第28卷第3期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 28, No. 3
1999年9月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Sep. 1999

Weibull分布在定时截尾样本下序进应力加速寿命试验的有约束统计分析*

费鹤良, 周广君
(上海师范大学 数学科学学院, 上海 200234)

摘　要: 在Weibull分布场合, 讨论了定时截尾样本下序进应力加速寿命的统计分析. 用BAYWS方法给出了逆幂律中未知参数的估计, 以及在正常应力下产品寿命分布的参数估计, 最后给出一个实例.

关键词: 序进应力加速寿命试验; 定时截尾; Weibull分布; BAYES估计
中图分类号: O213.2　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(1999)03-0001-09

0　引　言

由于高可靠性产品的不断出现, 产品更新周期的缩短, 用通常的寿命试验方法来评估和鉴定产品的可靠性, 从试验时间和试验经费来说已成为企业的沉重负担. 在许多情况下, 实际上不可能作这种试验, 有的试验即使结果出来了, 但产品可能更新, 失去了试验的意义. 因此, 从本世纪60年代以来, 加速寿命试验方法很快发展起来, 随之而来的统计分析方法也得到相应的发展.

加速寿命试验方法主要有3种[1]:

(1) 恒定应力加速寿命试验(简称恒加试验).

(2) 步进应力加速寿命试验(简称步加试验).

(3) 序进应力加速寿命试验(简称序加试验).

步加试验和序加试验比恒加试验更能缩短试验时间, 节省费用. 序加试验是一种加于受试产品上的应力随时间连续增加的寿命试验, 试验一直到受试产品有部分或全部失效为止. 这种方法已在有关电子产品上得到应用.

序加试验的统计分析近年来有较大的进展, 文献[2]讨论了寿命分布为指数分布时序加试验的参数估计. 文献[3]讨论了序加试验的MLE. 文献[4]指出对Weibull分布和指数分

收稿日期: 1999-03-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19671058)
作者简介: 费鹤良(1938-), 男, 上海师范大学数学科学学院教授.

布情况下,MLE 不一定存在,要求数据满足一定的约束条件.文献[5]对一类寿命分布(例如Weibull 分布,对数正态分布等)给出了序加应力 $V(t) = Kt$ 下定数截尾样本序加试验数据的统计推断方法.但文献[5]没有考虑到隐含在参数内的一个约束条件,使参数的估计值超出了参数真值所允许的范围,以致有时无法估计出加速方程中的未知参数.对于定时截尾(即Type-I型截尾)样本下序加试验的统计分析,文献[6]提出了两种定时截尾序加试验的统计分析方法,文献[7]利用BAYES 方法有效的解决了文献[5]中出现的约束问题.文献[8]利用矩法与极大似然估计相结合的方法讨论了Weibull 分布 Type-I型截尾数据恒加试验的统计分析.本文将[7]的方法推广到定时截尾序加试验的统计分析上,用BAYES 方法给出未知参数的估计,最后给出一个实例,说明方法的可行性.

1 序加试验模型

1.1 基本假定

本文在下列假定下,讨论序加试验的统计分析.

假定 1 在常应力 V 下,产品寿命服从威布尔分布,其累积分布函数($C.D.F$)为

$$F_V(t) = 1 - \exp\{-(\frac{1}{\eta_V})^m\}, \quad t > 0,$$

其中 $m > 0$ 为形状参数,它与应力 V 无关,η_V 为特征寿命.

假定 2 特征寿命 η_V 与应力 V 之间满足逆幂律关系,即

$$\eta_V = \frac{1}{dV^C},$$

其中参数 $d > 0, C > 0$ 与应力 V 无关.

假定 3 产品的剩余寿命仅依赖于当时已累积失效的部分和当时的应力水平,而与累积方式无关.这便是Nelson 假定[10],它的数学含义是:在应力水平 V_i 下,产品工作 t_i 的累积失效概率 $F_i(t_i)$,相当于这种产品在应力 V_j 下工作 t_{ij} 的累积失效概率,即 $F_i(t_i) = F_j(t_{ij})$.

1.2 试验安排

在以上基本假定下,定时截尾样本下的序加试验作如下安排:选定 l 个序进应力水平,$V_i(t) = K_i t,\ i = 1, 2, \cdots, l$,且要求 $0 < K_1 < K_2 < \cdots < K_l$,$n$ 个随机样品分成 l 组,第 i 组包含 n_i 个样品,$n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$,选定 l 个终止时间 $\tau_{01}, \tau_{02}, \cdots, \tau_{0l}$,然后把第 i 组样品在应力 $V_i(t) = K_i t$ 下作定时截尾序加试验,终止时间为 τ_{0i},并假定有 r_i 个样品在时间 $[0, \tau_{0,i})$ 内失效,$0 < r_i < n_i$,失效时间为

$$T_{1,n_i}(i) \le T_{2,n_j}(i) \le \cdots \le T_{r_i,n_i}(i),\ i = 1, 2, \cdots, l.$$

2 预备知识

产品寿命 T 服从Weibull 分布,其累积分布函数($C.D.F$)为

$$F(t) = 1 - \exp\{-(\frac{t}{\eta})^m\}, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

其中 $m > 0$ 为形状参数,$\eta > 0$ 为特征寿命.则 $\ln T$ 服从极值分布,它的($C.D.F$)为

$$F(x) = 1 - \exp\{-\exp(\frac{x-\mu}{\sigma})\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

此处 $\sigma = \frac{1}{m}$ 为尺度参数, $\mu = \ln\eta$ 为位置参数.

取 n 个产品在序进应力 $V = Kt$ 下作寿命试验, $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 表示 n 个产品的失效时间, 设 r 为在 $[0, \tau)$ 时间内产品失效的个数, p 表示在时间 $[0, \tau)$ 内产品失效的概率, 即 $p = P(T < \tau)$, 定义 I 为事件 $\{T < \tau\}$ 的示性函数,

$$I = \begin{cases} 0, & T \geq \tau \\ 1, & T < \tau, \end{cases}$$

$E(\cdot)$ 表示在条件 $\{0 < r < n\}$ 下的条件均值.

文献[9]利用文献[8], 引入纠偏方法给出了 σ 与 μ 的近似无偏估计(AUE),

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\ln\tau - \ln T_i) I_i}{K(r, n)}, \tag{2.2}$$

$$\hat{\mu} = \ln T_{r,n} - E_C(Z_{r,n})\hat{\sigma}, \tag{2.3}$$

这里 $K_{r,n}$ 为无偏性系数, $T_{r,n}$ 为时间 $[0, \tau)$ 内最后一个失效产品的失效时间, $Z_{r,n}$ 为样本大小为 n 的标准极值分布的第 r 个次序统计量. $E_C(Z_{r,n})$ 为 $Z_{r,n}$ 在条件 $C = \{0 < r < n\}$ 下的条件期望, 估计量 $\hat{\sigma}, \hat{\mu}$ 的条件方差[9]为:

$$\mathrm{Var}_C(\hat{\sigma}/\sigma) = D(r, n), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Var}_C(\hat{\mu}/\sigma) = D_1(r, n), \tag{2.5}$$

上述各式中遇到的 $K_{r,n}, D(r, n), D_1(r, n)$ 与 $E_C(Z_{r,n})$ 的计算参见[9].

注意以上结果都是在假定 $r \neq 0, r \neq n$ 下进行的. 因为当 $r = 0$ 时说明在试验时间内没有产品失效, 上述估计无法实现; 当 $r = n$ 时, 说明产品全部失效, 这时可用[5][7]的方法进行参数估计. 本文讨论也在假定 $r \neq 0, r \neq n$ 下进行的, 在第 3 节中给出定时截尾样本下序加试验的 BAYES 统计分析方法.

3　参数估计

设产品寿命 T 服从 Weibull 分布(3.1), 在序进应力 $V(t) = K_i t$ 下作寿命试验, $0 < K_1 < K_2 < \cdots < K_l$. 由[5]可知在序加应力 $V(t) = K_i t$ 下, 产品寿命 $T^{(i)}$ 的寿命分布仍为 Weibull 分布, 其 $C.D.F$ 为

$$F_{k_i}(t) = 1 - \exp\{-(\frac{1}{\eta_i'})^{m_i'}\}, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

此处 $\eta_i' = \left(\frac{1+c}{dk_i^c}\right)^{\frac{1}{1+c}}$, $m_i' = m(1+c)$, $i = 1, 2, 3, \cdots, l$. $\ln T^{(i)}$ 服从极值分布, 其 $C.D.F$ 为

$$F(y) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{y - \mu_i'}{\sigma_i'}\right)\right\}, \quad -\infty < y < \infty, \tag{3.2}$$

此处 $\mu_i' = \ln\eta_i'$, $\sigma_i' = \frac{1}{m_i'}$, $i = 1, 2, 3, \cdots, l$. 令:

$$A = \frac{1}{1+c}[\ln(1+c) - \ln d], \quad B = -\frac{c}{1+c},$$

则 $\mu_i' = A + B\ln k_i$. $\sigma' = \sigma_1' = \sigma_2' = \cdots = \sigma_l' = \frac{1}{m(1+c)}$. 由(2.2), (2.3)式结果, 可以得到 $\sigma_i' =$

$\frac{1}{m_i}$的近似无偏估计 $\hat{\sigma}_i$ 与条件方差 $D(r_i, n_i)$. 由此得到 σ 的基于 $\hat{\sigma}_i'$, $i = 1, 2, 3, \cdots, l$ 的近似最小方差无偏估计:

$$\hat{\sigma}' = \frac{\sum_{i=1}^{l} D^{-1}(r_i, n_i)\hat{\sigma}_i'}{\sum_{i=1}^{l} D^{-1}(r_i, n_i)}, \tag{3.3}$$

进而得到

$$\hat{m}' = \frac{1}{\hat{\sigma}'}. \tag{3.4}$$

文献[6]方法给出了Weilbull分布在定时截尾样本下序加试验的统计分析. 但应指出的是这两种方法都没有考虑隐含在参数内的一个约束条件, 以致有时无法估计出加速方程中的未知参数. 由[7]可知, 在递增水平 $K_1 < K_2 < \cdots < K_l$ 下, μ_i 存在约束条件

$$\mu_l' < \mu_{l-1}' < \cdots < \mu_1' < \mu_2' + \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) < \cdots < \mu_l' + \ln\left(\frac{K_l}{K_1}\right), \tag{3.5}$$

因此我们要求 μ_i 的估计 $\hat{\mu}_i$ 满足

$$\hat{\mu}_l' < \hat{\mu}_{l-1}' < \cdots < \hat{\mu}_1' < \hat{\mu}_2' + \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) < \cdots < \hat{\mu}_l' + \ln\left(\frac{K_l}{K_1}\right), \tag{3.6}$$

或 B 的估计 $\hat{B}$ 满足

$$-1 < \hat{B} < 0, \tag{3.7}$$

下面就把文[7]采用的BAYES方法推广到定时截尾序加试验的统计分析上来. 类似于[7]的方法, 将 m 的估计 $\hat{m}$ 取定, 令 $\lambda_i = \exp(-\mu_i'\hat{m}')$, 在 $V(t) = K_i t$ 下, 则 $T_i' = (T^{(i)})^{\hat{m}'}$ 的 C. D. F 为

$$F_{K_i}(t) = 1 - \exp\{-(\lambda_i t)\},\quad i = 1, 2, 3, \cdots, l,\quad t > 0, \tag{3.8}$$

此处 $\hat{m}$ 由式(3.3), (3.4)给出. 由此我们可以看出 λ_i 有约束关系:

$$\lambda_l > \lambda_{l-1} > \cdots > \lambda_1 > d_{12}\lambda_1 > \cdots > d_{1l}\lambda_1,$$

此处 $d_{ij} = \left(\frac{K_i}{K_j}\right)^{\hat{m}'}$. 令

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{r_i}\left(T_{j,n_i}^{(i)}\right)^{\hat{m}'} + (n_i - r_i)(t_{i0})^{\hat{m}'},\quad i = 1, 2, 3, \cdots, l,$$

$$\tilde{\tau} = (\tau_i, n_i, r_i,\ i = 1, 2, \cdots, l),$$

$$G_l = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l): \lambda_l > \lambda_{l-1} > \cdots > \lambda_1 > d_{12}\lambda_2 > \cdots > d_{1l}\lambda_l\}.$$

由(3.8)式可以得似然函数

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l \mid \tilde{\tau}) = \prod_{i=1}^{l}\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_i\tau_i},\quad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \in G_l.$$

假定 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ 的先验分布为

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) = \prod_{i=1}^{l}\lambda_i^{-1},\quad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \in G_l.$$

进而可以得出 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ 的后验概率密度

$$g(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\,|\,\tilde{\tau})=\frac{\prod_{i=1}^{l}\lambda_i^{r_i-1}e^{-\lambda_i\tau_i}}{\int\cdots\int_{G_l}\prod_{i=1}^{l}\lambda_i^{r_i-1}e^{-\lambda_i\tau_i}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\cdots\mathrm{d}\lambda_l},\quad(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)\in G_l.\qquad(3.9)$$

下面给出 λ_i 的BAYES 估计, 一般情况下的 λ_i 的估计是很难用显式形式表达的. 所以本文主要给出 $p=3$ 情况下 λ_i 的估计.

$$G_3=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3):\lambda_3>\lambda_2>\lambda_1>d_{12}\lambda_2>d_{13}\lambda_3\}.$$

记

$$\sum\nolimits_1=\sum_{h_1=0}^{r_1-1},\quad\sum\nolimits_{21}=\sum_{h_2=0}^{h_1+r_2-1},\quad\sum\nolimits_{23}=\sum_{h_2=0}^{h_3+r_2-1},\quad\sum\nolimits_3=\sum_{h_3=0}^{r_3-1},$$

由文[7]可得到

$$D_{30}=\int_0^{\infty}\int_{d_{23}\lambda_3}^{\lambda_3}\int_{d_{12}\lambda_2}^{\lambda_2}\prod_{i=1}^{3}\lambda_i^{r_i-1}e^{-\lambda_i\tau_i}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\mathrm{d}\lambda_3=$$

$$\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(d_{12}\tau_1+\tau_2)^{r_2}[\tau_3+d_{23}(d_{12}\tau_1+\tau_2)]^{r_3}}\sum\nolimits_1\sum\nolimits_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{d_{12}\tau_1}{d_{12}\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{d_{12}\tau_1+\tau_2}{\tau_3+d_{23}(d_{12}\tau_1+\tau_2)}\right)^{h_2}-$$

$$\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(d_{12}\tau_1+\tau_2)^{r_2}(\tau_3+d_{12}\tau_1+\tau_2)^{r_3}}\sum\nolimits_2\sum\nolimits_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{d_{12}\tau_1}{d_{12}\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{d_{23}(d_{12}\tau_1+\tau_2)}{\tau_3+(d_{12}\tau_1+\tau_2)}\right)^{h_2}-$$

$$\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(\tau_1+\tau_2)^{r_2}[\tau_3+d_{23}(\tau_1+\tau_2)]^{r_3}}\sum\nolimits_2\sum\nolimits_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{d_{23}(\tau_1+\tau_2)}{\tau_3+d_{23}(\tau_1+\tau_2)}\right)^{h_2}+$$

$$\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(\tau_1+\tau_2)^{r_2}(\tau_3+\tau_1+\tau_2)^{r_3}}\sum\nolimits_1\sum\nolimits_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_3+\tau_1+\tau_2}\right)^{h_2}.$$

由(3.9)可得到 λ_3 的后验概率密度 $g(\lambda_3\,|\,\tilde{\tau})$, 从而求得均方损失下 λ_3 的BAYES 估计为:

$$\hat{\lambda}_3=\frac{1}{D_{30}}\left\{\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(d_{12}\tau_1+\tau_2)^{r_2}[\tau_3+d_{23}(d_{12}\tau_1+\tau_2)]^{r_3}}\sum\nolimits_1\sum\nolimits_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{d_{12}\tau_1}{d_{12}\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot\right.$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{d_{23}(d_{12}\tau_1+\tau_2)}{\tau_3+d_{23}(d_{12}\tau_1+\tau_2)}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_3}{\tau_3+d_{23}(d_{12}\tau_1+\tau_2)}-$$

$$\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(d_{12}\tau_1+\tau_2)^{r_2}(\tau_3+d_{12}\tau_1+\tau_2)^{r_3}}\sum\nolimits_1\sum\nolimits_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{d_{12}\tau_1}{d_{12}\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{d_{12}\tau_1+\tau_2}{\tau_3+d_{12}\tau_1+\tau_2}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_3}{\tau_3+(d_{12}\tau_1+\tau_2)}-$$

$$\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(\tau_1+\tau_2)^{r_2}[\tau_3+d_{23}(\tau_1+\tau_2)]^{r_3}}\sum_1\sum_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{d_{23}(\tau_1+\tau_2)}{\tau_3+d_{23}(\tau_1+\tau_2)}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_3}{\tau_3+d_{23}(\tau_1+\tau_2)}+$$

$$\frac{\Gamma(r_1)}{\tau_1^{r_1}(\tau_1+\tau_2)^{r_2}(\tau_3+\tau_1+\tau_2)^{r_3}}\sum_1\sum_{21}\frac{\Gamma(h_1+r_2)}{h_1}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\left.\frac{\Gamma(h_2+r_3)}{h_2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_3+\tau_1+\tau_2}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_3}{\tau_3+\tau_1+\tau_2}\right\}.$$

类似地得到 λ_1 的BAYES 估计为

$$\hat{\lambda}_1=\frac{1}{D_{30}}\left\{\frac{\Gamma(r_3)}{\tau_3^{r_3}(d_{32}\tau_3+\tau_2)^{r_2}[\tau_1+d_{21}(d_{32}\tau_3+\tau_2)]^{r_1}}\sum_3\sum_{23}\frac{\Gamma(h_3+r_2)}{h_3!}\left(\frac{d_{32}\tau_3}{d_{32}\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\cdot\right.$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_1)}{h_2!}\left(\frac{d_{21}(d_{32}\tau_3+\tau_2)}{\tau_1+d_{21}(d_{32}\tau_3+\tau_2)}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_1}{\tau_1+d_{21}(d_{32}\tau_3+\tau_2)}-$$

$$\frac{\Gamma(r_3)}{\tau_3^{r_3}(d_{32}\tau_3+\tau_2)^{r_2}(\tau_1+d_{32}\tau_3+\tau_2)^{r_1}}\sum_3\sum_{23}\frac{\Gamma(h_3+r_2)}{h_3!}\left(\frac{d_{32}\tau_1}{d_{32}\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\cdot$$

$$\frac{\Gamma(h_2+r_1)}{h_2!}\left(\frac{d_{32}\tau_3+\tau_2}{\tau_1+d_{32}\tau_3+\tau_2}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_1}{\tau_1+(d_{32}\tau_3+\tau_2)}-$$

$$\frac{\Gamma(r_3)}{\tau_3^{r_3}(\tau_3+\tau_2)^{r_2}[\tau_1+d_{21}(\tau_3+\tau_2)]^{r_1}}\sum_3\sum_{23}\frac{\Gamma(h_3+r_2)}{h_3!}\left(\frac{\tau_1}{\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\cdot$$

$$\left(\frac{d_{21}(\tau_3+\tau_2)}{\tau_1+d_{21}(\tau_3+\tau_2)}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_1}{\tau_1+d_{21}(\tau_3+\tau_2)}-$$

$$\frac{\Gamma(r_3)}{\tau_3^{r_3}(\tau_3+\tau_2)^{r_2}(\tau_1+\tau_3+\tau_2)^{r_1}}\sum_3\sum_{23}\frac{\Gamma(h_3+r_2)}{h_3!}\left(\frac{\tau_1}{\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\cdot$$

$$\left.\frac{\Gamma(h_2+r_1)}{h_2!}\left(\frac{\tau_3+\tau_2}{\tau_1+\tau_3+\tau_2}\right)^{h_2}\frac{h_2+r_1}{\tau_1+\tau_3+\tau_2}\right\}.$$

λ_2 的BAYES 估计为

$$\hat{\lambda}_2=-\frac{1}{D_{30}}\left\{\frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_3)}{\tau_1^{r_1}(d_{12}\tau_1+\tau_2+d_{32}\tau_3)^{r_2}\tau_3^{r_3}}\sum_1\sum_3\frac{\Gamma(h_1+h_3+r_2)}{h_1!\ h_3!}\left(\frac{d_{12}\tau_1}{d_{12}\tau_1+\tau_2+d_{32}\tau_3}\right)^{h_1}\cdot\right.$$

$$\left(\frac{d_{32}\tau_3}{d_{12}\tau_1+d_{32}\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\frac{h_2+h_3+r_2}{d_{12}\tau_1+d_{32}\tau_3+\tau_2}-$$

$$\frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_3)}{\tau_1^{r_1}(\tau_1+\tau_2+d_{32}\tau_3)^{r_2}\tau_3^{r_3}}\sum_1\sum_3\frac{\Gamma(h_1+h_3+r_2)}{h_1!\ h_3!}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2+d_{32}\tau_3}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\left(\frac{d_{32}\tau_3}{\tau_1+d_{32}\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\frac{h_2+h_3+r_2}{\tau_1+d_{32}\tau_3+\tau_2}-$$

$$\frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_3)}{\tau_1^{r_1}(d_{12}\tau_1+\tau_2+\tau_3)^{r_2}\tau_3^{r_1}}\sum_1\sum_3\frac{\Gamma(h_1+h_3+r_2)}{h_1!\;h_3!}\left(\frac{d_{12}\zeta}{d_{12}\tau_1+\tau_2+\tau_3}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\left(\frac{\tau_3}{d_{12}\tau_1+\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\frac{h_2+h_3+r_2}{d_{21}\tau_1+\tau_3+\tau_2}+$$

$$\frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_3)}{\tau_1^{r_1}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)^{r_2}\tau_3^{r_3}}\sum_1\sum_3\frac{\Gamma(h_1+h_3+r_2)}{h_1!\;h_3!}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2+\tau_3}\right)^{h_1}\cdot$$

$$\left.\left(\frac{\tau_3}{\tau_1+\tau_3+\tau_2}\right)^{h_3}\frac{h_2+h_3+r_2}{\tau_1+\tau_3+\tau_2}\right\}.$$

由 $\lambda=\exp(-\mu \hat{m}')$, 可以得出 μ_i 的估计

$$\hat{\mu}_i'=-\ln(\hat{\lambda}_i)/\hat{m}',\quad i=1,2,\cdots,l$$

进而由最小二乘方法得出方程

$$\mu_i'=A+B\ln K_i,\quad i=1,2,\cdots,l$$

中未知参数 A, B 的估计

$$\begin{cases}\hat{A}=\dfrac{GH-IE}{lG-I^2},\\[2mm] \hat{B}=\dfrac{lE-IH}{lG-I^2}.\end{cases}$$

此处

$$I=\sum_{i=1}^{l}\ln K_i,\quad G=\sum_{i=1}^{l}\ln^2 K_i,$$

$$H=\sum_{i=1}^{l}\hat{\mu}_i',\quad E=\sum_{i=1}^{l}\hat{\mu}_i'\ln K_i,$$

由此直接得出 m, c, d 的估计如下

$$\hat{c}=-\frac{\hat{B}}{1+\hat{B}},\quad \hat{d}=\exp(-\hat{a}),\quad \hat{m}=\hat{m}'(1+\hat{B}).$$

其中

$$\hat{a}=\frac{\hat{A}}{1+\hat{B}}+\ln(1+\hat{B}).$$

4　实　例

对某厂的固体钽电解电容器进行定时截尾序进应力加速寿命试验. 把样品分成 4 组, 样品总数 118. 4 组序进应力水平为:

$$K_1=5.000\mathrm{V}/\mathrm{h},\ K_2=2.778\mathrm{V}/\mathrm{h},\ K_3=1.500\mathrm{V}/\mathrm{h},\ K_4=0.9375\mathrm{V}/\mathrm{h}.$$

4 组截尾时间分别为: 8.00h, 14.00h, 15.00h, 37.00h

4 组样品个数分别为: $n_1=28$, $n_2=30$, $n_3=30$, $n_4=30$

4 组失效个数分别为: $r_1=18$, $r_2=20$, $r_3=17$, $r_4=11$

测得试验数据如下:

$n_1 = 28$, $r_1 = 18$

6.1130 6.5667 6.9000 6.9167 7.3167 7.3667 7.3830 7.4167 7.4500 7.4830 7.5667
7.5830 7.7000 7.7330 7.8000 7.8167 7.9167 7.9330

$n_2 = 30$, $r_2 = 20$

8.2800 10.1170 10.6000 11.4500 11.5800 11.6000 11.6670 11.7000 11.7110 12.1000
12.5170 12.8000 12.8700 12.8800 13.5000 13.6500 13.7170 13.7500 13.8000 13.9800

$n_3 = 30$, $r_3 = 17$

18.8800 21.5800 21.6000 21.9800 22.9700 23.0500 23.1300 23.3700 23.5300 23.6800
23.8100 24.0670 24.2000 24.2170 24.4000 24.6170 24.9170

$n_4 = 30$, $r_4 = 11$

31.4300 32.5000 32.6170 33.6670 34.0500 34.2700 35.7800 36.2700 36.2800 36.7000

用 Weibull 概率纸检验以上数据, 证明以上数据取自 Weibull 分布. 用上述 BAYES 方法, 与将上述试验看作为定数截尾情况并用文[7]的方法求出 m, c, a 的估计, 结果如下:

	m	c	a
BAYES 方法	0.659154	17.405157	63.452665
typeII	0.621481	19.728003	71.671909

以上用 BAYES 方法讨论了定时截尾样本下 Weibull 分布序加试验的统计分析, 由实例的计算结果, 可以看出估计结果是接近的. 这是由于在本例中定时截尾试验的截止时间与试验结束前的最后一个失效时间差异较小所引起的, 这也表明了方法的可行性. 如果最后一个失效时间与截止试验时间相差大时, 用本文方法效果将会好些.

参考文献:

[1] 戴树森, 费鹤良, 等. 可靠性试验及其统计分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1983.

[2] Mann N R, Schafer R E, Singpurwalla. Methods for statistical analysis of reliability and life data[M]. John Wiley & Sons, 1974.

[3] Nelson W. Accelerated testing[M]. John Wiley & Sons, 1990.

[4] YIN Xiang-kang, Sheng Bao-zhong. Some aspects of accelerated life testing by progressive stress[M]. IEEE Trans On Reliability, 1987, R-36: 155- 250.

[5] LIN Zheng-ning, FEI He-liang. Statistical inference from progressive stress accelerated life tests[M]. Shanghai: Proccedings of China-Japan reliability symposium, 1987: 229- 236.

[6] FEI He-liang, ZHOU Guang-jun. Statistical analysis of progressive stress accelerated life testing on Weibull distribution case under type-Ⅰ censoring[A]. The Sixth China-Japan Symposiun on Statistics[C]. Xi' an, Chian, 1997, 14- 18: 44- 47.

[7] TANG Yin-cai, FEI He-liang. A new way to estimate the parameters in the progressive stress

accelerated life testing[J]. Applied Mathematics, A journal of Chinese Universities, 1996, 11(4): 445 - 458.

[8] Sirvanci M, Yang C. Estimation of the Weibull parameters under Type-Ⅰ censoring[J]. JASA, 1984, 79: 183- 186.

[9] MAO Shi-song, HAN Qing. Statistical analysis of life and accelerated life test on Weibull distribution case under Type-Ⅱ censoring[J]. Chinese Journal of Aplepiiod probability and Statistics, 1991, 7(1).

[10] Nelson W B. Accelerated life testing- step- testing models and data analysis[J]. IEEE Trans Reliability, 1980, 29: 103- 108.

Statistical Analysis of the Parameters with Constraints Progressive-Stress Accelerated Life Testing in the Weibull Distribution Case Under Type-Ⅰ Censoring

FEI He-liang, ZHOU Guang-jun

(College of Mathematical Science, Shanghai Teachers University, Shanghai, 200234, China)

Abstract: We study statistical analysis of progressive-stress accelarated life testing in the Weibull distribution case under Type-Ⅰ censoring. With BAYES estimate methodes, we give estimators of the parameters in an inverse power law model and estimators of various reliability characteristics under normal stresses. Finally, a numerical example is given.

Key words: Weibull distribution; progressive-stress accelarated life testing; Type-Ⅰ censoring; inverse power law model