文章编号: 1000-341X(2006)01-0149-07 **文献标识码**: **A**

偶图 $K_{n,r}-A$ $(|A|\le 3)$ 的圈长分布唯一性

王 敏, 施永兵
(上海师范大学数理信息学院, 上海 200234)
(E-mail: ybshishnu@sohu.com)

摘 要: 阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, 其中 c_i 是图 G 中长为 i 的圈数. 设 $A\subseteq E(K_{n,r})$. 本文得到如下结果: 若 $|A|=2$, 且 $n\le r\le\min\{n+6,2n-5\}$, 则 $G=K_{n,r}-A$ 是由它的圈长分布确定的; 若 $|A|=3$, 且 $n\le r\le\min\{n+6,2n-7\}$, 则 $G=K_{n,r}-A$ 也是由它的圈长分布确定的.

关键词: 圈; 圈长分布; 偶图; 圈长分布确定的偶图.
MSC(2000): 05C38
中图分类: O175.5

0 引 言

阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, 其中 c_i 是图 G 中长为 i 的圈数. 图论中许多有趣问题与讨论圈长分布有关. 例如, 1973 年 R.C.Entringer 提出确定具有圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 使 $c_1=c_2=0, c_i=1(i=3,4,\cdots,n)$ 的图 (见 [1], P.247, 问题 10).1975 年, P.Erdös 提出求具有圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 使 $c_i\le 1(i=1,2,\cdots,n)$ 的图的最大可能的边数 (见 [1],P.247, 问题 11). 这两个问题都是很有趣也很困难的. 文 [2,3,4,5] 对上述两个问题进行了讨论. 一般来说, 满足圈长分布 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 的图 G 不唯一, 因此一个自然的问题是什么样的图是由它的圈长分布确定的 [6]. 文 [7] 已证明了 $G=K_{n,r}-A(A\subseteq E(K_{n,r}),|A|\le 1, n\le r\le\min\{n+6,2n-3\}$ 是由它的圈长分布确定的. 本文在文 [7] 的基础上进一步研究 $K_{n,r}$ 中删除两条边和三条边的情形. 本文证明了 $G=K_{n,r}-A(|A|=2, n\le r\le\min\{n+6,2n-5\})$ 和 $G=K_{n,r}-A(|A|=3, n\le r\le\min\{n+6,2n-7\})$ 是由它们的圈长分布确定的. 本文只讨论简单偶图且约定 $A\subseteq E(K_{n,r})$.

1 若干引理

设 G 是简单偶图且 $V(G)=X\bigcup Y$ 使 G 的每条边的一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中. 本文约定 $|X|=n, |Y|=r$ 且 $n\le r$. 设 $S\subseteq A$, 用 $\mu_i(S)$ 表示 $K_{n,r}$ 中包含 S 中所有边的长为 i 的圈的数目. $\mu_i(\emptyset)$ 表示 $K_{n,r}$ 的长为 i 的圈的数目.

设 $X_j=\{G|G=K_{n,r}-A,|A|=j\}$. 用 $c_4(G)$ 表示图 G 的 4 圈数.

令 $m_j=\min_{G\in X_j}c_4(G)$ 和 $M_j=\max_{G\in X_j}c_4(G)$.

下述引理 1 改进了文 [9] 中定理 1.

收稿日期: 2003-11-24
基金项目: 上海市高校科技发展基金 (04DB24), 上海师范大学科技发展基金 (DKL301)

引理 1 设 $n > j \geq 2$, 则

$$m_j = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2},$$

$$M_j = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}(r-1).$$

证明 任取 $G \in X_j$, 则 $G = K_{n,r} - A, |A| = j$. 设 $S \subseteq A$, 显然当 $|S| = 1$ 时, $\mu_4(S) = \binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}$; 当 $|S| = 2$ 时, $\mu_4(S) = \begin{cases} 1, & 当\ K_{n,r}[S] = 2K_2, \\ n-1\ 或\ r-1, & 当\ K_{n,r}[S] = K_{1,2}. \end{cases}$; 当 $|S| = 3$ 时, $\mu_4(S) \leq 1$ 且等式成立当且仅当 $K_{n,r}[S]$ 为长为 3 的路; 当 $|S| = 4$ 时, $\mu_4(S) \leq 1$ 且等式成立当且仅当 $K_{n,r}[S]$ 为 4 圈; $|S| \geq 5$ 时, $\mu_4(S) = 0$, 令 $a_{4k} = \sum_{S \subseteq A, |S|=k} \mu_4(S)$, 则 $a_{40} = \binom{n}{2}\binom{r}{2}$, $a_{41} = j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}, \binom{j}{2} \leq a_{42} \leq \binom{j}{2}(r-1)$, $0 \leq a_{43} \leq \binom{j}{3}, 0 \leq a_{44} \leq \binom{j}{4}, a_{45} = a_{46} = \cdots = a_{4j} = 0$.

若 $a_{44} \neq 0$, 则 $K_{n,r}[A]$ 中存在 4 圈. 易知 $K_{n,r}[A]$ 中每个 4 圈恰好包含 4 条不同的长为 3 的路. 设 $K_{n,r}[A]$ 中有 l 个不同的 4 圈, 则 $K_{n,r}[A]$ 中至少有 $4l$ 条不同的长为 3 的路, 从而 $a_{43} - a_{44} \geq 4l - l = 3l > 0$.

若 $a_{44} = 0$, 则 $a_{43} - a_{44} \geq 0$.

总之 $a_{43} - a_{44} \geq 0$ 恒成立.

根据容斥原理 $c_4(G) = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k a_{4k}$, 即

$$\begin{aligned} c_4(G) =& \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + a_{42} - a_{43} + a_{44} \\ \leq& \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + a_{42} \\ \leq& \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}(r-1). \end{aligned}$$

由 G 的任意性知, $M_j \leq \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}(r-1)$. 又由于存在 $G^\star \in X_j$, 使 $G^\star = K_{n,r} - A^\star, K_{n,r}[A^\star] \cong K_{1,j}$ 且 $K_{1,j}$ 中 j 条边的端点在 X 中.

显然 $c_4(G^\star) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}(r-1) \leq M_j$. 因此

$$M_j = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}(r-1).$$

又 $c_4(G) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + a_{42} - a_{43} + a_{44} \geq \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + a_{42} - a_{43}$.

若 $a_{43} = 0$, 则 $c_4(G) \geq \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + a_{42} \geq \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}$.

若 $a_{43} \neq 0$. 设 $K_{n,r}[A]$ 中有 l 条不同的 2 路. 对固定的一条 2 路最多有 $j-2$ 条 3 路包含这条 2 路, 故 $K_{n,r}[A]$ 中 3 路数 $t \leq (j-2)l$. 考虑到这些 3 路中某些被重复计算, 因为每条 3 路被 2 条不同的 2 路共用, 因此 $K_{n,r}[A]$ 中不同的 3 路数 $t_1 \leq \frac{(j-2)l}{2}$, 从而 $l \geq \frac{2}{j-2}t_1$. 因此 $a_{42} - a_{43} \geq [\binom{j}{2} - l + l(n-1)] - t_1 = \binom{j}{2} + l(n-2) - t_1 \geq \binom{j}{2} + (n-2)\frac{2}{j-2}t_1 - t_1 > \binom{j}{2} + \frac{2(n-2)}{n-2}t_1 - t_1 > \binom{j}{2}$.

故 $c_4(G) > \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}$.

总之 $c_4(G) \geq \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}$.

由 G 的任意性知， $m_j \ge \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}$.

又由于存在 $G^\star \in X_j$ 使 $G^\star = K_{n,r}-A^\star, K_{n,r}[A^\star] \cong jK_2$, 且 $c_4(G^\star) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2} \ge m_j$. 因此 $m_j = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - j\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + \binom{j}{2}$. □

由引理 1 直接推得下述

引理 2[9]　设 $j \ge 2, n \ge \frac{1}{2}j(j+1)+2$, 则 $M_{j+1} < m_j$.

为了下节定理的证明，我们需要下述

引理 3[7]　设 $G = K_{n,r} - A, |\ A\ | = j, r \ge n \ge j+2$, 则 G 的圈长分布 $(c_1, c_2, \cdots, c_{n+r})$ 中 $c_{2n} \ne 0$.

2　主要结果

定理 1　设 $n \le r \le \min\{n+6, 2n-5\}$, 则 $G = K_{n,r} - A(|\ A\ | = 2)$ 是由它的圈长分布确定的.

证明　由定理的条件知 $n \ge r-n+5 \ge 5$. 对于 $n=r$ 的情形在文 [8] 中已证，现只需证 $n < r \le \min\{n+6, 2n-5\}$ 的情形. 容易知道 $K_{n,r}[A]$ 恰有图 1 所示的三种图形.

图 1　$K_{n,r}[A]$ 的三种图形

将这三种图形分别记为 H_1, H_2, H_3, 且如图 1 所示给每个图的顶点标号. 其中 $x_i \in X$ 和 $y_i \in Y (i=1,2)$. 此时不难算出 $K_{n,r}$ 的 4 圈数为 $\binom{n}{2}\binom{r}{2}$; $K_{n,r}$ 中含 H_i 中一条边的 4 圈数为 $\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}$; $K_{n,r}$ 中含 H_i 中二条边的 4 圈数记为 $\mu(H_i)$, 则 $\mu(H_1)=1$, $\mu(H_2)=n-1$, $\mu(H_3)=r-1$. 用 $c_4(G_i)$ 表示 $G_i = K_{n,r} - E(H_i)$ 的 4 圈数. 根据容斥原理得到

$$c_4(G_1) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + 1,$$

$$c_4(G_2) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + n - 1,$$

$$c_4(G_3) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + r - 1.$$

显然 $c_4(G_1) < c_4(G_2) < c_4(G_3)$. 这表明对 $G = K_{n,r} - A(|\ A\ | = 2)$, 不同的 G 具有不同的圈长分布.

以下证明对任意 $G' \ne G = K_{n,r} - A(|\ A\ | = 2), G'$ 与 G 具有不同的圈长分布. 易知 G' 可能有下列三种情况.

情况 1　$G' \in \{K_{n,r} - A \mid 0 \le |\ A\ | \le 1$ 或 $|\ A\ | \ge 3\}$. 由文 [7] 已证 $G' = K_{n,r}, G' = K_{n,r} - A(|\ A\ | = 1)$ 是由它们的圈长分布唯一确定的. 又当 $G' = K_{n,r} - A(|\ A\ | \ge 3)$ 时，由引理

2 知 $\max c_4(G') < \min c_4(G)$. 因此对 $G' \in \{G \mid G = K_{n,r} - A, \mid A \mid \neq 2\}$,$G'$ 与 G 具有不同的圈长分布.

情况 2 $G' \in \{K_{n+k,r-k} - A| \mid A \mid = j, 0 \le j \le n+k-2, 1 \le k \le [\frac{r-n}{2}]\}$. 此时 $n+k \ge j+2$, 由引理 3 知, $C_{2n+2k}(G') \neq 0$, 而 $C_{2n+2k}(G) = 0$. 因此 G' 与 G 具有不同的圈长分布.

情况 3 $G' \in \{K_{n+k,r-k} - A| \mid A \mid = j \ge n+k-1, 1 \le k \le [\frac{r-n}{2}]\}$. 令 $G'' \in \{K_{n+k,r-k} - A \mid\mid A \mid = j = n+k-1, 1 \le k \le [\frac{r-n}{2}]\}$, 则 $c_4(G') \le \max c_4(G'')$.

令 $f(k) = \max c_4(G'')$, 则由引理 1 知

$$f(k) = \binom{n+k}{2}\binom{r-k}{2} - (n+k-1)\binom{n+k-1}{1}\binom{r-k-1}{1} + \binom{n+k-1}{1}(r-k-1).$$

以下证明 $f(k) < c_4(G_1) < c_4(G_2) < c_4(G_3)$.

只需证 $f(k) < c_4(G_1) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + 1$.

令 $H_k(r) = f(k) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} + 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} - 1$.

由于 $n < r \le \min\{n+6, 2n-5\}$, 及 $1 \le k \le [\frac{r-n}{2}]$, 推出 $2 \le 2k \le r-n \le 6$ 及 $r \le 2n-5$, 进一步有 $1 \le k \le 3, n \ge r-n+5$.

于是当 $k=1$ 时, $H_1(r) = f(1) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} + 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} - 1 = \frac{1}{4}[(-4r+6)n^2 + (2r^2+2r-2)n + (-8r+4)]$. 此时 $2 \le r-n \le 6$, 即 $n+2 \le r \le n+6$. 将 $r = n+2, n+3, \cdots, n+6$ 分别代入 $H_1(r)$, 并结合 n 的条件即 $n \ge r-n+5$, 我们有:

$$H_1(n+2) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-4n-1)-12] < 0 \quad (n \ge 7),$$

$$H_1(n+3) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-4n-7)-20] < 0 \quad (n \ge 8),$$

$$H_1(n+4) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-4n-15)-28] < 0 \quad (n \ge 9),$$

$$H_1(n+5) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-4n-25)-36] < 0 \quad (n \ge 10),$$

$$H_1(n+6) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-4n-37)-44] < 0 \quad (n \ge 11).$$

当 $k=2$ 时, $H_2(r) = f(2) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} + 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} - 1 = \frac{1}{4}[(-6r+12)n^2 + (4r^2-14r+28)n + (2r^2-22r+28)]$. 此时 $4 \le r-n \le 6$, 即 $n+4 \le r \le n+6$. 将 $r = n+4, n+5, n+6$ 分别代入 $H_2(r)$, 并结合 n 的条件, 我们有:

$$H_2(n+4) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-4n-15)-28] < 0,$$

$$H_2(n+5) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-5n-28)-32] < 0,$$

$$H_2(n+6) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-45)-32] < 0.$$

当 $k=3$ 时, $H_3(r) = f(3) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} + 2\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} - 1 = \frac{1}{4}[(-8r+20)n^2 + (6r^2-38r+92)n + (6r^2-62r+124)]$. 此时 $r-n=6$, 将 $r=n+6$ 代入 $H_3(r)$, 并结合 n 的条件即 $n \ge 11$, 我们有:

$$H_3(n+6) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-45)-32] < 0.$$

因此 $f(k)<c_4(G_1)<c_4(G_2)<c_4(G_3)$. 于是 $c_4(G')<c_4(G)$, 这里 $G\in\{G_1,G_2,G_3\}$.

因此 G' 与 G 具有不同的圈长分布．于是定理成立. □

定理 2 设 $n\le r\le min\{n+6,2n-7\}$, 则 $G=K_{n,r}-A(\mid A\mid=3)$ 是由它的圈长分布确定的.

证明 由定理的条件知 $n\ge r-n+7\ge 7$. 对于 $n=r$ 的情形在文 [8] 中已证，现只需证 $n<r\le \min\{n+6,2n-7\}$ 的情形．容易知道 $K_{n,r}[A]$ 恰有图 2 所示的六种图形．将这六种图形分别记为 H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6, 且如图 2 所示给每个图的顶点标号.

图 2 $K_{n,r}[A]$ 的六种图形

其中 $x_i\in X$ 和 $y_i\in Y(i=1,2,3)$. 此时不难算出 $K_{n,r}$ 的 4 圈数为 $\binom{n}{2}\binom{r}{2}$; $K_{n,r}$ 中含 H_i 中一条边的 4 圈数为 $\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}$; $K_{n,r}$ 中含 H_i 中二条边的 4 圈数记为 $\mu(H_i)$, 则 $\mu(H_1)=3,\mu(H_2)=2+(n-1),\mu(H_3)=2+(r-1),\mu(H_4)=(n-1)+(r-1)+1,\mu(H_5)=3(n-1),\mu(H_6)=3(r-1)$. $K_{n,r}$ 中含 H_i 中三条边的 4 圈数依次为 0,0,0,1,0,0. 用 $c_4(G_i)$ 表示 $G_i=K_{n,r}-E(H_i)$ 的 4 圈数．根据容斥原理得到

$$c_4(G_1)=\binom{n}{2}\binom{r}{2}-3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}+3$$

$$c_4(G_2)=\binom{n}{2}\binom{r}{2}-3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}+2+(n-1)$$

$$c_4(G_3)=\binom{n}{2}\binom{r}{2}-3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}+2+(r-1)$$

$$c_4(G_4)=\binom{n}{2}\binom{r}{2}-3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}+(n+r-1)-1$$

$$c_4(G_5)=\binom{n}{2}\binom{r}{2}-3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}+3(n-1)$$

$$c_4(G_6)=\binom{n}{2}\binom{r}{2}-3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}+3(r-1).$$

显然 $c_4(G_1) < c_4(G_2) < c_4(G_3) < c_4(G_4) < c_4(G_5) < c_4(G_6)$. 这表明对 $G = K_{n,r} - A(|A| = 3)$, 不同的 G 具有不同的圈长分布.

以下证明对任意 $G' \neq G = K_{n,r} - A(|A| = 3)$,$G'$ 与 G 具有不同的圈长分布. 易知 G' 可能有下列三种情况.

情况 1 $G' \in \{K_{n,r} - A \mid 0 \leq |A| \leq 2$ 或 $|A| \geq 4\}$. 由文 [7] 及定理 1 已证 $G' = K_{n,r}, G' = K_{n,r} - A(|A| = 1), G' = K_{n,r} - A(|A| = 2)$ 是由它们的圈长分布唯一确定的. 又当 $G' = K_{n,r} - A(|A| \geq 4)$ 时, 由引理 2 知 $\max c_4(G') < \min c_4(G)$. 因此对 $G' \in \{G \mid G = K_{n,r} - A, |A| \neq 3\}$,$G'$ 与 G 具有不同的圈长分布.

情况 2 $G' \in \{K_{n+k,r-k} - A \mid |A| = j, 0 \leq j \leq n+k-2, 1 \leq k \leq [\frac{r-n}{2}]\}$. 此时 $n+k \geq j+2$. 由引理 3 知, $C_{2n+2k}(G') \neq 0$, 而 $C_{2n+2k}(G) = 0$. 因此 G' 与 G 具有不同的圈长分布.

情况 3 $G' \in \{K_{n+k,r-k} - A \mid |A| = j \geq n+k-1, 1 \leq k \leq [\frac{r-n}{2}]\}$. 令 $G'' \in \{K_{n+k,r-k} - A \mid |A| = j = n+k-1, 1 \leq k \leq [\frac{r-n}{2}]\}$, 则 $c_4(G') \leq \max c_4(G'')$.

令 $f(k) = \max c_4(G'')$, 则由引理 1 知

$$f(k) = \binom{n+k}{2}\binom{r-k}{2} - (n+k-1)\binom{n+k-1}{1}\binom{r-k-1}{1} + \binom{n+k-1}{2}(r-k-1).$$

以下证明 $f(k) < c_4(G_1) < c_4(G_2) < c_4(G_3) < c_4(G_4) < c_4(G_5) < c_4(G_6)$.

只需证 $f(k) < c_4(G_1) = \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} + 3$.

令 $H_k(r) = f(k) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} + 3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} - 3$.

由于 $n < r \leq \min\{n+6, 2n-7\}$, 及 $1 \leq k \leq [\frac{r-n}{2}]$, 推出 $2 \leq 2k \leq r-n \leq 6$ 及 $r \leq 2n-7$, 进一步有 $1 \leq k \leq 3, n \geq r-n+7$.

于是当 $k = 1$ 时, $H_1(r) = f(1) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} + 3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} - 3 = \frac{1}{4}[(-4r+6)n^2 + (2r^2+6r-6)n - 12r]$. 此时 $2 \leq r-n \leq 6$, 即 $n+2 \leq r \leq n+6$. 将 $r = n+2, n+3, \cdots, n+6$ 分别代入 $H_1(r)$, 并结合 n 的条件即 $n \geq r-n+7$, 我们有:

$$H_1(n+2) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-1)-24] < 0, H_1(n+3) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-9)-36] < 0,$$

$$H_1(n+4) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-19)-48] < 0, H_1(n+5) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-31)-60] < 0,$$

$$H_1(n+6) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-45)-72] < 0.$$

当 $k = 2$ 时, $H_2(r) = f(2) - \binom{n}{2}\binom{r}{2} + 3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1} - 3 = \frac{1}{4}[(-6r+12)n^2 + (4r^2-10r+24)n + (2r^2-26r+24)]$. 此时 $4 \leq r-n \leq 6$, 即 $n+4 \leq r \leq n+6$. 将 $r = n+4, n+5, n+6$ 分别代入 $H_2(r)$, 并结合 n 的条件, 我们有:

$$H_2(n+4) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-6n-19)-48] < 0,$$

$$H_2(n+5) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-7n-34)-56] < 0,$$

$$H_2(n+6) = \frac{1}{4}[-2n(n^2-8n-53)-60] < 0.$$

当 $k=3$ 时， $H_3(r)=f(3)-\binom{n}{2}\binom{r}{2}+3\binom{n-1}{1}\binom{r-1}{1}-3=\frac{1}{4}[(-8r+20)n^2+(6r^2-34r+88)n+(6r^2-66r+120)]$. 此时 $r-n=6$, 将 $r=n+6$ 代入 $H_3(r)$, 并结合 n 的条件即 $n\ge 13$, 我们有：

$$H_3(n+6)=\frac{1}{4}[-2n(n^2-8n-53)-60]<0.$$

因此 $f(k)<c_4(G_1)<c_4(G_2)<c_4(G_3)<c_4(G_4)<c_4(G_5)<c_4(G_6)$. 于是 $c_4(G')<c_4(G)$, 这里 $G\in\{G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6\}$.

因此 G' 与 G 具有不同的圈长分布．于是定理成立. □

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Application* [M]. New York, 1976.

[2] SHI Yong-bing. *Some theorem of uniquely pancyclic graphs* [J]. Discrete Math., 1986, **59**: 167–180.

[3] SHI Yong-bing, YAP H P, TEO S K. *On Uniquely r-pancyclic graphs* [C]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1989, **576**: 487–499.

[4] SHI Yong-bing. *On maximum cycle distributed graphs* [J]. Discrete Math., 1988, **71**: 57–71.

[5] SHI Yong-bing. *On simple MCD-graphs containing a subgraph homemorphic to* K_4 [J]. Discrete Math., 1994, **126**: 325–338.

[6] SHI Yong-bing. *Some problems of cycle length distribution* [J]. J. Nanjing University (Natural Science), Special Issue on Graph Theory, 1991, **27** : 233–234.

[7] 王敏，王明磊．由圈长分布确定的偶图 [J]. 上海师范大学学报 (自然科学版), 2004, **33(1)**: 42–44.
WANG Min, WANG Ming-lei, *Bipartite graphs determined by their cycle length distributions* [J]. J. Shanghai Normal University (Natural Science), 2004, **33(1)**: 42–44. (in Chinese)

[8] 陆宗元．几类由圈长分布确定的偶图 [J]. 上海师范大学学报 (自然科学版), 1992, **21**(4): 24–28.
LU Zong-yuan. *Some classes of bipartite graphs determined by their cycle length distributions* [J]. J. Shanghai Normal University (Natural Science), 1992, **21(4)**: 24–28. (in Chinese)

[9] 吴承勋．几类偶图的圈长分布 [J]. 上海师范大学学报 (自然科学版), 1993, **22(2)**: 28–32.
WU Cheng-xun. *The cycle length distributions of some classes of bipartite graphs* [J]. J. Shanghai Normal University (Natural Science), 1993, **22(2)**: 28–32. (in Chinese)

Uniqueness of Cycle Length Distribution of Certain Bipartite Graphs $K_{n,r}-A$ $(\mid A\mid\le 3)$

Wang Min, Shi Yong-bing
(Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The cycle length distribution of a graph of order n is $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, where c_i is the number of cycles of length i. Let $A\subseteq E(K_{n,r})$. In this paper, we obtain the following results: (1) If $\mid A\mid=2$, and $n\le r\le\min\{n+6,2n-5\}$, then $G=K_{n,r}-A$ is determined by its cycle length distribution. (2) If $\mid A\mid=3$, and $n\le r\le\min\{n+6,2n-7\}$, then $G=K_{n,r}-A$ is also determined by its cycle length distribution.

Key words: cycle; cycle length distribution; bipartite graph; a bipartite graph determined by its cycle length distribution.