(t)\|_{L^6}\leqslant E_2,\quad \int_0^{+\infty}\|u_{Nx}(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant E_3.$$

证明 在(1.4)中令 $\chi=u_{Nt}$,两边取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_{Nx}\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x)+\delta\mathrm{Im}\int_0^1 u_N\bar{u}_{Nt}\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int_0^1 g\bar{u}_{Nt}\mathrm{d}x. \quad (1.7)$$

为了估计上式右端项及左端第二项,在(1.4)中分别令$\chi=u_N$、$\chi=P_Ng$,两边相应取实部和虚部有

$$\mathrm{Im}\int_0^1\bar{u}_{Nt}u_N\mathrm{d}x=\|u_{Nx}\|^2+\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_0^1 g\bar{u}_N\mathrm{d}x,\tag{1.8}$$

$$\mathrm{Re}\int_0^1 u_{Nt}\bar{g}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\int_0^1 u_{Nx}\bar{g}_x\mathrm{d}x+\mathrm{Im}\int_0^1|u_N|^4u_NP_N\bar{g}\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\delta\int_0^1 u_N\bar{g}\mathrm{d}x.\tag{1.9}$$

将(1.8)和(1.9)代入(1.7)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_{Nx}\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x)+\delta\|u_{Nx}\|^2+\delta\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x=$$
$$-\mathrm{Im}\int_0^1 u_{Nx}\bar{g}_x\mathrm{d}x-\mathrm{Im}\int_0^1|u_N|^4u_NP_N\bar{g}\mathrm{d}x.\tag{1.10}$$

由于$-\mathrm{Im}\int_0^1 u_{Nx}\bar{g}_x\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\|u_{Nx}\|^2+c\|g_x\|^2$. 利用引理2和Young不等式知

$$-\mathrm{Im}\int_0^1|u_N|^4u_NP_N\bar{g}\mathrm{d}x\leqslant\|P_Ng\|_{L^\infty}\int_0^1|u_N|^5\mathrm{d}x\leqslant c\|P_Ng\|_1\int_0^1|u_N|^5\mathrm{d}x\leqslant$$
$$c\|g\|_1\int_0^1|u_N|^5\mathrm{d}x\leqslant c\|u_{Nx}\|^{\frac{3}{2}}\|u_N\|^{\frac{7}{2}}\|g\|_1\leqslant\varepsilon_1\|u_{Nx}\|^2+c\|g\|_1^4\|u_N\|^{14},$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_{Nx}\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x)+\frac{\delta}{2}\|u_{Nx}\|^2+\delta\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x\leqslant c(\|g_x\|^2+\|g\|_1^4\|u_N\|^{14}),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\delta t}(\|u_{Nx}\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x)\right]\leqslant ce^{\delta t}(\|g_x\|^2+\|g\|_1^4\|u_N\|^{14}),$$

即得

$$\|u_{Nx}(t)\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N|^6\mathrm{d}x\leqslant$$
$$e^{-\delta t}(\|u_{Nx}(0)\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N(0)|^6\mathrm{d}x)+c\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}(\|g_x(\tau)\|^2+\|g(\tau)\|_1^4\|u_N(\tau)\|^{14})\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$e^{-\delta t}(\|u_{0x}\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N(0)|^6\mathrm{d}x)+c\sup_{t\in R^+}\|g(t)\|_1^2\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+$$
$$c\sup_{t\in R^+}\|g(t)\|_1^4\sup_{t\in R^+}\|u_N(t)\|^{14}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$e^{-\delta t}(\|u_{0x}\|^2+\|u_0\|^4\|u_{0x}\|^2)+\frac{c}{\delta}\sup_{t\in R^+}\|g(t)\|_1^2+\frac{c}{\delta}\sup_{t\in R^+}\|g(t)\|_1^4\sup_{t\in R^+}\|u_N(t)\|^{14}.\tag{1.11}$$

故$g\in L^\infty(R^+;H_p^1(\Omega))$时,对一切$t\geqslant0$,

$$\|u_{Nx}(t)\|^2+\frac{1}{3}\int_0^1|u_N(t)|^6\mathrm{d}x\leqslant E_2,$$

从而$\sup\limits_{t\in R^+}\|u_{Nx}(t)\|^2\leqslant E_2$,$\sup\limits_{t\in R^+}\|u_N(t)\|_{L^6}\leqslant E_2$. 若对(1.11)的第一个式子两边关于$t$在$R^+$上积分得

$$\int_0^{+\infty}\|u_{Nx}(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant(\|u_{Nx}(0)\|^2+\frac{1}{3}|u_N(0)|^6\mathrm{d}x)\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}\mathrm{d}t+$$
$$c\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\|g_x(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\|g(\tau)\|_1^4\|u_N(\tau)\|^{14}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t.$$

其中

$$\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\|g_x(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{\delta\tau}\|g_x(\tau)\|^2\int_\tau^{+\infty}e^{-\delta t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\delta}\int_0^{+\infty}\|g_x(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$
$$\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\|g(\tau)\|_1^4\|u_N(\tau)\|^{14}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\sup_{t\in R^-}\|u_N(t)\|^{12}\sup_{t\in R^+}\|g(t)\|_1^4\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\|u_N(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{1}{\delta}\sup_{t\in R^-}\|u_N(t)\|^{12}\sup_{t\in R^+}\|g(t)\|_1^4\int_0^{+\infty}\|u_N(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau.$$

即当时 $u_0\in H_p^1(\Omega)$, $g\in L^\infty(R^+;H_p^1(\Omega))\cap L^2(R^+;H_p^1(\Omega))$ 时 $\int_0^{+\infty}\|u_{Nx}\|^2\mathrm{d}t\leqslant E_3$. 由引理 3、引理 4 及嵌入定理得

引理 5 在引理 4 的条件下,存在与 N 无关的常数 $\widetilde{E}_2$ 和 $\widetilde{E}_3$ 使得 u_N 满足

$$\sup_{t\in R^+}\|u_N(t)\|_{L^\infty}^2\leqslant\widetilde{E}_2,\quad\int_0^{+\infty}\|u_N(t)\|_{L^\infty}^2\leqslant\widetilde{E}_3.$$

由上面的证明过程运用 Faedo-Galerkin 方法可得

引理 6 若 $u_0\in H_p^1(\Omega)$, $g\in L^\infty(R^+;H_p^1(\Omega))\cap L^2(R^+;H_p^1(\Omega))$ 时,则存在常数 E_4、E_5 使得 (1.1) ~ (1.3) 的解 $u(x,t)$ 存在唯一且满足

$$\sup_{t\in R^+}\|u(t)\|_1^2\leqslant E_4,\quad\int_0^{+\infty}\|u(t)\|_1^2\leqslant E_5.$$

2 误差估计

问题(1.1)~(1.3)的解 $u(x,t)$ 满足

$$i(u_t,\chi)-(u_x,\chi_x)-(|u|^4u,\chi)+i\delta(u,\chi)=(g,\chi),\ \forall\,\chi\in H_p^1(\Omega).\tag{2.1}$$

现令 $u-u_N=u-P_Nu+P_Nu-u_N=\xi+\eta$, $\xi=u-P_Nu$, $\eta=P_Nu-u_N$. 由(2.1)式和(1.4)式知

$$i(\xi_t+\eta_t,\chi)-(\xi_x+\eta_x,\chi_x)-(|u|^4u-|u_N|^4u_N,\chi)+i\delta(\xi+\eta,\chi)=0,\ \forall\,\chi\in S_N.\tag{2.2}$$

在(2.2)中令 $\chi=\eta$,并取虚部,利用正交性 $(\xi_t,\eta)=(\xi_x,\eta_x)=(\xi,\eta)=0$, 于是有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|^2-\mathrm{Im}(|u|^4u-|u_N|^4u_N,\eta)+\delta\|\eta\|^2=0,$$

$$\begin{aligned}|u|^4u-|u_N|^4u_N&=|u|^4(u-u_N)+u_N(|u|^4-|u_N|^4)=\\&|u|^4(\xi+\eta)+u_N(|u|^2+|u_N|^2)(u\bar{u}-u_N\bar{u}_N)=\\&|u|^4(\xi+\eta)+uu_N(|u|^2+|u_N|^2)(\bar{\xi}+\bar{\eta})+|u_N|^2(|u|^2+|u_N|^2)(\xi+\eta).\end{aligned}$$

所以有

$$\mathrm{Im}(|u|^4u-|u_N|^4u_N,\eta)\leqslant\int_0^1|u|^4(|\xi|+|\eta|)|\eta|\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^1[|u||u_N|(|u|^2+|u_N|^2)(|\bar{\xi}|+|\bar{\eta}|)+|u_N|^2(|u|^2+|u_N|^2)(|\xi|+|\eta|)]|\eta|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\varepsilon_1\|\eta\|^2+c\|u\|_{L^\infty}^8\|\xi\|^2+\|u\|_{L^\infty}^4\|\eta\|^2+c(\|u_N\|_{L^\infty}^8+\|u_N\|_{L^\infty}^6\|u\|_{L^\infty}^2+$$

$$\|u\|_{L^\infty}^4\|u_N\|_{L^\infty}^4+\|u\|_{L^\infty}^6\|u_N\|_{L^\infty}^2)\|\xi\|^2+c(\|u\|_{L^\infty}^4+$$

$$\|u_N\|_{L^\infty}^3\|u\|_{L^\infty}+\|u\|_{L^\infty}^2\|u_N\|_{L^\infty}^2+\|u\|_{L^\infty}^3\|u_N\|_{L^\infty})\|\eta\|^2$$

根据引理 5、引理 6 可知

$$|\mathrm{Im}(|u|^4|u|-|u_N|^4u_N,\eta)|\leqslant$$

$$\frac{\delta}{2}\|\eta\|^2+c(\|u\|_{L^\infty}^2+\|u_N\|_{L^\infty}^2)\|\xi\|^2+c(\|u\|_{L^\infty}^2+\|u_N\|_{L^\infty}^2)\|\eta\|^2.$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|^2+\delta\|\eta\|^2\leqslant c(\|u\|_{L^\infty}^2+\|u_N\|_{L^\infty}^2)\|\xi\|^2+c(\|u\|_{L^\infty}^2+\|u_N\|_{L^\infty}^2)\|\eta\|^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(e^{\delta t - c\int_0^t (\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(\tau)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}\tau})\|\eta\|^2\right] \leqslant c e^{\delta t - c\int_0^t (\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(\tau)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}\tau}(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|u_N\|_{L^\infty}^2)\|\xi\|^2.$$

两边积分，注意到 $\eta(0)=0$，再次利用引理 5、引理 6，于是

$$\|\eta(t)\|^2 \leqslant c\int_0^t e^{-\delta(t-s)+c\int_s^t (\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(\tau)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}\tau}(\|u(s)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(s)\|_{L^\infty}^2)\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant$$

$$cN^{-2\sigma}\|u(t)\|_\sigma^2\int_0^t e^{-\delta(t-s)+c\int_s^t (\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(\tau)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}\tau}(\|u(s)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(s)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$cN^{-2\sigma}\|u(t)\|_\sigma^2\int_0^t e^{-\delta(t-s)+c\int_0^{+\infty} (\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(\tau)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}\tau}(\|u(s)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(s)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$cN^{-2\sigma}\|u(t)\|_\sigma^2\int_0^{+\infty}(\|u(s)\|_{L^\infty}^2 + \|u_N(s)\|_{L^\infty}^2)\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

对(2.3)两边关于 t 在 R^+ 上积分可得

$$\int_0^{+\infty}\|\eta(t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant c_1 N^{-2\sigma}\int_0^{+\infty}\|u(t)\|_\sigma^2\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

利用 (2.3)式，(2.4)式和三角不等式即得

定理 1　设引理 5 的条件成立，$u \in L^\infty(R^+;\ H_p^\sigma(\Omega))$，$\sigma \geqslant 0$，则对格式(1.4) ～ (1.5) 的解 u_N，有

$$\sup_{t\in R^+}\|u(t)-u_N(t)\| \leqslant c_1 N^{-\sigma}.$$

若 $u \in L^2(R^+;\ H_p^\sigma(\Omega))$，则

$$\int_0^{+\infty}\|u(t)-u_N(t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant c_2 N^{-2\sigma}.$$

其中 c_1，c_2 为与 N 无关的常数.

3　近似吸引子的存在性及上半连续性

对于每一个固定的 N，由类似误差估计的证明方法知谱格式的解 u_N 定义了一个连续半群 $\{S_N(t)\}_{t\geqslant 0}$.

从引理 3、引理 4 知道 $\|u_N(t)\|$，$\|u_{Nx}(t)\|$ 是有界的，所以当 $u_0 \in H_p^1(\Omega)$，$g \in L^\infty(R^+;\ H_p^1(\Omega)) \cap L^2(R^+;H_p^1(\Omega))$ 时，存在与 N 无关的常数 E^*，使得 $\|u_N(t)\|_1 \leqslant E^*$，即集合 $B=\{u\in S_N \mid \|u\|_1 \leqslant E^*\}$ 是 $\{S_N(t)\}$ 的有界吸引集. 而 $S_N(t)$ 将 $H_N = H_p^1(\Omega)\cap S_N$ 映射到 H_N，H_N 是有限维，故 $S_N(t)$ 将 H_N 的任意有界集映成一个致密集.

根据文[2]的定理 1.1 可知

定理 2　若引理 4 的条件成立，则对每一个 N，由谱格式(1.4) ～ (1.5) 确定的算子半群 $\{S_N(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在整体吸引子 A_N，$A_N \subseteq H_p^1(\Omega)\cap S_N$，且 $A_N = \omega_N(B) = \bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s} S_N(t)B}$.

最后考虑在 $H_p^1(\Omega)$ 弱拓扑意义下 A_N 的弱上半连续性，先引入下列引理.

引理 7[2]　设 H_η 是 H 的一族闭子空间，$0<\eta\leqslant\eta_0$，$\bigcup_{0<\eta\leqslant\eta_0} H_\eta$ 在 H 中稠密，对每个 $\eta>0$，考虑算子半群 $\{S_\eta(t)\}_{t\geqslant 0}$，其中 $S_\eta(t)$ 映射 H_η 到自身而且连续，$S_\eta(t)$ 具有整体吸引子 A_η，它吸引 $A_\eta \cup A$ 的任意有界开邻域；对 R^+ 的任意紧区间 I，有

$$\delta_\eta(I) = \sup_{\substack{u_0\in H_\eta\\ \|u_0\|\leqslant R}}\ \sup_{t\in I}\mathrm{dist}(S_\eta(t)u_0, S(t)u_0) \to 0,\ \eta\to 0.$$

则 $\mathrm{dist}(A_\eta, A) \to 0$，$\eta \to 0$.

对任意 $t\in[t_1,t_2]\subset R^+$，$\|u-u_N\| \leqslant cN^{-1}\|u\|_1$，再根据引理 6 有 $\|u\|_1$ 有界，故当 $N\to+\infty$，$\|u-u_N\|\to 0$. 因为 $L_p^2(\Omega)$ 在 $H_p^{-1}(\Omega)$ 中稠密，$\forall\ f\in H_p^{-1}(\Omega)$ 和 $\varepsilon>0$，$\exists\ \varphi\in L_p^2(\Omega)$，使 $\|f$

$-\varphi\|_{-1}<\varepsilon$，故

$$|\langle u_N,f\rangle-\langle u,f\rangle|\leqslant|\langle u_N,f\rangle-\langle u_N,\varphi\rangle|+|\langle u_N,\varphi\rangle-\langle u,\varphi\rangle|+|\langle u,\varphi\rangle-\langle u,f\rangle|\leqslant (\|u\|_1+\|u_N\|_1)\|f-\varphi\|_{-1}+\|u-u_N\|\ \|\varphi\|.$$

由于 $\|u(t)\|_1$、$\|u_N(t)\|_1$ 均有界，故 u_N 在 I 上在 $H_p^1(\Omega)$ 弱拓扑意义下收敛于 u. 于是有

定理 3 在定理 2 的条件下，有 $\partial(A_N,A)\to 0$，$N\to+\infty$. ∂ 为 $H_p^1(\Omega)$ 的弱拓扑意义下的距离.

参考文献：

[1] GHIDAGLIA J M. Finite dimensional behavior for weakly damped driven Schrodinger equations[J]. Ann Inst H Poincare Anal Non Lineaire, 1988, 5(4): 365-405.

[2] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. Second Edition. Springer-Verlag, 1997.

[3] HAYASHI N, Nakamita K, Tsutsumi M. On solution of the initial value problem for the nonlinear Schrodinger equations[J]. J Funct Anal, 1987, 71: 218-245.

[4] 郭柏灵. 非线性演化方程[M]. 上海：上海科技教育出版社，1995.

[5] 向新民. 一类非自共轭非线性 Schrodinger 方程组的差分方法[J]. 计算数学，1985，7：356-368.

[6] 张鲁明，常谦顺. 带五次项的非线性 Schrodinger 方程差分解法[J]. 应用数学学报，2000，23(3)：351-358.

[7] TSUTSUMI M. Nonexistence of global solutions to the cauchy problem for the damped nonlinear Schrodinger equations[J]. SIAM J Math Anal, 1984, 15(2): 357-366.

[8] OGAWA T, TSUTSUMI Y. Blow-up of solutions for the nonlinear Schrodinger equation with quartic potential and periodic boundary condition, in "Functional analysis method for partial differential equations"[J]. Lecture Notes in Math, 1450. Springer-Verlag, 1990.

[9] 向新民. 带弱阻尼的非线性 Schrodinger 方程谱逼近的大时间性态[J]. 高等学校应用数学学报，A 辑，1998，13(3)：267-274.

[10] XIANG Xin-min. The dynamical behavior of fully discrete spectral method for nonlinear Schrodinger equation with weakly damped[J]. J Numer Math, 1999, 8(2): 165-176.

[11] LARSSON S. The long-time behavior of finite element approximations of solution to semilinear parabolic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, 26: 348-365.

[12] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京：科学出版社，2000.

[13] FRIEDMAN A. Partial Differential Equations[M]. Holt Reibat and Winston Inc, 1969.

The Long-Time Behavior of Fourier Spectral Approximation for Nonlinear Weakly Dissipative Schrödinger Equation with Quintic Terms

XIANG Xin-min, GU Shao-quan

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Fourier spectral method is used to study the period initial problem of nonlinear weakly dissipative Schrodinger equations with quintic terms. A large-time error estimate is given, the existence and the upper semicontinuity of the approximate attractor A_N are obtained.

Key words: Fourier spectral merhod; large-time error estimate; approximate attractor