第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0859-04 **文献标识码**: **A**

局部 G- 凸一致空间上几乎不动点定理和不动点定理

朴 勇 杰
(延边大学理学院数学系，吉林 延吉 133002)
(E-mail: pyj6216@hotmail.com)

摘 要: 得到局部 G- 凸一致空间上具有 S-KKM 性质的集值映射的新的几乎不动点定理和不动点定理. 我们的结果对已有文献中的相应结论进行了改进和一般化.

关键词: 一般化凸空间; Γ- 凸的; S-KKM 性质; 局部 G- 凸一致空间.
MSC(2000): 47H10; 54H25; 55M20
中图分类: O189.1; O177.91

1 引 言

Fan-KKM 定理是现代非线性分析学中非常重要的工具, 因此很多学者从不同的方向不断地改进其形式和结果并把它应用于实际问题之中. 在本文, 我们的目的是引进具有 S-KKM 性质的集值映射, 它是很多种类的 KKM 映射的改进形式, 并且介绍局部 G- 凸一致空间的概念, 最后在 Hausdorff 局部 G- 凸一致空间上得到具有 S-KKM 性质的集值映射具有几乎不动点或不动点的定理. 我们的定理改进了文献 [1]–[3] 中的相应结果.

现在, 我们给出本文中所需要的基本概念和一些注记.

一般化凸空间 (简称 G- 凸空间) $(X,D;\Gamma)$ 是由一个拓扑空间 X 和一个非空集合 D 组成, 并满足对任何 $A=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}\in\langle D\rangle$, 存在一个 X 的子集 $\Gamma(A)$ 和一个连续函数 $\phi_n:\Delta_n\mapsto\Gamma(A)$ 使得由 $J\subset\{0,1,2,\dots,n\}$ 推出 $\phi_n(\Delta_J)\subset\Gamma(\{a_j:j\in J\})$. 这里 $\langle D\rangle$ 表示 D 的所有非空有限子集全体, Δ_n 表示顶点为 $v_0,v_1,\dots,v_n$ 的 n- 单形, 而 $\Delta_J=\mathrm{co}\{v_j:j\in J\}$ 表示相对于 J 的 Δ_J 的面. 用 Γ_A 表示 $\Gamma(A)$, 对任何 $A\in\langle D\rangle$. 在本文, 我们假设 $D\subset X$, 并如果 $X=D$ 则用 (X,Γ) 代替 $(X,\,D;\,\Gamma)$.

我们有许多关于 G- 凸空间的例子 [4], 其中常见的有: 拓扑线性空间的任何凸子集, Lassonde 意义下的凸空间 [5], Hovarth 意义下的 H- 凸空间 [6].

设 $(X,D;\Gamma)$ 为 G- 凸空间, 称非空子集 $Y\subset X$ 为 Γ- 凸的, 如果 $N\in\langle D\rangle$ 并且 $N\subset Y$, 则 $\Gamma_N\subset Y$. Y 的 Γ- 凸包定义: $\Gamma\text{-co}\,Y:=\bigcap\{Z\subset X:Z$ 是包含 Y 的 X 的 Γ- 凸子集$\}$.

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, 一个映射 (multimap)$T:X\multimap Y$ 是指从 X 到 Y 的幂集 2^Y 的一个函数. 称 $T(x)$ 为 T 在 $x\in X$ 上的值. 令 $T(A)=\bigcup_{x\in A}T(x)$, 对任何 $A\in\langle D\rangle$.

定义一个新映射 $T^-:Y\multimap X$ 如下 $T^-(y)=\{x\in X:y\in T(x)\}$, 对任何 $y\in Y$.

一个映射 $T:X\multimap Y$ 被称为紧的, 如果 $T(X)=\{y\in Y:y\in T(x),x\in X\}$ 包含在 Y 的紧致子集中; T 被称为闭映射, 如果 T 的图像 $Gr(T)$ 是 $X\times Y$ 的闭子集.

定义 1 设 X 是非空集, $(Y,D;\Gamma)$ 是 G- 凸空间, Z 是拓扑空间. 如果三个集值映射 $S:X\multimap D$, $T:Y\multimap Z$, $F:X\multimap Z$ 满足 $T(\Gamma\text{-co}S(N))\subset F(N)$, 对任何 $N\in\langle X\rangle$, 则称

收稿日期: 2005-11-15; **接受日期**: 2006-08-26
基金项目: 国家自然科学基金 (10361005); 延边大学科研项目 (延大科合字 (2004) 第 8 号).

F 关于 T 广义的 S-KKM 映射. 如果映射 $T: Y \multimap Z$ 满足对任何关于 T 广义的 S-KKM 映射 F, $\{\overline{F(x)}: x \in X\}$ 具有有限交性质, 则称 T 具有 S-KKM 性质. 类 S-KKM(X,Y,D,Z) 定义为集合 $\{T: Y \multimap Z: T$ 具有 S- KKM 性质$\}$. 如果 $D = Y$, 则用 $S\text{-KKM}(X, Y, Z)$ 表示 $S\text{-KKM}(X, Y, D, Z)$.

注记 当 $Y = D$ 是线性空间的非空凸子集时, 定义 1 即是文献 [1] 中的定义.

定义 2 设 X 是非空集, $(Y, D; \Gamma)$ 是 G- 凸空间. 称集值映射 $S: X \multimap D$ 为具有 Γ- 凸集不变性质是指对任何 $A \in \langle X \rangle$, $\Gamma\text{-co}S(A) = \Gamma\text{-co}\{\omega_a : a \in A\}$, 对任何 $\omega_a \in S(a)$.

显然, 单值映射 $s: X \to D$ 具有 Γ- 凸集不变性质.

定义 3[7] 一个局部 G- 凸一致空间是指一个 G- 凸空间 $(X, D; \Gamma, \mathbb{U})$ 满足

(i). X 是具有一致结构 $\mathbb{U}$, ν 是 $\mathbb{U}$ 的一个基, D 在 X 中稠密; 并

(ii). 对任何 $V \in \nu$ 和任何 $x \in X$, $V[x] = \{x' \in X : (x, x') \in V\}$ 是 Γ- 凸的.

定义 4[8] 设 Y 是 Haudorff 空间, $(X, D; \Gamma)$ 是 G- 凸空间. 一个映射 $T: Y \multimap X$ 被称为 Φ- 映射, 如果存在一个映射 $S: Y \multimap D$ 满足

(i). 对任何 $y \in Y$, $M \in \langle S(y) \rangle$ 推出 $\Gamma_M \subset T(y)$; 并

(ii). $Y = \bigcup\{\text{Int}S^-(x) : x \in D\}$.

2 几乎不动点定理和不动点定理

首先引入一些已知的结论.

定理 A[9] 设 $(X, D; \Gamma)$ 是 G- 凸空间, Y 是 X 的非空子集. 则 $\Gamma\text{-co}Y$ 是包含 Y 的 X 的最小的 Γ- 凸子集.

我们模仿文献 [1] 和 [3] 中的证明方法可得到下列定理. 该定理多处改进了文献 [1] 和 [3] 中相应的结果.

定理 B 设 X 是非空集合, (Y, Γ) 是 G- 凸空间, Z 和 W 是两个拓扑空间且 $S: X \multimap Y$ 是一个映射. 如果 $T \in S\text{-KKM}(X, Y, Z)$ 且 $f \in \mathbb{C}(Z, W)$, 则 $fT \in S\text{-KKK}(X, Y, W)$.

证明 设 $F: X \multimap W$ 是关于 fT 的广义的 S-KKM 映射, 且假设对任何 $x \in X$, $F(x)$ 是闭的. 因为对任何 $N \in \langle X \rangle$ 成立 $fT(\Gamma\text{-co}S(N)) \subset F(N)$, 于是 $T(\Gamma\text{-co}S(N)) \subset f^{-1}F(N) = \bigcup_{x \in N} f^{-1}F(x)$. 这说明 $f^{-1}F$ 是关于 T 的 S-KKM 映射且对每个 $x \in X$, $f^{-1}F(x)$ 是闭的. 另外, 因为 $T \in S\text{-KKM}(X, Y, Z)$, 因此 $\{f^{-1}F(x) : x \in X\}$ 具有有限交性质, 于是 $\{F(x) : x \in X\}$ 也具有有限交性质, 所以 $fT \in S\text{-KKK}(X, Y, W)$.

定理 C[8] 设 Y 是 Hausdorff 紧致空间, $(X, D; \Gamma)$ 是 G- 凸空间, $T: Y \multimap X$ 是 Φ- 映射. 则 T 有一个连续选择 $f: X \to Y$ 满足 $f(Y) \subset \Gamma_N$. 确切地讲存在两个连续函数 $p: Y \to \Delta_n$ 和 $\phi_n: \Delta_n \to \Gamma_N$ 使得 $f = \phi_N \circ p$, 对某个 $N \in \langle D \rangle$ 且 $|N| = n + 1$, 其中 Δ_n 是 n- 单形.

下面的几个定理是本文的主要结果.

定理 1 设 $(X, D; \Gamma, \mathbb{U})$ 是局部 G- 凸一致空间, ν 是一致结构 $\mathbb{U}$ 的一个基, I 是非空集且 $S: I \multimap D$ 是具有 Γ- 凸集不变性质的集值映射. 如果 $T \in S\text{-KKM}(I, X, D, X)$ 是紧映射并且满足 $T(X) \subset S(I)$. 则 $T: X \multimap X$ 具有几乎不动点性质, 即对任何 $V \in \nu$, 存在一个 $x_V \in X$ 满足 $V[x_V] \bigcap T(x_V) \neq \emptyset$.

证明 我们可以假设每个 $V \in \nu$ 是开的对称的. 定义一个集值映射如下:

$$F: I \multimap X,\ F(z) = \overline{T(X)} \setminus \bigcup_{\omega \in S(z)} V[\omega], \text{对任何 } z \in I.$$

因为 $T(X) \subset S(I)$, 且对每个 $z \in I$ 及 $\omega \in S(z)$, $V[\omega]$ 是 ω 的开领域，因此 $\overline{T(X)} \subset \bigcup_{z\in I}\bigcup_{\omega\in S(z)} V[\omega]$. 因为 T 是紧映射，所以 $\overline{T(X)}$ 是 X 的紧致子集，因此存在有限集 $N = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \in \langle I\rangle$ 和 $\{\omega_{i,j} \in S(z_i) : j = 1, 2, \ldots, k_i\}_{i=1}^n$ 使得 $\overline{T(X)} \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} V[\omega_{i,j}] \subset \bigcup_{z\in N}\bigcup_{\omega\in S(z)} V[\omega]$. 显然对每个 $z \in I$, $F(z)$ 是闭的，并且

$$\bigcap_{z\in N} F(z) = \overline{T(X)} \setminus \bigcup_{z\in N}\bigcup_{\omega\in S(z)} V[\omega] \subset \overline{T(X)} \setminus \overline{T(X)} = \emptyset,$$

因此 $\{F(z)\}_{z\in I}$ 不具有有限交性质. 因为 $T \in S\text{-KKM}(I, X, D, X)$, 因此存在 $M \in \langle I\rangle$ 使得 $T(\Gamma\text{-co}S(M)) \not\subseteq F(M)$. 于是存在 $x_V \in \Gamma\text{-co}S(M)$ 和 $p \in T(x_V)$ 满足 $p \notin F(M) = \bigcup_{m\in M} F(m) = \bigcup_{m\in M}\left(\overline{T(X)} \setminus \bigcup_{\omega\in S(m)} V[\omega]\right)$, 这说明 $p \in \bigcup_{\omega\in S(m)} V[\omega]$ 对所有 $m \in M$. 故对每个 $m \in M$ 存在 $\omega_m \in S(m)$ 满足 $p \in V[\omega_m]$, 即 $\omega_m \in V[p]$, 于是得到 $\{\omega_m \in S(m) : m \in M\} \subset V[p]$. 根据定义 2, 定义 3 和 S 的条件以及定理 A 可得 $x_V \in \Gamma\text{-co}S(M) = \Gamma\text{-co}\{\omega_m \in S(m) : m \in M\} \subset V[p]$, 从而 $p \in V[x_V]$. 这意味着 $T(x_V)\bigcap V[x_V] \neq \emptyset$.

根据定理 1 和定义 2 后面的说明，我们有下列结果.

推论 1　设 $(X, D; \Gamma, \mathbb{U})$ 是局部 G- 凸一致空间，ν 是一致结构 $\mathbb{U}$ 的一个基，I 是非空集且 $s : I \to D$ 是单值映射. 如果 $T \in s\text{-KKM}(I, X, D, X)$ 是紧映射并且满足 $T(X) \subset s(I)$. 则 $T : X \multimap X$ 具有几乎不动点性质，即对任何 $V \in \nu$, 存在一个 $x_V \in X$ 满足 $V[x_V]\bigcap T(x_V) \neq \emptyset$.

根据定理 1 和推论 1, 我们可以得到局部 G- 凸一致空间上具有 S-KKM 性质的集值映射的不动点定理.

定理 2　设 $(X, D; \Gamma, \mathbb{U})$ 是 Hausdorff 局部 G- 凸一致空间，I 是非空集且集值映射 $S : I \multimap D$ 具有 Γ- 凸集不变性质. 如果 $T \in S\text{-KKM}(I, X, D, X)$ 是紧的闭映射且 $T(X) \subset S(I)$. 则 $T : X \multimap X$ 有一个不动点.

证明　对每个 $V \in \nu$, 根据定理 1 存在一个 $x_V \in X$ 满足 $T(x_V)\bigcap V[x_V] \neq \emptyset$. 选取一个 $y_V \in T(x_V)\bigcap V[x_V]$, 则 $(x_V, y_V) \in Gr(T)$ 并且 $(x_V, y_V) \in V$. 显然 $\{y_V\}_{V\in\nu}$ 是紧集 $\overline{T(X)}$ 中的一个网，所以 $\{y_V\}_{V\in\nu}$ 有一个收敛的子网，不妨可以假设 $\{y_V\}_{V\in\nu}$ 本身收敛且 $\{y_V\} \to x_0 \in \overline{T(X)}$. 另一方面，$X$ 是 Hausdorff 并且 $(x_V, y_V) \in V$, 对所有 $V \in \nu$, 于是 $x_V \to x_0$. 但是 $Gr(T)$ 是 $X \times X$ 的闭子集，因此 $(x_0, x_0) \in Gr(T)$, 这说明 $x_0 \in T(x_0)$.

推论 2　设 $(X, D; \Gamma, \mathbb{U})$ 是 Hausdorff 局部 G- 凸一致空间，I 是非空集且 $s : I \to D$ 是单值映射. 如果 $T \in s\text{-KKM}(I, X, D, X)$ 是紧的闭映射且 $T(X) \subset s(I)$. 则 $T : X \multimap X$ 有一个不动点.

注记　1). 当 $I = X = D$ 是拓扑线性空间的非空凸子集，$s : X \to Y$ 是单值映射且 $\overline{T(X)} \subset s(X)$ 时，定理 1 和 2 及推论 1 和 2 变成文献 [1] 中的相应结果；当 $I = X = D$ 是 H-空间，$s : X \to Y$ 是单值映射且 $\overline{T(X)} \subset s(X)$ 时，定理 1 和 2 及推论 1 和 2 变成文献 [2] 中的相应结果；当 $I = X = D$ 是 G- 空间，$s : X \to Y$ 是单值映射且 $\overline{T(X)} \subset s(X)$ 时，定理 1 和 2 及推论 1 和 2 变成文献 [3] 中的相应结果.

另外，我们的证明定理的方法与文献 [1],[2] 和 [3] 中采用的方法不同. 如果采用他们的思路，则即使在 $I = X = D$ 情况下需要条件 $\overline{T(X)} \subset S(X)$, 而不是 $T(X) \subset S(X)$.

2). 当 $s : X \to D$ 是单值映射时，我们可以给出下列类似于定义 1 的类 $s\text{-KKM}(X, Y, D, Z)$, 但是条件有所不同：

定义 1$'$　设 X 是非空子集，$(Y, D; \Gamma)$ 是 G- 凸空间，Z 是拓扑空间. 如果一个单值映射 $s : X \to D$ 和两个集值映射 $T : Y \multimap Z$ 和 $F : X \multimap Z$ 满足 $T(\Gamma_{s(N)}) \subset F(N)$, 对任何 $N \in \langle X\rangle$,

则称 F 为关于 T 广义的 s-KKM 映射. 如果 $T: Y \multimap Z$ 满足对任何关于 T 广义的 s-KKM 映射 F, $\{\overline{F(x)}: x \in X\}$ 具有有限交性质, 则称 T 具有 s-KKM 性质. 类 s-KKM(X,Y,D,Z) 表示集合 $\{T: Y \multimap Z: T$ 具有 s- KKM 性质$\}$.

因为 $s: X \to D$ 是单值映射时 $s(N) \in \langle D \rangle$ 对任何 $N \in \langle X \rangle$, 于是由定理 A 和 Γ- 凸子集的定义知 $\Gamma_{s(N)} \subset \Gamma\text{-}\cos(N)$, 因此当 $s: X \to D$ 是单值映射时定义 1 比定义 $1'$ 条件更强.

如果 $Y = D$ 是 H- 空间, 则定义 $1'$ 变成文 [2] 中的相应定义. 另外, 当 $S: X \multimap D$ 是集值映射时, 根据 G- 凸空间的定义可知不能采用定义 $1'$ 只能采用定义 1.

利用定理 B, 定理 C 和定理 2 得到下列复合映射的不动点定理.

定理 3 设 $(X, \Gamma, \mathbb{U})$ 是 Hausdorff 局部 G- 凸一致空间, Y 是紧致的 Hausdorff 空间, $S: X \multimap X$ 具有 Γ- 凸集不变性质. 如果 $T \in S\text{-KKM}(X, X, Y)$ 是闭映射且满足 $S(X) = X$, 则对任何 Φ- 映射 $G: Y \multimap X$, GT 和 TG 分别在 X 和 Y 中分别有一个不动点.

证明 根据定理 C, G 有一个连续选择 $f: Y \to X$, 再根据定理 B, $fT \in S\text{-KKK}(X, X, X)$. 注意到由 f 的连续性和 Y 的紧性可知 fT 是紧映射. 由于 T 是闭映射且 f 是连续, 因此 fT 也是闭映射. 于是有定理 2 知 fT 有一个不动点 $x_0 \in X$, 即 $x_0 \in fT(x_0)$, 故存在 $y_0 \in T(x_0)$ 满足 $x_0 = f(y_0) \in G(y_0)$, 这说明 $x_0 \in GT(x_0)$ 和 $y_0 \in TG(y_0)$.

注记 定理 3 改进了文献 [1] 中的相应结果, 在文献 [1] 中 X 是局部凸拓扑线性空间的凸子集, Y 是拓扑线性空间的紧子集且 S 是单值映射而 G 是另外一种映射.

参考文献:

[1] CHANG T H, HUANG Y Y, JENG J C. et al. *On S-KKM property and related topics* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **229**(1): 212–227.

[2] LIU Xin-ge, CAI Hai-tao. *H-space and vector quasi-variational inequalities* [J]. Math. Theory Appl. (Changsha), 2004, **24**(3): 1–5.

[3] 张红琳, 蒋才毅. G- 凸空间中广义 S-KKM 映像的性质 [J]. 四川师范大学学报 (自然版), 2001, **24**(1): 19–22. ZHANG Hong-lin, JIANG Cai-yi. *On property of generalized S-KKM mapping in G-convex spaces* [J]. Natur. Sci. J. Sichuan Normal Univ., 2001, **24**(1): 19–22. (in Chinese)

[4] PARK S. *New Subclass of Generalized Convex Spaces* [M]. Fixed point theory and applications (Chinju, 1998), 91–98, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2000.

[5] LASSONDE M. *On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1983, **97**(1): 151–201.

[6] HORVATH C D. *Contractibility and generalized convexity* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, **156**(2): 341–357.

[7] PARK S. *Remarks on Fixed Point Theorems for Generalized Convex Spaces* [M]. Fixed point theory and applications (Chinju, 1998), 135–144, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2000.

[8] PARK S. *Continuous selection theorems in generalized convex spaces* [J]. Numer. Funct. Anal. Optim., 1999, **20**(5-6): 567–583.

[9] PIAO Yong-jie. *Some basic properties on gengeralized convex spaces* [J]. Natur. Sci. J. Yanbian Univ., 2002, **28**(3): 157–159.

Almost Fixed Point Theorems and Fixed Point Theorems on Locally G-Convex Uniform Spaces

PIAO Yong-jie

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Jilin 133002, China)

Abstract: New almost fixed point theorems and fixed point theorems for multimap having S-KKM property on locally G-convex uniform space are obtained. Our results improve and generalize the corresponding results in recent literatures.

Key words: generalized convex space; Γ-convex; the S-KKM property; locally G-convex uniform space.