第33卷第1期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 33, No. 1
2004年3月　　Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences)　　2004, Mar.

TFR与逆幂律模型下 Weibull 分布序加试验的 Bayes 分析

汤银才，刘方方

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：讨论了 TFR 模型下 Weibull 分布序进应力加速寿命试验的寿命分布，并就逆幂律模型给出了分布参数及加速方程系数的 Bayes 估计，并通过一个实际例子进行了说明.

关键词：Weibull 分布；序进应力加速寿命试验；Bayes 估计；TFR 模型；逆幂律

中图分类号：O213.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2004)01-0026-06

0　引　言

许多产品，特别是高可靠产品，在使用应力下很难获得失效数据，有时即使可能，但要花费大量的人力、物力和时间. 解决这一问题可采用加速寿命试验. 在高应力下的寿命试验可使产品在更短的时间内失效，因而可获得更多的失效数据，更多的关于寿命分布的信息. 根据应力与时间的关系加速寿命试验可分为恒定应力加速寿命试验(简称恒加试验)、步进应力加速寿命试验(简称步加试验)、序进应力加速寿命试验(简称序加试验). 对加速寿命试验的统计分析涉及到应力的提高对残存寿命的影响，即加速损伤机理，目前主要围绕着累积损伤暴露模型(简称为 CE 模型)展开[6]，它通过累积概率来刻划应力的变化对产品失效机理的影响，其理论及应用较为成熟而广泛. 另外，还可通过失效率来刻划应力的变化对产品失效机理的影响，具体表现为高应力下的失效率为低应力下失效率乘上一个与应力有关的系数(称为损伤因子). 这种加速损伤机理称为损伤失效率模型(简称 TFR 模型)[2]. 文[8]在没有加速方程假设下讨论了全样本场合步加试验参数的极大似然估计和 Bayes 估计，本文在第二节将 TFR 模型推广到了一般的变应力加速寿命试验，并在 2 个基本假设和对数线性加速方程下导出了变应力加速寿命试验的寿命分布；第三节就逆幂律模型给出了分布形状参数及加速方程系数的 Bayes 估计，并通过一个模拟例子进行了说明.

1　基本假设与寿命分布

首先需要下面的 2 个基本假定：

收稿日期：2003-04-20

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271079).

作者简介：汤银才(1964-)，男，博士，上海师范大学数理信息学院副教授. 刘方方，女，上海师范大学数理信息学院硕士研究生.

假设 1 产品在常应力水平 S_1 下的寿命服从 Weibull 分布 $Wei(\eta, m)$,其生存函数为

$$\overline{F}(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta(S_1)}\right)^m\right\}, \tag{1}$$

其中 η 和 m 为分布的刻度参数和形状参数.

假设 2[2] 应力水平的提高对产品的损伤遵从 TFR 模型,即高应力水平下的失效率是低应力水平下失效率乘上一个未知因子. 此时二步步加试验下的失效率 $\lambda^*_{TFR}(t)$ 可表示为

$$\lambda^*_{TFR}(t) = \begin{cases} \lambda(t), & 0 \le t \le t_1 \\ \alpha_1 \lambda(t), & t > t_1 \end{cases}, \tag{2}$$

其中 $\lambda(t)$ 为应力水平 S_1 下的失效率, t_1 为时间变点:在时间 t_1 之后产品在新的应力水平 S_2 下做试验. α_1 称为 S_2 相对于 S_1 的累积损伤因子,它与应力水平 S_2 与 S_1 有关,且仅通过应力与时间变点发生联系.

此假设可进一步推广到多个步进应力水平及一般变应力加速寿命试验.

命题 1 产品在恒定应力水平 $S(>S_1)$ 下的失效率 $\lambda_S(t)$ 是低应力水平 S_1 下的失效率 $\lambda(t)$ 乘上一个与 S 和 S_1 有关的损伤因子 $\alpha(S, S_1)$. 即

$$\lambda_S(t) = \alpha(S, S_1)\lambda(t), \tag{3}$$

有时也称这一假设为比例失效模型.

命题 2 在 k(≥ 2)个步进应力水平

$$S(t) = S_j,\ t_{j-1} \le t < t_j,\ j = 1, 2, \cdots, k,\ t_0 = 0, t_k = \infty \tag{4}$$

($S_1 < S_2 < \cdots < S_k$)下步加试验的失效率为

$$\lambda^*_{TFR}(t) = \alpha_{j-1}\lambda(t),\ t_{j-1} \le t < t_j,\ j = 1, 2, \cdots, k, \tag{5}$$

其中 $\alpha_{j-1} = \alpha(S_j, S_1)$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ ($\alpha_0 = 1$)表示应力水平 S_j 相对于应力水平 S_1 的累积损伤因子,它与应力水平 S_j 与 S_1 有关(而与 $S_2, \cdots, S_{j-1}$ 无关*).

命题 3 产品在高应力水平函数 $S(t)$ 下的失效率 $\lambda_S(t)$ 是低应力水平 S_1 下的失效率 $\lambda(t)$ 乘上一个与 $S(t)$ 和 S_1 有关的函数 $\alpha(S(t), S_1)$. 即

$$\lambda^*_S(t) = \alpha(t)\lambda(t), \tag{6}$$

其中 $\alpha(t) = \alpha(S(t), S_1)$ 称为变应力 $S(t)$ 相对于应力水平 S_1 的累积损伤函数,简称为 $S(t)$ 下的累积损伤函数,它仅通过应力 $S(t)$ 和 S_1 与时间发生联系. 这一命题当然适合于序进应力 $S(t) = Kt + S_1$ 下的寿命试验.

由生存函数与失效率之间的关系可得产品在一般应力水平 S(t) 下的生存函数

$$\overline{F}^*(t) = \exp\left\{-\int_0^t \alpha(t)\lambda(t)\,dt\right\}. \tag{7}$$

在恒定应力 S 下, $\alpha(t) = \alpha(S, S_1)$;在步进应力(4)下, $\alpha(t) = \alpha_{j-1} = \alpha(S_j, S_1)$, $t_{j-1} \le t < t_j$, $j = 1, 2, \cdots, k$;对于变应力 $S(t)$, $\alpha(t) = \alpha(S(t), S_1)$.

若进一步假定寿命与应力之间还满足一定的函数关系,如对数线性关系 $\ln \eta(S) = b_0 + b\Phi(S)$,其中 $\Phi(S)$ 为应力水平 S 的已知函数,通常为单调函数,如逆幂律模型和阿伦尼斯模型,则可以证明:

定理 1 在假设 1,假设 2 和对数线性加速方程下,有

(1) 在变应力 $S(t)$ 下,累积损伤函数 $\alpha(t)$ 满足线性关系

* Madi(1993)给出了另一种形式,尽管与这里的等价,但加速损伤与应力之间的关系不够突出,Xu 和 Tang(2003)对此作了较为一般的讨论.

$$\alpha(t) = \exp\left\{ bm[\Phi(S_1) - \Phi(S(t))] \right\}. \tag{8}$$

(2) 变应力 $S(t)$ 下的生存函数为

$$\overline{F}^*(t) = \exp\left\{ - \int m x^{m-1} e^{-m[b_0 + b\Phi(S(x))]} \mathrm{d}x . \right\}. \tag{9}$$

2 逆幂律模型下的数学模型

对于以电压为应力的电子元器件等高可靠产品,寿命与应力之间的关系通常满足逆幂律. 为此再提出:假设 3 寿命与应力之间的关系服从逆幂律模型,即常应力水平 V 下寿命分布的刻度参数 $\eta(V)$ 满足

$$\eta(V) = 1/[dV^c], \tag{10}$$

其中 d 和 c 是未知参数,与应力水平 V 无关.

显然它具有线性关系 $\ln\eta(V) = b_0 + b\Phi(V)$,其中 $b_0 = -\ln(d)$,$b = -c$,$\Phi(V) = \ln V$. 则由上面的定理知,在序进应力 $V(t) = Kt$ 下产品的寿命服从 Weibull 分布 $Wei(\theta,\beta)$,其生存函数为

$$\overline{F}^*(t) = \exp\left\{ - \frac{d^m K^{mc}}{c+1} t^{m(c+1)} \right\} = 1 - \exp\left\{ -(\frac{t}{\theta})^{\beta} \right\} = G\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right), \tag{11}$$

其中 $G(x) = 1 - \exp\{-\exp(x)\}$ 为标准极值分布的分布函数,且

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{\sigma} = m(1+c) \\ \mu = \ln\theta = A + B\ln K \\ A = \dfrac{-m\ln d + \ln(1+c)}{m(1+c)} \cdot \\ B = -\dfrac{c}{1+c} \end{cases} \tag{12}$$

现在给定 k 的一组水平:$k_1 < k_2 < \cdots < k_p (p \geq 2)$,则由等式 $\mu_i - \mu_j = B(\ln k_i - \ln k_j)$,$1 \leq i < j \leq p$ 知 $\theta_i = e^{\mu_i}$,$i = 1,2,\cdots,p$ 满足约束

$$\theta_p < \theta_{p-1} < \cdots < \theta_1 < \theta_2 k_{2,1} < \cdots < \theta_p k_{p,1}, \tag{13}$$

其中 $k_{i,j} = k_i / k_j$,$i, j = 1,2,\cdots,p$.

3 参数 θ_i 和 β 的 Bayes 估计

设在序进应力 $V_i(t) = k_i t$ 下投入 n_i 产品进行试验,失效时间为 $0 < t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{ir_i} < \tau_{i0}$,$r_i < n_i$,$i = 1,2,\cdots,p$. 在定时截尾试验场合,$\tau_{i0}$ 为预先给给定的试验中止时间,r_i 为时间 τ_{io} 之前产品的失效数;在定数截尾试验场合,r_i 为预先给定的中止试验的样本数. 记 $r = \sum_{i=1}^{p} r_i$,$V = \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{r_i} t_{ij}$,$\tau = (n_i, r_i, t_{ij}, j = 1,2,\cdots,r_i, i = 1,2,\cdots,p)$,

$$\tau_i(\beta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\beta} + (n_i - r_i)\tau_{i0}^{\beta} \text{(定时截尾场合)}, \\ \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\beta} + (n_i - r_i) t_{ir_i}^{\beta} \text{(定数截尾场合)}, \end{cases} \tag{14}$$

则得似然函数

$$L(\beta,\theta\mid\tau)=\beta^{r}V^{\beta-1}\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{\theta_i^{\beta r_i}}\exp\left\{-\frac{\tau_i(\beta)}{\theta_i^{\beta}}\right\}. \tag{15}$$

按文献[1]确定先验分布的方法，在 β 已知下，取 θ_j^{β} 的条件先验分布为逆 Γ 分布 $IG(a_j,b_j)$，其中 $a_j>0$，$b_j>0$ 根据已有的先验信息来确定. 由此得到 β 下 θ_j 的先验分布

$$\pi_j(\theta_j\mid\beta)=\frac{\beta b_j^{a_j}}{\Gamma(a_j)}\theta_j^{-(1+\beta a_j)}\exp\left(-\frac{b_j}{\theta_j^{\beta}}\right) \tag{16}$$

通常我们依据历史数据或专家的经验可以知道形状参数 β 是小于 1(对应的失效率单调递减)还是大于 1(对应于失效率单调递增). 因此若已知 $\beta\in(0,1)$ 中，则取 Beta 的先验分布为 β 分布：

$$\pi_1(\beta)=\frac{1}{B(\alpha_1,\beta_1)}\beta^{\alpha_1-1}(1-\beta)^{\beta_1-1},\ 0\le\beta\le1. \tag{17}$$

若已知 $\beta\in(1,\infty)$，则取 $\beta-1$ 的先验分布为 Γ 分布 $\Gamma(\alpha_2,\beta_2)$，即

$$\pi_2(\beta)=\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}(\beta-1)^{\alpha_2-1}e^{-\beta_2(\beta-1)},\beta>1, \tag{18}$$

先验分布中的常数 $\alpha_1>1$，$\beta_1>1$，$\alpha_2\ge1$ 和 $\beta_2>0$ 根据已有的先验信息或专家意见确定. 由于

$$\frac{\partial^2\pi_1(\beta)}{\partial\beta^2}=-\frac{\alpha_1-1}{\beta^2}-\frac{\beta_1-1}{(\beta-1)^2}<0,\quad\frac{\partial^2\pi_2(\beta)}{\partial\beta^2}=-\frac{\alpha_2-1}{\beta^2}<0,$$

因此上述 2 个先验均是对数上凸的. 记 β 的先验分布为 $\pi(\beta)$，β 的参数空间为 B，$H_p=\{(\theta_1,\cdots,\theta_p)\mid\theta_p<\theta_{p-1}<\cdots<\theta_1<\theta_2k_{2,1}<\cdots<\theta_pk_{p,1}\}$. 至此，我们可以得到 $\beta,\vec{\theta}$ 的后验分布

$$g(\beta,\theta\mid\tau)\propto\pi(\beta)\beta^{r+p}V^{\beta-1}\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{\theta_i^{1+\beta(a_i+r_i)}}\exp\left\{-\frac{\tau_i(\beta)+b_i}{\theta_i^{\beta}}\right\},\ \beta\in B,\ \theta\in H_p. \tag{19}$$

参数 β 和 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$ 的后验分布及其 Bayes 估计无法按经典的方法得到，但可按的 Gibbs 抽样方法实现[4]. 其中的关键步骤就是获得可以抽样的完全后验分布. 记 $\vec{\theta}_{(-j)}=\left\{\theta_i,\ i\ne j,i=1,2,\cdots,p\right\}$，则由(19)知，$\theta_j$ 的完全条件后验分布为

$$\pi(\theta_j\mid\beta,\theta_{(-j)},\tau)=\frac{\beta(b_j+\tau_j(\beta))^{a_j+r_j}}{\Gamma(a_j+r_j)}\frac{1}{\theta_j^{1+\beta(a_j+r_j)}}\exp\left(-\frac{\tau_j(\beta)+b_j}{\theta_j^{\beta}}\right), \tag{20}$$

即 $\theta_j^{\beta}\mid\beta,\vec{\theta}_{(-j)},\tau\sim IG(a_j+r_j,\tau_j(\beta)+b_j)$ $j=1,2,\cdots,p$，$\theta_j\in G_i$，其中

$$\begin{aligned}G_1&=\left\{\theta_1:\theta_2<\theta_1<\theta_2k_{2,1}\right\}\\G_p&=\left\{\theta_p:k_{p-1,p}\theta_{p-1}<\theta_p<\theta_{p-1}\right\}\\G_i&=\left\{\theta_i:\theta_{i+1}<\theta_i<\theta_{i-1},\ k_{i-1,i}\theta_{i-1}<\theta_i<k_{i+1,i}\theta_{i+1}\right\}\\&=\left\{\theta_i:\max(\theta_{i+1},k_{i-1,i}\theta_{i-1})<\theta_i<\min(\theta_{i-1},k_{i+1,i}\theta_{i+1})\right\},\end{aligned}$$

$\tau_j(\beta)$ 由(14)给出. 因此 θ_j 的完全条件后验分布可通过截断 Γ 分布的抽样得到.

β 的完全条件后验分布为

$$\pi(\beta\mid\vec{\theta},\tau)\propto\pi(\beta)\beta^{r+p}V^{\beta-1}\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{\theta_i^{1+(a_i+r_i)\beta}}\exp\left\{-\frac{\tau_i(\beta)+b_i}{\theta_j^{\beta}}\right\},\ \beta\in B. \tag{21}$$

记 $h(\beta)=\ln\pi(\beta\mid\vec{\theta},\tau)$，则(在此仅考虑定时截尾情形)

$$\frac{\partial^2h(\beta)}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2\ln\pi(\beta)}{\partial^2\beta}-\frac{r+p}{\beta^2}-\sum_{i=1}^{p}\left\{\sum_{k=1}^{r_i}\left(\frac{t_{ik}}{\theta_i}\right)^{\beta}\left[\ln\left(\frac{t_{ik}}{\theta_i}\right)\right]^2+(n_i-r_i)\left(\frac{\tau_{i0}}{\theta_i}\right)^{\beta}\left[\ln\left(\frac{\tau_{i0}}{\theta_i}\right)\right]^2\right\}$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{\theta_i^{\beta}}[\ln(\theta_i)]^2.$$

由于 $b_i > 0$, $i = 1,2,\cdots,p$, $\tau_{i0} > 0$, $t_{ik} > 0$, $k = 1,2,\cdots,r_i$, $i = 1,2,\cdots,p$,且 $\pi(\beta)$ 是对数上凸的,因此得出 β 的完全条件后验分布也是对数上凸的. 其抽样按 Gilks 和 Wild(1992) 的自适应判别抽样法(Adaptive Rejection Sampling) 获得.

设 $(\theta_{k,1},\theta_{k,2},\cdots,\theta_{k,p},\beta_k,\ k = 1,2,\cdots,M_1,M_1+1,\cdots,M)$ 为参数 $(\theta_1,\cdots,\theta_p,\beta)$ 的一个 Gibbs 样本,其中 M_1 为舍弃的样本容量,则 θ_j 和 β 的 Bayes 估计分别为

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{M - M_1}\sum_{k=M_1+1}^{M}\theta_{k,j},\ j = 1,2,\cdots,p, \tag{22}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{M - M_1}\sum_{k=M_1+1}^{M}\beta_k. \tag{23}$$

由(12),(22)和(23),根据 Markov 定理可得参数 m, c 和 d 的估计:

$$\hat{m} = \hat{\beta}(1 + \hat{B}),$$

$$\hat{c} = -\frac{\hat{B}}{1 + \hat{B}},$$

$$\hat{a} = -\ln(\hat{d}) = \ln(1 + \hat{B}) + \frac{\hat{A}}{1 + \hat{B}},$$

其中 $\hat{A} = \dfrac{GH - IM}{EG - I^2}$, $\hat{B} = \dfrac{EM - IH}{EG - I^2}$, $I = \sum_{i=1}^{p} A^{-1}_{r_i,n_i}\ln(k_i)$, $G = \sum_{i=1}^{p} A^{-1}_{r_i,n_i}\ln^2(k_i)$, $H = \sum_{i=1}^{p} A^{-1}_{r_i,n_i}\hat{u}_i$, $M = \sum_{i=1}^{p} A^{-1}_{r_i,n_i}\hat{u}_i\ln(k_i)$, $E = \sum_{i=1}^{p} A^{-1}_{r_i,n_i}$, $\hat{u}_i = \ln(\hat{\theta}_i)$, $A^{-1}_{r_i,n_i}$ 为方差系数. 若它们均取为 1,则表示 A 和 B 的估计为通常的最小二剩估计,否则表示加权最小二剩估计. 在此我们使用线性估计的方差系数代替,它们可以查文献[10]中的相应表格. 在此基础上,进一步可以得到加速方程、加速系数以及在常应力 V 下可靠度的估计:

$$\begin{aligned} \ln\hat{\eta}_V &= -\ln(\hat{d}) - \hat{c}\ln(V), \\ \hat{\tau}_p &= \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\hat{c}}, \\ \hat{R}_V(t) &= \exp\left\{-(\hat{d}V^{\hat{c}}t)^{\hat{m}}\right\},\ t > 0. \end{aligned} \tag{25}$$

4 实例

考虑文献[9]中的 4 批定时电容器序加试验数据. 根据以往的数据分析,我们已经知道这种电容器的寿命服从二参数 Weibull 分布,且特征寿命与应力之间满足逆幂律关系(INVmodel). 由于根据以往的数据分析 β 均大于 1,故取 $\beta - 1$ 的先验分布为 $\Gamma(12,2)$;而 $\theta_i^{\beta}(i = 1,2,3,4)$ 的先验分布分别取为 $IG(a_i,b_i)$,其中 $a_1 = 10$, $a_2 = 8$, $a_3 = 5$, $a_4 = 3$, $b_1 = 9\times10^{10}$, $b_2 = 5\times10^{10}$, $b_3 = 8\times10^{9}$, $b_4 = 4\times10^{6}$ 取 Gibbs 抽样的迭代次数 $M = 1000$,迭代初始值取为 $\beta = 4.6$, $\theta_1 = 80$, $\theta_2 = 30$, $\theta_3 = 10$, $\theta_4 = 5$. 结果发现在迭代 50 步以内参数就很快达到稳定状态,因此 θ_i, $i = 1,2,3,4$ 和 β 的 Bayes 估计取为 $M_1 = 100$ 步后每隔 4 个取一次所得 225 个样本的均值,结果得到: $\hat{\beta} = 6.0206$, $\hat{\theta}_1 = 54.3507$, $\hat{\theta}_2 = 41.3841$, $\hat{\theta}_3 = 29.9559$, $\hat{\theta}_4 = 11.4457$, 代入公式(34)得 m, c 和 a 的估计: $\hat{m} = 0.2385$, $\hat{c} = 24.2387$, $\hat{a} = 111.6332$. 再代入公式(25)中得到加速方程的估计:

$$\ln\hat{\eta}_v = 111.6332 - 24.2387\ln V.$$

在常应力 $v = 32$ (V) 下, $t = 500$ (h) 的可靠度的估计 $\hat{R}_{32}(500) = 0.9940$. 与文[9]在 CE 模型下的结果基本一致,说明 CE 与 TFR 加速损伤模型比较接近.

参考文献:

[1] BERGER J O. Sun, Dongchu, Bayesian Analysis for the Poly Weibull Distribution[J]. Journal of the American Statistical Association, 1993, 88(424):1412 1418.

[2] BHATTACHARYYA G K, SOEJOETI Z A. A Tampered Failure Rate Model for Step Stress Accelerated Life Test[J]. Communications in Statistics— Theory Method, 1989, 18(5):1627 1643.

[3] MADI M T. Multiple Step Stress Accelerated Life Test: the Tampered Failure Rate Model[J]. Communications in Statistics— Theory and Method, 1993, 22(9):2631 2639.

[4] GELFAND A E, SMITH A F M, LEE T M. Bayesian Analysis of Constrained Parameter and Trucated Data Problems Using Gibbs Sampling[J]. Journal of the American Statistical Association, 1992, 87(418): 523 532.

[5] GILKS, WILD P. Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling[J]. Appl Statist, 1992: 337 348.

[6] NELSON W. Accelerated Life Testing—— Step stress Models and Data Analysis[J]. IEEE Transactions on Reliability, R 29, 1980:103 108.

[7] XU Haiyan, TANG Yincai. Commentary: The Khamis Higgins Model[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2003, 52 (1): 2003:1 6.

[8] 汤银才. TFR 模型下 Weibull 分布步加试验的寿命分布及统计分析[A]. 第六届国际可靠性、维修性、安全性会议(ICRMS)[C]. 西安,2004.

[9] 汤银才,费鹤良. 基于 Gibbs 抽样的 Weibull 分布序进应力加速寿命试验 的 Bayes 分析[J]. 数理统计与应用概率,1998,13:81 88.

[10] 中国电子技术标准化研究所. 可靠性试验用表[Z]. 北京:国防工业出版社,1987.

Bayesian Analysis of Weibull Progressive Stress Accelerated Life Tests under TFR and Inverse Power Law Models

TANG Yin-cai, LIU Fang-fang

(College of Mathematics and Sciences, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: This paper discusses the life distributions of progressive stress accelerated life tests for Weibull distributions under TFR model and gives the Bayesian estimates of the distribution parameters and the coefficients in the inverse power law accelerated equation. An practical example is given to illustrate the proposed method.

Key words: Weibull distribution; Progressive stress accelerated life test; Bayes estimate; TFR model; Inverse power law