高斯随机变量序列的收敛性和抽象 Wiener 空间

杨亚立 范 文

提 要 研究 Gauss 随机变量序列的 0-1 律与相关的抽象 Wiener 空间. 主要结果如下:设 $\{F_n(w)\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 Gauss 随机变量序列. 若对任何实数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i(w)$ 是高斯随机变量,则有

$$P\left\{w \mid \sum_{i=1}^{\infty}F_i(w)\ \text{收敛}\right\}=0\ \text{或}\ 1.$$

关键词 高斯随机变量; 样本空间; 抽象 Wiener 空间; 遍历拟不变测度; 0-1 律
中图法分类号 O177.99; O211.6

1 引 言

研究高斯随机变量序列的有关 0-1 律及相关的抽象 Wiener 空间. 0-1 律和抽象 Wiener 空间不仅是概率论中极其重要的问题,而且在泛函分析、测度论、随机微分方程等许多领域都是极其重要的. 以下分两个步骤进行讨论:

(1) 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上一列高斯随机变量的样本空间集中于一可分 Hilbert 空间 X;

(2) 利用可分 Hilbert 空间是 Radon 的及一般抽象 Wiener 空间的理论,给出了相应的抽象 Wiener 空间的构造,得到了关于高斯随机变量序列的 0-1 律.

根据文[1]中建立的更一般的遍历拟不变测度空间上的 0-1 律的研究,证明了高斯随机变量序列可以看作一般的抽象 Wiener 空间上拟可加泛函序列,这样就在一列高斯随机变量和一般的抽象 Wiener 空间上一列拟可加泛函之间建立了桥梁,得到了本文的主要结论.

定理 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$上一列 Gauss 随机变量 $\{F_n(w)\}$,如果对任何有限实数 a_i, $\sum_{i=1}^{n}a_iF_i(w)$ 是 Gaussian,则

(1) $P\left\{w \mid \sum_{i=1}^{\infty}F_i(w)\ \text{收敛}\right\}=0$ 或 1;

收稿日期: 1995-03-15
第一作者杨亚立,男,教授,上海师范大学数学系,上海,200234

(2) $P\left\{w \mid \sum_{i=1}^{\infty}|F_i(w)|^p < \infty\right\} = 0$ 或 $1, 0 < p < \infty$;

(3) $P\left\{w \mid \sup_n\left|\sum_{i=1}^{n}F_i(w)\right| < \infty\right\} = 0$ 或 1.

所得结果可以看作 Landau Shepp's 定理的推广,是目前最新的结果之一.文中仅对第一个结论作证明,(2),(3)的证明是类似的.

2 高斯随机变量序列的收敛性和抽象 Wiener 空间

定义 2.1 概率测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上给定一列随机变量$\{f_n(w)\}$,$n=1,2,\cdots$,其中随机变量序列$f_n(w)$的定义域是基本空间Ω,其值域是无限维实数序列空间R^∞,R^∞中的柱集是指如下形式的集合:

$$C = \{(x_i) \in R^\infty \mid (x_1,\cdots,x_n) \in D\},$$

其中n是任意正整数,D是n维欧几里得空间R^n中的任一 Borel 集.R^∞中所有柱集张成的最小σ-代数$\mathscr{B}^\infty \equiv \mathscr{B}(R^\infty)$,叫做$R^\infty$中的 Borel σ-代数,并记作$\mathscr{B}^\infty = \prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$,$\mathscr{B}_n$是$R$中的 Borel σ-代数.其中$R^\infty = \prod_{n=1}^{\infty}R_n$为数值序列空间,$R^\infty$中的元素的$x=(x_n, n=1,2,\cdots)$.

对随机变量序列$\{f_n(w)\}$建立样本概率测度空间$(R^\infty,\mathscr{B}^\infty,\mu)$,则这样一列随机变量$\{f_n(w)\}$在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的分布问题被代之考虑样本空间$(R^\infty,\mathscr{B}^\infty,\mu)$上定义的一列随机变量$\{x_n(X)\}$的分布问题,其中$x_n(x)$是$R^\infty$中的元到第$n$个坐标的投影映照.

引理 2.2 如果$\{F_n(w)\}$是一列 Gauss 随机变量,$F_n(w)$的期望值为$a_n = \int_\Omega F_n(w)P(\mathrm{d}w)$,则

(1) $f_n(w) = F_n(w) - a_n$是均值为 0 的 Gauss 随机变量;

(2) $f_n(w)$在样本空间$(R^\infty,\mathscr{B}^\infty,\mu)$上的高斯随机变量$x_n(x)$的均值为 0.

定义 2.3 $(R^\infty,\mathscr{B}^\infty)$上的分布$\mu$是 *Gauss* 的,如果对$R^\infty$上的任意线性连续泛函$f \in R_0^\infty$,$(R^\infty,\mathscr{B}^\infty,\mu)$上的随机变量$f(x)$在直线上有高斯分布.

由上述定义 2.3,容易得到

引理 2.4 $(R^\infty,\mathscr{B}^\infty,\mu)$是高斯测度空间的充要条件是对任何有限个实数$a_i$,$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i(x)$是高斯随机变量.

定理 2.5 设$\{f_n(w)\}$,$n=1,2,\cdots$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的高斯随机变量序列,则有

(1) 存在一列非负实数$\{a_n\}$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_\Omega f_n^2(w)P(\mathrm{d}w) < \infty,\ \text{a.e.};$$

(2) 当$a_n > 0$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{R^\infty}x_n^2(x)\mu(\mathrm{d}x) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n^2(x) < \infty,\text{a.e.};$$

(3) $\{f_n(w)\}$的样本空间集中在可分 *Hilbert* 空间X上,$X = \left\{(x_i) \mid \sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n^2 < \infty\right\}$.

证明　(1) 记 $L^2(\Omega)=\left\{f\,|\int_\Omega f^2(w)P(\mathrm{d}w)<\infty\right\}$，因为 $\{f_n(w)\}$ 是 Ω 上一列高斯随机变量序列，所以 $f_i(w)\in L^2(\Omega)$.

取 $a_n=\dfrac{1}{2^n(f_n,f_n)}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_\Omega f_n^2(w)P(\mathrm{d}w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty;$$

(2) $\because a_n>0\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{R^\infty}x_n^2(x)\mu(\mathrm{d}x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_\Omega f_n^2(w)P(\mathrm{d}w)<\infty$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_{R^\infty}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2(x)\mu(\mathrm{d}x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i\int_{R^\infty}x_i^2(x)\mu(\mathrm{d}x)<\infty;$$

由 Levy 引理知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n^2(x)<\infty$,a.e.

(3) 取 $X=\left\{(x_i)\,|\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n^2<\infty\right\}$，在 X 上定义内积 $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_ny_n$，成为一个可分的 Hilbert 空间，由(2)知 $\{f_n(w)\}$ 的样本空间集中在可分 Hilbert 空间 X 中，证毕.

SATO 在[4]中讨论了 Banach 空间上的高斯测度，通过引入空间对 (X,H)，给出了能成为抽象 Wiener 空间的结果．同样，我们可以得到如下结果：

定理 2.6　设随机变量序列 $\{f_n(w)\}$ 在样本空间 R^∞ 上的分布 μ 是 Gauss 的，且期望为 0，则

(1) μ 是可分 Hilbert 空间 X 上期望为 0 的高斯测度，且存在一个可分闭线性子空间 $\widetilde{X}$，使得 $\mu[\widetilde{X}]=1$，且当 $\xi\in\widetilde{X}^*$ 时，有 $\nu(\xi)=0\Leftrightarrow\xi=0$；

(2) 存在 $\widetilde{X}$ 的一个稠密子空间 H，使得 μ 是抽象 Wiener 测度，即 μ 是 H 上标准高斯柱测度 μ_H 在 $\widetilde{X}$ 中的 σ- 延拓，且 $(\widetilde{X},\mathscr{B},\mu)$ 关于 H 是遍历拟不变的.

证明　(1) 由定理 2.5 知，$\{f_n(w)\}$ 的样本概率测度 (R^∞,μ) 集中在可分 Hilbert 空间 $X=\left\{(x_i)\,|\sum_{i=1}^{\infty}a_nx_n^2<\infty\right\}$ 上，由于可分 Hilbert 空间是 Radon 空间，任一 Borel σ- 测度是正则的，所以，μ 可看作 X 上的正则高斯测度．选取 X^* 的最大子集 $\{\xi_\alpha;\alpha\in\Lambda\}$，使得

$$\xi_\alpha\in X^* \text{ 且 } |||\xi_\alpha|||=1,\alpha\in\Lambda(\,|||\cdot|||\text{ 为 } X^* \text{ 的范数})$$

$$\int_X\xi_\alpha(x)\xi_\beta(x)\mathrm{d}\mu(x)=0,\text{如果 }\alpha\neq\beta,\alpha,\beta\in\Lambda.$$

设 $\Lambda_0=\{\alpha\in\Lambda;\nu(\xi_\alpha)\neq0\}$（其中 $\nu(\xi)$ 表示 ξ 的方差），则可以证明 Λ_0 是 Λ 的至多可数子集，令 $X_\alpha=\{x\in X;\xi_\alpha(x)=0\}$，$\alpha\in\Lambda$，集 $\widetilde{X}=\bigcap_{\alpha\in\Lambda-\Lambda_0}X_\alpha$. 令 Γ 是 $\Lambda-\Lambda_0$ 的所有有限子集所成的族，定义 $X_J=\bigcap_{\alpha\in J}X_\alpha$，$J\in\Gamma$，则由于 (X,μ) 是正则 Borel 测度，有

$$\mu[\widetilde{X}]=\mu(\bigcap_{J\in\Gamma}X_J)=\inf_{J\in\Gamma}\mu(X_J)=1.$$

设 $\Theta=\overline{\mathrm{span}\{\xi_\alpha,\alpha\in\Lambda-\Lambda_0\}}$，则 $\widetilde{X}$ 的拓扑对偶 $\widetilde{X}^*\cong X^*/\Theta$，易见在 $\widetilde{X}^*$ 中，$\nu(\xi)=0\Leftrightarrow\xi=0$；

(2) 限制测度 μ 到 $\widetilde{X}$，对 $\forall\ \xi,\eta\in X^*$ 定义

$$(\xi,\eta)=\int_{\widetilde{X}}\xi(x)\eta(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

$|\xi|=\sqrt{(\xi,\xi)}=\sqrt{\nu(\xi)}$,由(1)知,$|\xi|=0\Leftrightarrow\xi=0,\xi\in\tilde{X}^*$. 令$\mathscr{H}^*$是$\tilde{X}^*$关于内积$(\xi,\eta)$完备化所成的Hilbert空间,$\mathscr{H}$是$\mathscr{H}^*$的拓扑对偶空间,由[4]知$\mathscr{H}$是$\tilde{X}$的稠Hilbert子空间,记$H=\mathscr{H}$则$\mu$是$H$上标准高斯柱测度$\mu_H$在$\tilde{X}$中的$\sigma$-延拓,$(\tilde{X},\mu)$关于$H$是遍历拟不变的.

证毕

对于抽象Wiener空间上的拟可加泛函,定义如下:

定义 2.7 设X是线性拓扑空间,$\mathscr{B}$是$\mathscr{H}$上的Borel σ-代数,$(X,\mathscr{B},\mu)$是正则概率测度空间,相应于H是遍历拟不变的(H是可测变换群). 设$f(g)$是$(X,\mathscr{B})$上的实可测函数,对$\forall h\in H$,存在实数$\tilde{f}(h)$,和子集$E_h\in\mathscr{B}$,$\mu(E_h)=0$,使

$$f(g+h)=f(g)+\tilde{f}(h),\qquad 对\ g\,\overline{\in}\,E_h$$

则称f是$(X,\mathscr{B},\mu)$上相应于H的拟可加泛函.

在文[1,2]中研究遍历拟不变测度的基础上,得到了许多0-1律. 作为应用,特别适用于抽象Wiener空间. 作为引理叙述如下:

引理 2.8 设$\Omega=(X,\mathscr{B},\mu)$为正则概率测度空间,相应于$\Omega$上的可测变换群H是遍历拟不变的,取H上适当的拓扑$\mathscr{I}$(见[3]),使$(H,\mathscr{I})$是满足第一可列公理、第二纲的线性拓扑空间. 如果$\{f_i(g)\}i=1,2,\cdots$是$\Omega$上相应于$H$的一列拟可加泛函,则有下列0-1律成立:

$$\mu\left\{g\,\Big|\,\sum_{i=1}^{\infty}f_i(g)\ 收敛\right\}=0\ 或\ 1.$$

Landau-Shepp's 定理是关于高斯随机变量0-1律的最著名定理之一[5]. 下述结果可以看作Landau-Shepp's定理的推广.

定理 2.9 概率测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上一列Gauss随机变量$\{F_n(w)\}$,且对任何有限实数t_i,$\sum_{i=1}^{n}t_iF_i(w)$是Gauss的,则有

$$P\left\{w\,\Big|\,\sum_{i=1}^{\infty}F_n(w)\ 收敛\right\}=0\ 或\ 1.$$

证明 设高斯随机变量$F_n(w)$相应的期望值为$a_n(n=1,2,\cdots)$.

设$f_n(w)=F_n(w)-a_n$,则$\{f_n(w)\}$为一列均值为0的Gauss随机变量,其样本集中于可分Hilbert空间X,由定理2.6,$\{f_n(w)\}$可以看作$(\tilde{X},\mathscr{B},\mu)$上的Gauss随机变量$\{x_n(x)\}$,是$\tilde{X}$上的线性泛函. 对于$\forall h\in H$,存在实数$\tilde{\chi}_n(h)=(h,x_n)$,$n\in N$和子集$E_h\in\mathscr{B}$,$\mu(E_h)=0$,使得

$$x_n(h+g)=x_n(g)+\tilde{\chi}_n(h),对\ g\,\overline{\in}\,E_h,$$

所以$\{x_n(x)+a_n\}$是$(\tilde{X},\mathscr{B},\mu)$上相应于$H$的拟可加泛函,由

$$x_n(h+g)+a_n=(x_n(g)+a_n)+\tilde{\chi}_n(h),对\ g\,\overline{\in}\,E_h$$

知$\{x_n(x)+a_n\}$是$(\tilde{X},\mathscr{B},\mu)$上相应于$H$的拟可加泛函序列,由引理2.8,推得

$$\mu\left\{x\,\Big|\,\sum_{i=1}^{\infty}(x_i(x)+a_i\ 收敛\right\}=0\ 或\ 1.$$

由$F_n(w)=f_n(w)+a_n$,及样本空间的性质,即得

$$P\left\{w\,\Big|\,\sum_{i=1}^{\infty}F_i(w)\ 收敛\right\}=0\ 或\ 1.$$

证毕

参 考 文 献

1 杨亚立．On the ergodic quasi-invariant measures. Scientia Sinica，1981，24：739～748

2 杨亚立．On the zero-one laws for the ergodic quasi-invariant measures. Chin Ann of math，1983，4B(2)：145～151

3 夏道行．无限维空间上的测度和积分理论．上海科技出版社，1965

4 Sato H. Gaussian measure on a Banach space and abstract Wiener measure. Nogoya Math J，1969，36：65～81

5 Landau H J，Shepp L A. On the superemum of Gaussian process. Sankhya Ser A，1971，32：369～378

The Convergence of Gaussian Stochastic Sequences and Abstract Wiener Spaces

Yang Yali　(Shanghai Teachers' University)

Fan Wen　(Shanghai Teachers' College)

Abstract The 0-1 Laws of sequences of Gaussian stochastic variables and related abstract Wiener spaces are studied. The main result is as follows:

Let $\{F_n(w)\}$ be a sequence of Gaussian stochastic variables on a probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Suppose that for any real numbers $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(w)$ is a Gaussian stochastic variable. Then we have

$$P\left\{w \mid \sum_{i=1}^{\infty} F_i(w) \text{ is convergent}\right\} = 0 \text{ or } 1.$$

Key words Gaussian stochastic variable; sample space; abstract Wiener space; ergodic quasi-invariant measure; zero-one law