第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0933-06 **文献标识码**: A

集值映射空间在紧开拓扑下的 $\aleph_0$ 性质

李祖泉
(杭州师范学院数学系, 浙江 杭州 310036)
(E-mail: lizuquan1963@sina.com)

摘 要: 本文讨论了点紧致的连续集值映射空间在赋予紧开拓扑下的某些拓扑性质,证明了:若 X,Y 为 $\aleph_0$ 空间, 则 X 到 Y 上的点紧致的连续集值映射族依紧开拓扑是 $\aleph_0$ 空间, 从而将 Michael[1] 的结论推广到更大的映射空间类上.

关键词: 集值映射; 紧开拓扑; 伪基; $\aleph_0$ 空间.
MSC(2000): 54C60
中图分类: O189.1

1 引 言

连续集值映射空间的拓扑性质中只有紧性已经有了比较完整的理论, 如各种形式的 Ascoli 定理, 而其它的拓扑性质还很少见到, 尤其是度量性及弱于度量性的一些拓扑性质. 在单值连续映射空间中有经典的 $\aleph_0$ 特征的刻画, Michael 证明了 [1]: 若 X,Y 为 $\aleph_0$ 空间, 那么 X 到 Y 上的单值连续映射族 $C(X,Y)$ 依紧开拓扑是 $\aleph_0$ 空间; Paul O'Meara 证明了 [2]: 若 X 为 $\aleph_0$ 空间, Y 为仿紧的 $\aleph$ 空间, 那么 X 到 Y 上的单值连续映射族 $C(X,Y)$ 依紧开拓扑是仿紧的 $\aleph$ 空间; Guthrie 证明了 [3]: 若 X 为 $\aleph_0$ 空间, Y 为 $cs-\sigma$ 空间, 那么 X 到 Y 上的单值连续映射族 $C(X,Y)$ 依紧开拓扑是 $cs-\sigma$ 空间. 本文将 Michael 的结果推广到更大的一类映射族 — 点紧致连续集值映射族 $C_k(X,Y)$ 上, 得到了相同的结论, 即证明了: 若 X,Y 为 $\aleph_0$ 空间, 则点紧致连续集值映射族 $C_k(X,Y)$ 依紧开拓扑为 $\aleph_0$ 空间.

2 空间 $C_k(X,Y)$ 在紧开拓扑下的基本性质

本文中, 拓扑空间 X,Y 均是正则 T_1 的, Y^{mX} 为拓扑空间 X 到 Y 上的所有集值映射族, $C_k(X,Y)$ 为 X 到 Y 上的所有点紧致的连续集值映射族. 文中未定义的术语和符号均以文献 [4] 为准.

设 $f\in Y^{mX}$, 对 $A\subset X$, 记 $f(A)=\bigcup_{x\in A}f(x)$; 对 $B\subset Y$, 记

$$f^+(B)=\{x\in X: f(x)\subset B\};$$
$$f^-(B)=\{x\in X: f(x)\cap B\neq\emptyset\}.$$

定义 1 设 $f\in Y^{mX}$, $x_0\in X$, 称 f 在点 x_0 上半连续是指: 对于 Y 的每个开子集 U, 只要 $f(x_0)\subset U$, 都存在 x_0 的开邻域 V, 使得当 $x\in V$ 时, 有 $f(x)\subset U$; f 在点 x_0 下半连续是

收稿日期: 2005-04-26; **接受日期**: 2005-11-26
基金项目: 杭州师范学院科研启动经费资助 (02010180).

指：对 Y 的每个开子集 U, 只要 $f(x_0)\cap U\neq\emptyset$, 都存在 x_0 的开邻域 V, 使得当 $x\in V$ 时，有 $f(x)\cap U\neq\emptyset$; f 在点 x_0 连续是指： f 在 x_0 既上半连续又下半连续. 如果 f 在 X 的每个点都 (上半、下半) 连续，则称 f 是 (上半、下半) 连续集值映射.

显然，f 是连续的充要条件是: 对于 Y 的每个开子集 U, $f^+(U)$ 和 $f^-(U)$ 都是 X 的开集.

对于 X 的子集 K, Y 的子集 U,V, 记

$$W^+[K,U]=\{f\in Y^{mX}:f(x)\subset U,x\in K\};$$
$$W^-[K,V]=\{f\in Y^{mX}:f(x)\cap V\neq\emptyset,x\in K\}.$$

定义 2[5] 以所有形如 $W^+[K,U],W^-[K,V]$ 的集为子基生成 Y^{mX} 的拓扑 $\mathcal{T}_k$ 称为紧开拓扑，其中 K 为 X 的紧子集， U,V 为 Y 的开子集.

本文中， $C_k(X,Y)$ 上赋予的拓扑均指紧开拓扑.

定理 1 $C_k(X,Y)$ 是正则 T_1 的.

证明 设 $f\in C_k(X,Y)$, K 为 X 的紧子集, U 为 Y 的开集. 若 $f\in W^+[K,U]$, 则 $f(K)\subset U$, 从而对于任意 $x\in K$, 存在 Y 的开集 U_x, 使得 $f(x)\subset U_x\subset\overline{U_x}\subset U$. 由于 f 是连续映射，从而存在 x 的开邻域 V_x, 使得 $V_x\subset f^+(U_x)$, 这样 $\{V_x:x\in K\}$ 覆盖 K, 从而存在有限子覆盖 $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. 由 $V_{x_i}\subset f^+(U_{x_i})$, 有 $K\subset\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}\subset f^+(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i})\subset f^+(\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}})\subset f^+(U)$, 而 $\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}$ 为闭集, 则 $Y-\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}$ 为开集, 而且 $f\in W^+[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]=C_k(X,Y)-W^-[K,Y-\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]\subset W^+[K,U]$. 因为 $C_k(X,Y)-W^-[K,Y-\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$ 为 $C_k(X,Y)$ 的闭集，从而 $W^+[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$ 为闭集. 又因为 $W^+[K,\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}]\subset W^+[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$, 所以 $W^+[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$ 为 f 的闭邻域.

若 $f\in W^-[K,U]$, 则对于任意 $x\in K$, 有 $f(x)\cap U\neq\emptyset$, 设 $y_x\in f(x)\cap U$, 则存在 y_x 的开邻域 U_x, 使得 $U_x\subset\overline{U_x}\subset U$. 由于 f 是连续映射，从而存在 x 的开邻域 V_x, 使得 $V_x\subset f^-(U_x)$, 这样 $\{V_x:x\in K\}$ 覆盖 K, 从而存在有限子覆盖 $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. 对于任意 $x\in K$, 存在 V_{x_i},U_{x_i}, 使得 $x\in V_{x_i}$, $V_{x_i}\subset f^-(U_{x_i})$, 从而 $K\subset\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}\subset f^-(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i})\subset f^-(\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}})\subset f^-(U)$, 而 $\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}$ 为闭集, 则 $Y-\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}$ 为开集, 而且 $f\in W^-[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]=C_k(X,Y)-W^+[K,Y-\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]\subset W^-[K,U]$. 因为 $C_k(X,Y)-W^+[K,Y-\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$ 为 $C_k(X,Y)$ 的闭集，从而 $W^-[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$ 为闭集. 又因为 $W^-[K,\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}]\subset W^-[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$, 所以 $W^-[K,\bigcup_{i=1}^n\overline{U_{x_i}}]$ 为 f 的闭邻域.

设 W 为 $C_k(X,Y)$ 中含 f 的开集, 则存在形如 $W^+[K,U]$ 和 $W^-[K,U]$ 的子基开集 $W_i(1\leq i\leq n)$, 使得 $\bigcap_{i=1}^n W_i\subset W$, 由前面的论证, 存在对应的闭邻域 B_i , 使得 $f\in B_i\subset W_i(1\leq i\leq n)$, 从而 $\bigcap_{i=1}^n B_i\subset\bigcap_{i=1}^n W_i$. 令 $B=\bigcap_{i=1}^n B_i$, 则 B 为 f 的闭邻域，而且 $f\in B\subset W$.

综合上述， $C_k(X,Y)$ 为正则的.

设 $f,g\in C_k(X,Y)$, 且 $f\neq g$, 不妨设存在 $x\in X$, $y\in Y$, 使得 $y\in f(x)-g(x)$. 因 $g(x)$ 是紧的，且 $y\notin g(x)$, 则存在 y 的开邻域 U_y, 使得 $U_y\cap g(x)=\emptyset$. 因此 $g\notin W^-[\{x\},U_y]$, 而 $f\in W^-[\{x\},U_y]$; 又存在 $g(x)$ 开邻域 $U_{g(x)}$ 使得 $y\notin U_{g(x)}$, 则 $g\in W^+[\{x\},U_{g(x)}]$, 而 $f\notin W^+[\{x\},U_{g(x)}]$. 故 $f,g\in C_k(X,Y)$ 分别存在互不包含的开邻域，因此 $C_k(X,Y)$ 是 T_1 的.

引理 1 设 K 为 X 的紧子集，定义集值映射 $\phi:X\times C_k(X,Y)\to Y$ 为 $\phi(x,f)=f(x)$, 则 $\phi\mid K\times C_k(X,Y)$ 是连续的.

证明 设 $(x,f)\in K\times C_k(X,Y)$, 对于 Y 的开集 U, 若 $\phi(x,f)\subset U$, 即 $f(x)\subset U$, 则因为 $f(x)$ 为紧集，存在包含 $f(x)$ 的开集 W, 使得 $f(x)\subset W\subset\overline{W}\subset U$. 因为 f 是连续映射，

所以存在 K 的开子集 V, 使得 $x \in V$, 且有 $f(V) \subset W$, 从而由 $V \subset f^+(W) \subset f^+(\overline{W})$, $f^+(\overline{W})$ 是闭集，有 $\overline{V} \subset \overline{f^+(W)} \subset \overline{f^+(\overline{W})} = f^+(\overline{W})$, 即 $f(\overline{V}) \subset \overline{W} \subset U$, 而 $\overline{V}$ 是 K 的紧子集，则 $V \times (W^+[\overline{V}, U])$ 为 $K \times C_k(X,Y)$ 中 (x,f) 的邻域，而且对于任意 $(x', f') \in V \times (W^+[\overline{V}, U])$, 有 $\phi(x', f') \subset U$. 故 ϕ 是上半连续.

若 $\phi(x,f) \cap U \neq \emptyset$, 即 $f(x) \cap U \neq \emptyset$, 设 $y \in f(x) \cap U$, 则存在包含 y 的开集 W ，使得 $y \subset W \subset \overline{W} \subset U$. 因为 f 是连续映射，所以存在 K 的开子集 V, 使得当 $x \in V$ 时, $f(x) \cap W \neq \emptyset$, 即 $V \subset f^-(W)$, 从而由 $V \subset f^-(W) \subset f^-(\overline{W})$, $f^-(\overline{W})$ 为闭集, 有 $\overline{V} \subset \overline{f^-(W)} \subset \overline{f^-(\overline{W})} = f^-(\overline{W}) \subset f^-(U)$, 故 $f(\overline{V}) \cap W \neq \emptyset$. 因 $\overline{V}$ 是 K 的紧子集，则 $V \times (W^-[\overline{V}, U])$ 为 $K \times C_k(X,Y)$ 中 (x,f) 的邻域，对于任意 $(x', f') \in V \times (W^-[\overline{V}, U])$, 有 $\phi(x', f') \cap U \neq \emptyset$. 故 ϕ 是下半连续. □

引理 2 设 $L \subset C_k(X,Y)$ 为紧集，定义集值映射 $L(x) = \bigcup\{f(x) : f \in L\}$. 若 X 为 k 空间，则 $L(x)$ 是连续的.

证明 设 K 为 X 的非空紧子集, 令 L_K 为 L 在 K 上的限制, 即 $L_K = L|_K$, 下面先证 L_K 是连续的.

设 U 为 Y 的开集， $x_0 \in K$, 使得 $L_K(x_0) \subset U$. 对于 $f \in L$, 因为 ϕ 在 (x_0, f) 处连续，由引理 1, 存在 x_0 在 K 中的开邻域 V_f, f 在 $C_k(X,Y)$ 中的开邻域 W_f, 使得对于任意的 $x' \in V_f$, $f' \in W_f$, 有 $\phi(x', f') \subset U$, 即 $f'(x') \subset U$. 因为 $L \subset \bigcup_{f \in L} W_f$, 从而在 $\{W_f : f \in L\}$ 中可取有限个元 $W_{f_1}, W_{f_2}, \ldots, W_{f_n}$ 覆盖 L ，相应地，有 $V_{f_1}, V_{f_2}, \ldots, V_{f_n}$. 令 $V = \bigcap_{i=1}^n V_{f_i}$, 则 V 为 x_0 的开邻域，从而对于任意 $x' \in V$, $f' \in L$, 存在 W_{f_i}, 使得 $f' \in W_{f_i}$, 而且有 $x' \in V_{f_i}$, 从而 $f'(x') \subset U$, 即 $L_K(x') = \bigcup\{f(x') : f \in L\} \subset U$, 故 $L_K(x)$ 上半连续. 其次，设 $L_K(x_0) \cap U \neq \emptyset$, 则存在 $f \in L$, 使 $f(x_0) \cap U \neq \emptyset$, 由于 f 是连续的 (也在 K 上是连续的), 从而存在 x_0 在 K 中开邻域 V, 对于任意 $x' \in V$, 有 $f(x') \cap U \neq \emptyset$, 即 $L_K(x') \cap U \neq \emptyset$, 故 $L_K(x)$ 下半连续.

其次证 L 是连续的. 对于 Y 中的任意闭集 B, X 中的任意紧集 K, 由 $L^+(B) \cap K = L_K^+(B)$ 及 $L^-(B) \cap K = L_K^-(B)$, 得到 $L^+(B) \cap K$ 和 $L^-(B) \cap K$ 在 K 中是闭集，由于 X 为 k 空间，则 L 是连续的. □

引理 3 设 $L \subset C_k(X,Y)$ 为紧集， K 为 X 的非空紧子集, 则 $L(K)$ 是 Y 的非空紧子集.

证明 对于 $L(K) = \bigcup\{L(x) : x \in K\}$ 的任意开覆盖 $\mathcal{P}$, 设 $x \in K$, $f \in L$, 因为 $f(x)$ 是紧集，从而存在 $\mathcal{P}$ 的有限个元构成的子族 $\mathcal{P}_{f(x)}$ 覆盖 $f(x)$, 即 $f(x) \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{P}_{f(x)}\}$. 由 f 的连续性， $V_{f(x)} = f^+(\bigcup\{U : U \in \mathcal{P}_{f(x)}\})$ 为含 x 的开集，故 $\{V_{f(x)} : x \in K\}$ 为 K 的开覆盖，所以存在有限子覆盖 $\{V_{f(x_i)} : 1 \leq i \leq k\}$, 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^k V_{f(x_i)} = \bigcup_{i=1}^k f^+(\bigcup\{U : U \in \mathcal{P}_{f(x_i)}\})$, 从而 $f(K) \subset \bigcup\{U : U \in \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_{f(x_i)}\} = U_f$, 这样 $\{W^+[K, U_f] : f \in L\}$ 为 L 的开覆盖，所以存在有限子覆盖 $\{W^+[K, U_{f_j}] : 1 \leq j \leq n\}$, 从而 $L \subset \bigcup\{W^+[K, U_{f_j}] : 1 \leq j \leq n\}$, 即 $L \subset W^+[K, \bigcup_{j=1}^n U_{f_j}]$, 因此 $L(K) \subset \bigcup_{j=1}^n U_{f_j}$, 而每个 U_{f_j} 为 $\mathcal{P}$ 的有限个元构成的子族的有限个并，从而 $\bigcup_{j=1}^n U_{f_j}$ 是 $\mathcal{P}$ 的有限个子族的有限个元的并，故 $L(K)$ 是 Y 的非空紧子集. □

3 空间 $C_k(X,Y)$ 在紧开拓扑下的 $\aleph_0$ 特征

定义 3[1] 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 是 X 的伪基是指： K 为 X 的非空紧子集， U 为 X 的开集，若 $K \subset U$, 则存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得 $K \subset P \subset U$.

定义 4[1] 若空间 X 具有可数伪基，则 X 称为 $\aleph_0$ 空间.

定理 2 若 X,Y 为 $\aleph_0$ 空间, 且 X 为 k 空间, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 分别为 X,Y 的可数伪基. 若对于 $C_k(X,Y)$ 的任意紧集 L, X 的非空紧集 K, Y 的开集 U, 使得 $L\subset W^+[K,U]$, 则存在 $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, 使得 $L\subset W^+[A,B]\subset W^+[K,U]$.

证明 不失一般性, 设 $\mathcal{A}$ 在有限交下是封闭的. $L\subset C_k(X,Y)$ 为紧集, 且 $L\subset W^+[K,U]$, 由引理 2, $L(x)$ 是连续的, $L(K)\subset U$, 则 $V=\{x\in X:L(x)\subset U\}\supset K$ 为 X 的非空开集. 令

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_1=\{A_i\}=\{A\in\mathcal{A}:K\subset A\subset V\};\\&A'_n=\bigcap_{i=1}^n\{A_i:A_i\in\mathcal{A}_1\}.\\&\mathcal{B}_1=\{B_i\}=\{B\in\mathcal{B}:B\subset U\}.\end{aligned}$$

故只须找到某个 n, 使 $L(A'_n)\subset B_n$, 从而 $L\subset W^+[A'_n,B_n]\subset W^+[K,U]$. 假设对每个 $n\in N$, 存在 $x_n\in A'_n$, 使 $L(x_n)\not\subset B_n$, 令 $A=K\cup\{x_1,x_2,\ldots\}$, 则 A 为紧的. 这是因为对于 A 的任意开覆盖 $\mathcal{P}$ (也是 K 的开覆盖), 存在限个元 $P_1,P_2,\ldots,P_l\in\mathcal{P}$, 使得其并 $\bigcup_{i=1}^l P_i$ 覆盖 K. 因 X 为 $\aleph_0$ 空间, 从而存在一个 A'_m, 使得 $K\subset A'_m\subset\bigcup_{i=1}^l P_i$. 因为 $x_m\in A'_m$, 而 $A'_{m+1}\subset A'_m$, 所以当 $i\ge m$ 时, $x_i\in A'_m$, 因此 $\{x_i:i\ge m\}\subset\bigcup_{i=1}^l P_i$. 这样对 $x_1,x_2,\ldots,x_{m-1}$, 相应地存在 $P'_1,P'_2,\ldots,P'_{m-1}\in\mathcal{P}$, 使得 $x_i\in P'_i,i=1,2,\ldots,m-1$, 所以 $\{P_1,P_2,\ldots,P_l,P'_1,P'_2,\ldots,P'_{m-1}\}$ 覆盖 A. 从而由引理 3, $L(A)$ 也是紧的. 若 $x\in K$, 则由 $L(K)\subset U$, 有 $L(x)\subset U$, 所以 $x\in V$; 若 $x=x_i$, 则 $x_i\in A'_i$, 而 $A'_i\subset V$, 从而 $L(x_i)\subset U$, 所以 $x\in V$, 故 $A\subset V$, 则 $L(A)\subset U$, 从而存在 $B_n\subset\mathcal{B}_1$, 使 $L(A)\subset B_n$, 特别地 $L(x_n)\subset B_n$, 矛盾. □

定理 3 X,Y 为 $\aleph_0$ 空间, 且 X 为 k 空间, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 分别为 X,Y 的可数伪基. 若对于 $C_k(X,Y)$ 的任意紧集 L, X 的非空紧集 K, Y 的开集 U, 使得 $L\subset W^-[K,U]$, 则存在 $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, 使得 $L\subset W^-[A,B]\subset W^-[K,U]$.

证明 设 $\mathcal{A}$ 在有限交下是封闭的. $L\subset C_k(X,Y)$ 为紧集, 且 $L\subset W^-[K,U]$, 由引理 2, $L(x)$ 是连续的, 则 $V=\{x\in X:L(x)\cap U\ne\emptyset\}\supset K$ 为 X 的非空开集. 令

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_1=\{A_i\}=\{A\in\mathcal{A}:K\subset A\subset V\};\\&A'_n=\bigcap_{i=1}^n\{A_i:A_i\in\mathcal{A}_1\}.\\&\mathcal{B}_1=\{B_i\}=\{B\in\mathcal{B}:B\subset U\}.\end{aligned}$$

故只须找到某个 n, 使得对任意 $x\in A'_n,L(x)\cap B_n\ne\emptyset$, 从而 $L\subset W^-[A'_n,B_n]\subset W^-[K,U]$. 假设对每个 n, 存在 $x_n\in A'_n$, 使 $L(x_n)\cap B_n=\emptyset$, 令 $A=K\cup\{x_1,x_2,\ldots\}$, 则由定理 2 的证明可知 A 为紧的. 若 $x\in K$, 则由 $L\subset W^-[K,U]$, 有 $L(x)\cap U\ne\emptyset$; 若 $x=x_i$, 则 $x_i\in A'_i$, 而 $A'_i\subset V$, 由 V 的构造可知, $L(x_i)\cap U\ne\emptyset$. 这样对于每个 $x\in A$, 有 $L(x)\cap U\ne\emptyset$. 对 $x\in A$, 设 $y_x\in L(x)\cap U$, 则存在 y_x 的开邻域 $U_{y_x}\subset\overline{U_{y_x}}\subset U$, 则 $L^-(U_{y_x})$ 为 x 的开邻域, 从而 $\{L^-(U_{y_x}):x\in A,y_x\in L(x)\}$ 覆盖 A, 因此存在有限个 $U_1,U_2,\ldots,U_p$, 使得 $A\subset\bigcup_{k=1}^p L^-(U_k)=L^-(\bigcup_{k=1}^p U_k)$. 因为由引理 3 知, $L(A)$ 为紧的, 故 $L(A)\cap[\bigcup_{k=1}^p\overline{U_k}]$ 是 $L(A)$ 的闭子集, 从而是紧的, 取 $B_n\subset\mathcal{B}_1$, 使 $L(A)\cap[\bigcup_{k=1}^p\overline{U_k}]\subset B_n\subset U$, 由于对每个 $x\in A$, 存在 $U_k(1\le k\le p)$, 使得 $x\in L^-(U_k)$, 从而 $L(x)\cap U_k\ne\emptyset$, 故 $\emptyset\ne L(x)\cap U_k\subset L(x)\cap(\bigcup_{k=1}^p U_k)\subset L(x)\cap(\bigcup_{k=1}^p\overline{U_k})\subset L(A)\cap(\bigcup_{k=1}^p\overline{U_k})\subset B_n$, 所以对每个 $x\in A$, 有 $\emptyset\ne L(x)\cap U_k\subset L(x)\cap B_n$, 特别地, $L(x_n)\cap B_n\ne\emptyset$. 矛盾.

引理 4 若 $f: S\to X$ 是紧覆盖映射，则 $C_k(X,Y)$ 同胚于 $C_k(S,Y)$ 的一个子空间.

证明 定义 $\Phi_f: C_k(X,Y)\to C_k(S,Y)$ 为 $\Phi_f(g)=g\circ f$, 下面证明： Φ_f 是 $C_k(X,Y)$ 到 $C_k(S,Y)$ 内的一一连续开映射.

(1) Φ_f 是一一映射.

若 $\Phi_f(g_1)=\Phi_f(g_2)$, 即 $g_1\circ f=g_2\circ f$, 则对于任意 $s\in S$, 均有 $g_1[f(s)]=g_2[f(s)]$, 由于 $f:S\to X$ 是紧覆盖映射，所以对于任意 $x\in X$, 存在 $s\in S$, 使得 $f(s)=x$, 因此 $g_1(x)=g_2(x)$, 故 $g_1=g_2$, 亦即 Φ_f 是一一映射的.

(2) Φ_f 是连续的.

对于任意 $g\in C_k(X,Y)$, 若 $\Phi_f(g)\in W^+[K,U]$, 其中 K 为 S 的紧子集，U 为 Y 的开子集，则 $g(f(K))=\Phi_f(g)[K]\subset U$, 从而 $g\in W^+[f(K),U]$; 反之若 $g\in W^+[f(K),U]$, 则由 $g(f(K))\subset U$, 有 $\Phi_f(g)[K]=g(f(K))\subset U$, 即 $\Phi_f(g)\in W^+[K,U]$. 由 (1), 这意味 $\Phi_f^{-1}(W^+[K,U])=W^+[f(K),U]$. 因为 f 是连续映射，所以 $f(K)$ 为 X 的紧子集，因此 $W^+[f(K),U]$ 为 $C_k(X,Y)$ 的含 g 的开集；类似地，若 $\Phi_f(g)\in W^-[K,U]$, 则对任意 $s\in K$, 有 $g(f(s))\cap U\neq\emptyset$, 即对任意 $s\in f(K)$, 有 $g(x)\cap U\neq\emptyset$, 则 $g\in W^-[f(K),U]$; 反之若 $g\in W^-[f(K),U]$, 则对任意 $s\in K$, 有 $g(f(s))\cap U=\Phi_f(g)(s)\cap U\neq\emptyset$, 即 $\Phi_f(g)\in W^-[K,U]$. 这意味着 $\Phi_f^{-1}(W^-[K,U])=W^-[f(K),U]$, 从而 $W^-[f(K),U]$ 也为 $C_k(X,Y)$ 的含 g 的开集, 故 Φ_f 是 $C_k(X,Y)$ 到 $C_k(S,Y)$ 内的连续映射.

(3) Φ_f 是 $C_k(X,Y)$ 到 $C_k(S,Y)$ 内的开映射.

首先设 $W^+[K',U]$ 为 $C_k(X,Y)$ 的子基中的开集，其中 K' 为 X 的紧子集， U 为 Y 的开子集. 由于 $f:S\to X$ 是紧覆盖映射，所以存在 S 的紧子集 K, 使得 $f(K)=K'$, 所以由 (1) 有 $\Phi_f(W^+[K',U])=W^+[f(K),U]$; 类似地，有 $\Phi_f(W^-[K',U])=W^-[f(K),U]$. 其次设 W 为 $C_k(X,Y)$ 的基中的开集，则存在子基中的元 $W_1,W_2,\ldots,W_n$, 使得 $W=\bigcap_{i=1}^n W_i$, 由 (1), Φ_f 是一一映射，则 $\Phi_f(W)=\Phi_f(\bigcap_{i=1}^n W_i)=\bigcap_{i=1}^n\Phi_f(W_i)$, 而每个 $\Phi_f(W_i)$ 是 $C_k(X,Y)$ 的子基中的开集，从而 $\Phi_f(W)$ 为开集. 因此 Φ_f 是 $C_k(X,Y)$ 到 $C_k(S,Y)$ 内的开映射.

综合上述， $C_k(X,Y)$ 同胚于 $C_k(S,Y)$ 的一个子空间. □

定理 4 若 X 为可分的度量空间， Y 为 $\aleph_0$ 空间，则 $C_k(X,Y)$ 为 $\aleph_0$ 空间.

证明 因为 X 为可分的度量空间，所以 X 为 $\aleph_0$ 空间和 k 空间. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 分别为 X,Y 的可数伪基，并且在有限交和有限并下是封闭的. 令

$$\mathcal{C}^+=\{W^+[A,B]:A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\};$$
$$\mathcal{C}^-=\{W^-[A,B]:A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\};$$
$$\mathcal{C}=\mathcal{C}^+\cup\mathcal{C}^-;$$

$\mathcal{P}_1$为 $\mathcal{C}$ 的元的所有有限交的族;

$\mathcal{P}$为 $\mathcal{P}_1$ 的元的所有有限并的族.

再令 $\mathcal{F}$ 为 $C_k(X,Y)$ 上的形如 $W^+[K,U]$, $W^-[K,V]$ 的所有有限交的族，其中 K 为 X 的紧集， U,V 为 Y 的开集，则 $\mathcal{F}$ 为 $C_k(X,Y)$ 的基. 设 W 为含 $L\subset C_k(X,Y)$ 的开集，对于每个 $f\in L$, 由定理 1, 存在 $E_f,F_f\in\mathcal{F}$, 使得 $f\in E_f\subset\overline{E_f}\subset F_f\subset W$. 因 L 是紧的，则存在有限个

元 $E_{f_1}, E_{f_2}, \ldots, E_{f_n}$, 相对应地，有 $F_{f_1}, F_{f_2}, \ldots, F_{f_n}$, 使得

$$L \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_{f_n} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{E_{f_n}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_{f_n} \subset W.$$

令 $L_{f_i} = L \cap \overline{E_{f_i}}$, 则每个 L_{f_i} 是紧集，并且有

$$L = L_{f_1} \cup L_{f_2} \cup \cdots \cup L_{f_n}, L_{f_i} \subset F_{f_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

从而由定理 2 和定理 3, 存在 $\mathcal{P}_1$ 的元 $H_1, H_2, \ldots, H_n$, 使得

$$L_{f_i} \subset H_i \subset F_{f_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

若令 $H = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$, 则 $H \in \mathcal{P}$, 且 $L \subset H \subset W$. 如此， $C_k(X, Y)$ 为 $\aleph_0$ 空间. □

定理 5 若 X, Y 为 $\aleph_0$ 空间，则 $C_k(X, Y)$ 为 $\aleph_0$ 空间.

证明 由于 X 为 $\aleph_0$ 空间，则存在一个可分的度量空间 S 和紧覆盖映射 $f: S \to X$, 由引理 4, $C_k(X, Y)$ 同胚于 $C_k(S, Y)$ 的一个子空间，由定理 4, $C_k(S, Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间，而 $\aleph_0$ 空间对子空间具有遗传性，故 $C_k(S, Y)$ 的子空间也为 $\aleph_0$ 空间，从而 $C_k(X, Y)$ 为 $\aleph_0$ 空间. □

推论 1[1] 若 X, Y 为 $\aleph_0$ 空间，那么 X 到 Y 上的单值连续映射族 $C(X, Y)$ 在紧开拓扑下是 $\aleph_0$ 空间.

证明 显然 X 到 Y 上的单值连续映射族 $C(X, Y)$ 是 X 到 Y 上的所有点紧致的连续集值映射族 $C_k(X, Y)$ 的子集，由定理 5, $C_k(X, Y)$ 为 $\aleph_0$ 空间，从而 $C(X, Y)$ 作为 $C_k(X, Y)$ 的子空间也为 $\aleph_0$ 空间. □

参考文献:

[1] MICHAEL E. $\aleph_0$-*space* [J]. J. Math. Mech., 1966, **15**: 983–1002.
[2] O'MEARA P. *On paracompactness in function spaces with the compact-open topology* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **29**: 183–189.
[3] GUTHRIE J A. *A Characterization of* $\aleph_0$-*spaces* [J]. General Topology and Appl., 1971, **1**(2): 105–110.
[4] ENGELKING R. *General Topology* [M]. Warszwa: Polish Scientific Publishers, 1977.
[5] MANCUSO V J. *An Ascoli theorem for multi-valued functions* [J]. J. Austral. Math. Soc., 1971, **12**: 466–472.

$\aleph_0$-Property of Multifunction Spaces under Compact-Open Topology

LI Zu-quan
(Department of Mathematics, Hangzhou Teachers College, Zhejiang 310036, China)

Abstract: In this paper, we discuss some properties of the point-compact continuous multifunction spaces with compact-open topology and show that if X, Y are $\aleph_0$-space, then the point-compact continuous multifunction space with compact-open topology is an $\aleph_0$-space, which is a generalization of a corresponding result concerning continuous single-valued function spaces proved by E.Michael[1].

Key words: multifunction; compact-open topology; pseudo-base; $\aleph_0$-space.