# WEIBULL 分布参数估计的精度分析

王蓉华

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

**摘 要**：给出了两参数 Weibull 分布刻度参数一致地优于逆矩估计的一种新的估计量.

**关键词**：Weibull 分布；逆矩估计；Monte-Carlo 模拟

**中图分类号**：O213.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-5137(2002)04-0021-04

## 0 引 言

在可靠性寿命试验中，Weibull 分布是最常用的寿命分布之一，它的分布函数为

$$F(t)=1-exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\} \quad t>0 \tag{1}$$

其中 $m>0$ 称为形状参数，$\eta>0$ 称为刻度参数.

Weibull 分布已有很多文献作了研究，Mann 等[1]、Lawless[2]及费鹤良[9]都作了详细的总结，文献[3]对点估计作了模拟比较，文献[10]对 $m$ 的 BLUE 作了无偏性修正. 最近，文献[4]对区间估计方法也作了模拟比较，在全样本场合下，文献[5]利用不变检验得到了优于 MLE 的点估计，文献[6]利用对数似然比方法给出了 Weibull 分布参数区间估计的近似计算方法. 文献[7]给出了参数的逆矩估计并认为逆矩估计为目前所有估计中是最优的.

本文给出了 Weibull 分布形状参数的类似于修正的 BLUE 估计的一种新的估计量，其模拟精度略差于逆矩估计，但它避免了繁烦的查表，另外值得指出的是：利用这个估计而得到的刻度参数的估计从模拟精度看却都优于逆矩估计，由此可以认为是刻度参数的一种比较精确的估计.

另外，本文所言的 Monte-Carlo 模拟是在参数真值为1的条件下进行的，共作了1000次模拟.

## 1 WEIBULL 分布的参数估计及精度比较

设产品的寿命服从两参数 Weibull 分布(1)，现假定有 $n$ 个产品进行寿命试验，有 $r$ 个产品失效时停止试验(即定数截尾寿命试验)，其次序失效数据为：$t_{(1)}\leqslant t_{(2)}\leqslant\cdots\cdots\leqslant t_{(r)}$，由文献[7]知：形状参数 $m$ 的逆矩估计为方程：

$$\sum_{i=1}^{r-1}\left(i\ln\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)=r-1 \tag{2}$$

的根. 为了使精度更精确，文献[7]就小样本场合对上式作了修正即

**收稿日期**：2000-10-31

**作者简介**：王蓉华(1972-)，女，上海师范大学数理信息学院讲师.

$$\sum_{i=1}^{r-1}\left(i\ln\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)=r-2 \tag{3}$$

其中：$S_i=\sum_{j=1}^{i}t_{(j)}^{m}+(n-i)t_{(i)}^{m}, i=1,2,\cdots\cdots,r.$

记从(2)式得到的 $m$ 的估计为 $m^*$，而从(3)式得到的 $m$ 的估计为 $\hat{m}$. 我们就全样本场合对 $n=3(1)42$ 就 $\hat{m}$ 及 $m^*$ 进行了模拟，其相应的均值及均方误差中可看到：(1) 随着 $n$ 的增大，$\hat{m}$、$m^*$ 的均方误差呈减小趋势，也即估计愈精确；(2)$\hat{m}$ 的均值基本上比真值小，而 $m^*$ 的均值却都大于真值；(3)$\hat{m}$ 的均方误差基本上都比 $m^*$ 的均方误差小. 于是可以认为：$\hat{m}$ 优于 $m^*$ 且 $\hat{m}$ 的无偏性特征相当明显.

由文献[7]得到 $\eta$ 的逆矩估计为：

$$\hat{\eta}=\left[\frac{1}{r}\left(t_{(1)}^{\hat{m}}+\cdots\cdots+t_{(r)}^{\hat{m}}+(n-r)t_{(r)}^{\hat{m}}\right)\right]^{\frac{1}{\hat{m}}} \tag{4}$$

对 $n=5(5)25, r=3(1)n$ 作了模拟，从中可以看到：(1) 在全样本场合，随着 $n$ 的增大，$\hat{\eta}$ 的均方误差呈减小趋势，也即估计愈精确；(2) 对固定的 $n$，随着 $r$ 的增大，$\hat{\eta}$ 的均方误差呈减小趋势，也即估计愈精确.

由于(3)式为超越方程，故 $\hat{m}$ 无法用次序统计量显式表出，虽然方程一定有唯一的正根[7]，但这给计算及实际工程用上带来了一定的麻烦，于是想到如下近似处理：记

$$T(m)=\sum_{i=1}^{r-1}\left(i\ln\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) \tag{5}$$

对 $T(m)$ 在零点处进行一阶泰勒展开，并由(3)式得：

$$m\sum_{i=1}^{r-1}i\frac{n-i}{n}(\ln t_{(i+1)}-\ln t_{(i)})\approx r-2 \tag{6}$$

于是得 $m$ 的估计 $\hat{m}_0$：

$$\hat{m}_0=\frac{n(r-2)}{\sum_{i=1}^{r-1}i(n-i)(\ln t_{(i+1)}-\ln t_{(i)})} \tag{7}$$

下面考察其近似分布：

**引理**[8] 设 $W_{(1)}\leqslant W_{(2)}\leqslant\cdots\cdots\leqslant W_{(s)}\leqslant\cdots\cdots\leqslant W_{(r)}$ 是容量为 $n$ 的标准极小值分布的前 $r$ 个次序统计量. 设 $1\leqslant s\leqslant r\leqslant n$，于是当 $s$ 和 $r$ 固定，$n\to\infty$ 时，有下列渐近结果：

(1) $W_{(s)}-W_{(1)}\geqslant W_{(s)}-W_{(2)}\cdots\cdots\geqslant W_{(s)}-W_{(s-1)}$ 是样本大小 $s-1$，相互独立且同时服从标准指数分布的 $s-1$ 个次序统计量.

(2) $W_{(r)}-W_{(r-1)}\leqslant W_{(r)}-W_{(r-2)}\leqslant\cdots\cdots\leqslant W_{(r)}-W_{(s)}$ 是样本大小为 $r-1$，相互独立且同时服从标准指数分布的 $r-s$ 个次序统计量，并且与(1)中的 $s-1$ 个次序统计量是渐近独立的.

(3) $(r-1)(W_{(r)}-W_{(r-1)}), (r-2)(W_{(r-1)}-W_{(r-2)}),\cdots,s(W_{(s+1)}-W_{(s)})$ 是 $r-s$ 个相互独立且同时服从标准指数分布的随机变量，并且与(1)中的 $s-1$ 个次序统计量渐近独立.

为了利用上述引理，对 $\hat{m}_0$ 作如下变化：

$$\hat{m}_0=m\frac{2n(r-2)}{\sum_{i=1}^{r-1}(n-i)\left[2i\left(\ln\left(\frac{t_{(i+1)}}{\eta}\right)^{m}-ln\left(\frac{t_{(i)}}{\eta}\right)^{m}\right)\right]} \tag{8}$$

令：

$$X=\sum_{i=1}^{r-1}(n-i)\left[2i\left(ln\left(\frac{t_{(i+1)}}{\eta}\right)^{m}-\ln\left(\frac{t_{(i)}}{\eta}\right)^{m}\right)\right] \tag{9}$$

记：$M=E(X), V=Var(X)$，易知：当 $n$ 很大时，有

$$M=(r-1)(2n-r),\quad V=4(r-1)\left[n^2-nr+\frac{1}{6}(2r-1)r\right].$$

另外易知 $X$ 为加权 $\chi^2$—变量,由文献[12]知:当 $n\to\infty$ 时,$\frac{2MX}{V}$ 近似服从 $\chi^2\left(\frac{2M^2}{V}\right)$,由文献[11]知:当 $n\to\infty$ 时,$\frac{V}{2MX}$ 近似地服从逆 $\Gamma$—分布,于是有:

$$\mathrm{E}\left(\frac{V}{2MX}\right)\approx\frac{1}{2\left[\left(\frac{V}{M^2}\right)^{-1}\right]}=\frac{V}{2(M^2-V)}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{V}{2MX}\right)\approx\frac{1}{4\left[\left(\frac{V}{M^2}\right)^{-1}-1\right]^2\left[\left(\frac{V}{M^2}\right)^{-1}-2\right]}=\frac{V^3}{4[M^2-V]^2[M^2-2V]}$$

进而有:$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)\approx\frac{M}{M^2-V}$,$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{X}\right)\approx\frac{M^2V}{[M^2-V]^2[M^2-2V]}$.

令:

$$\hat{m}_1=\frac{M^2-V}{M}\frac{1}{\sum_{i=1}^{r-1}(n-i)[2i(\ln t_{(i+1)}-\ln t_{(i)})]}\tag{8}$$

当 $n\to\infty$ 时,$\mathrm{E}(\hat{m}_1)=m\frac{M^2-V}{M}\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)\approx m$

$$\mathrm{Var}(\hat{m}_1)=\mathrm{MSE}(\hat{m}_1)=m^2\frac{(M^2-V)^2}{M^2}\mathrm{Var}\left(\frac{1}{X}\right)\approx\frac{V}{M^2-2V}m^2$$

于是有:$\hat{m}_1$具有近似无偏性.虽然上述结果是在 $n\to\infty$ 场合下得到的,但从具体的模拟结果来看可以得到:(1)在 $r$ 固定的条件下,随着 $n$ 的增大,其 $\hat{m}_1$的均值呈增大趋势但都小于真值;(2)在全样本场合,随着 $n$ 的增加,$\hat{m}_1$的均值呈增大趋势、均方误差呈减小趋势,也即估计越精确;(3)用 $\hat{m}_1$作为 $m$ 的估计缺陷比较明显,一是偏性大、二是均方误差也比较大.

利用 $\hat{m}_1$可得 $\eta$ 的估计 $\hat{\eta}_1$:

$$\hat{\eta}_1=\left[\frac{1}{r}(t_{(1)}^{\hat{m}}+\cdots\cdots+t_{(r)}^{\hat{m}}+(n-r)t_{(r)}^{\hat{m}})\right]^{\frac{1}{\hat{m}_1}}\tag{11}$$

从模拟结果可以看到:(1)随着 $n$ 的增大,$\hat{\eta}_1$的均方误差呈减小趋势,也即估计愈精确;(2)对固定的 $n$,随着 $r$ 的增大,$\hat{\eta}_1$的均方误差基本上呈减小趋势.

考虑到 $\hat{m}_1$的缺陷,设法给其配上一个修偏系数 $k_{r,n}$即令:

$$\widetilde{m}=k_{r,n}^{-1}\hat{m}_1\tag{12}$$

其中 $k_{r,n}$的值即为$\frac{\hat{m}_1}{m}$的模拟均值,这样 $\widetilde{m}$ 的模拟均值很接近于1,从模拟结果可以看到:(1)在全样本下,随着 $n$ 的增大,其均方误差呈减小趋势,也即估计愈精确;(2)对固定的 $n$,随着 $r$ 的增大,其均方误差呈减小趋势,也即估计愈精确.

由此可得 $\eta$ 的估计 $\tilde{\eta}$:

$$\tilde{\eta}=\left[\frac{1}{r}(t_{(1)}^{\widetilde{m}}+\cdots\cdots+t_{(r)}^{\widetilde{m}}+(n-r)t_{(r)}^{\widetilde{m}})\right]^{\frac{1}{\widetilde{m}_1}}\tag{12}$$

上述3种参数估计$(\hat{m},\hat{\eta})$、$(\hat{m}_1,\hat{\eta})$及$(\widetilde{m},\tilde{\eta})$的综合比较,从模拟结果可以看到:(1)对形状参数,对固定的 $n$,随着 $r$ 的增加,开始有 $\mathrm{MSE}(\hat{m}_1)\leqslant\mathrm{MSE}(\hat{m})\leqslant\mathrm{MSE}(\widetilde{m})$,后变为 $\mathrm{MSE}(\hat{m})\leqslant\mathrm{MSE}(\widetilde{m})\leqslant\mathrm{MSE}(\hat{m}_1)$,故对于形状参数我们推荐使用逆矩估计 $\hat{m}$.(2)对刻度参数,$\mathrm{MSE}(\hat{\eta})$一般都比 $MSE(\hat{\eta}_1)$小,而 $\mathrm{MSE}(\tilde{\eta})$都比 $\mathrm{MSE}(\hat{\eta})$、$\mathrm{MSE}(\hat{\eta}_1)$小,故对于刻度参数我们推荐使用 $\tilde{\eta}$.

最后需要指出的是$(\widetilde{m},\tilde{\eta})$与逆矩估计$(\hat{m},\hat{\eta})$有类似的性质,即如 $m,\eta$ 为参数的真值,则有:$\frac{\widetilde{m}}{m}$及 $m(\ln\tilde{\eta}-\ln\eta)$的分布不依赖于参数 $m,\eta$.

鉴于篇幅限制,列表省略.

## 参考文献:


[1] MANN N R, SCHAFER R E, SINGPURWALLA N D. Methods for statistical analysis of Reliability and lifetime Data[M]. New York:John Wiley, 1974.

[2] LEWLESS J F. Statistical Models and Methods for lifetime date[M],New York: John Wiley,1982.

[3] GIBBONS D I, VANCE L C. A dimulation study of estimators for the 2-parameter Weibull distribution[J]. IEEE Trans. Reliability,1981, 30:61-66

[4] CHAO A H, WANG S J. Comparison of confidence intervals for the parametors of the Weibull and Extrome value distribution[J]. IEEE Trans. Reliability, 1986, 35:111-113.

[5] KAPPENMAN R F. A testing approach to estimation[J]. Comm. Statist A, 1985, 14:2365-2377.

[6] DICICCO T J. Approximate inference for the Generalized Gamma distribution[J]. Technometrics, 1987,29: 33-40

[7] 王炳兴. Weibull分布的统计推断[J]. 应用概率统计,1992, 8(4): 357-363.

[8] 戴树森. 关于威布尔和对数威布尔分布的某些近似检验[J]. 中国科学院数学研究所概率统计室,概率统计通讯,1978:239-256

[9] 费鹤良. 威布尔分布和正态分布参数估计方法综述[J]. 数理统计和应用概率, 1984(2): 115-126。

[10] 张建中,费鹤良,王玲玲. 威布尔分布参数估计方法的精度比较[J]. 应用数学学报,1982(5):397-411.

[11] 戴树森. 恒定应力加速寿命试验的简单线性无偏估计[J]. 应用数学学报,1978,3:204-212

[12] PATNAIK. The non-contral $\chi^2$ and F distribution and their applications[M]. Priontrika. 1949. 36:202-232


# An Accuracy Analysis of Parametric Estimation of the Weibull Distribution


WANG Rong-hua

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)



**Abstract**: We propose a new method for the scale estimation of the parameter of the 2-parameter Weibull distribution. It is better than the inverse moment method.



**Key words**: Weibull distribution; inverse moment; Monte-Carlo