

文章编号: 1002-2082(2005)05-0013-04

# 编码孔径成像系统中的点扩散函数

程丽红<sup>1,2</sup>, 田晓东<sup>1</sup>, 谢存<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024; 2. 大连海事大学 数理系, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 在 X 光编码孔径成像系统中, 系统的点扩散函数决定成像系统的成像质量。由于系统的点扩散函数可用来求解系统的传递函数, 并可由此制作实现图像重构的滤波器, 因此点扩散函数的精确程度直接影响重构过程中图像的质量。本文以标量衍射理论为基础, 从理论上推导出了衍射效应条件下编码孔径中圆环的点扩散函数, 并将它用于制作光学系统的滤波器。最后利用 Wiener 滤波函数对编码重叠像的频谱分布进行滤波处理, 再经过逆傅里叶变换得到了重构图像。

**关键词:** 菲涅耳衍射; 点扩散函数; 编码孔径

**中图分类号:** O434.19 **文献标识码:** A

## Point Spread Function in Coded Aperture Imaging System

CHENG Li-hong<sup>1,2</sup>, TIAN Xiao-dong<sup>1</sup>, XIE Cun<sup>1</sup>

(1. School of Electronic and Information Engineering, Dalian Univ. of Tech., Dalian 116024, China)

(2. Department of Mathematics and physics, Dalian Maritime Univ, Dalian 116024, China)

**Abstract:** In the study of X ray coded aperture imaging system, it's known that the point spread function (PSF) decides the performance of a imaging system. MTF can be deduced by PSF and the filter used in image reconstruction can be made thereby, so the accuracy of PSF directly affects the performance of reconstructed image. In this paper, based on the scalar theory, PSF is obtained theoretically under the condition of considering diffraction effects. The filter of the optical system is fabricated based on PSF. The filtering processing for the frequency distribution of coded overlapping image was done with Wiener filtering function and then the reconstructed image was obtained through the inverse Fourier transformation.

**Keywords:** Fresnel diffraction; point spread function; coded aperture

## 引言

在 X 光成像中, 由于绝大多数材料的折射率小于 1, 加之材料对 X 射线的强烈吸收, 从而使得用普通的折射和反射成像系统难以成像, 只有在掠入射角很小的情况下, 才能获得可利用的反射率。

X 射线波段的另一种成像方法是投影式透射成像, 单针孔成像是这种方法的代表。由于结构简单, 且具有高的分辨率, 针孔成像一直使用至今。但是它的低集光效率和低信噪比使它的应用受到很大限制, 因而出现了编码孔径成像技术<sup>[1~3]</sup>。编码孔径成像是 X 光成像技术中一种比较好的成

像方法, 在保留了高分辨率和高信噪比的前提下, 它的集光效率呈数量级增加, 可在弱的 X 射线下获得目标的图像。

在编码孔径成像中, 点扩散函数表征了该成像系统的成像特征。由于点扩散函数是通过傅里叶变换确定传递函数并把它作用于图像重构的滤波器, 因此可以说, 点扩散函数的确定直接影响编码孔径成像的图像重构效果。

## 1 图像编码过程

在编码成像过程中, 编码孔径成像技术是利用

收稿日期: 2004-05-11; 修回日期: 2004-06-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(批准号 19874010)

作者简介: 程丽红(1968-), 女(满族), 辽宁人, 大连海事大学数理系副教授, 现为大连理工大学在读博士生, 主要从事光学工程和图像处理方面的研究工作。

光的直线传播特性,将经孔径编码后的入射光直接投影在接收平面上,每个物点在接收平面上形成一个编码孔径的投影图像。不同物点产生的像因相互错开和叠加而在接收平面上形成了退化且重叠的二维分布信号,即编码像。以圆环形编码孔为例,其成像原理如图1所示,其中图1(a)为采用环形编码孔径获得的重叠像,图1(b)示出环孔大小与环孔宽度和直径的关系。

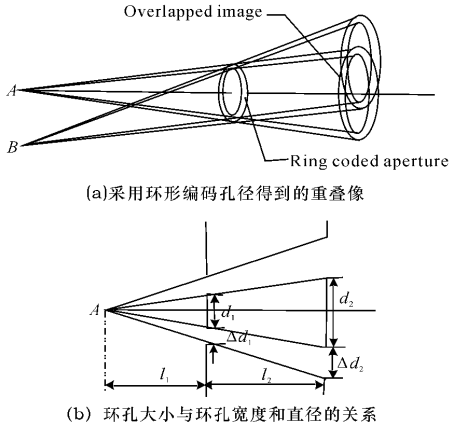


图1 环形编码孔径成像原理图

Fig. 1 Schematic diagram of ring coded aperture imaging

由图1(a)可知,靶标上每一点经过环孔后在屏幕上形成一个投影像,它实际上是一个放大的环孔。图中示出目标上两个点A和B所成的像,这些放大的环孔大小与环孔宽度和直径的关系如图1(b)所示,即:

$$d_2 = \frac{l_1 + l_2}{l_1} d_1, \quad \Delta d_2 = \frac{l_1 + l_2}{l_1} \Delta d_1 \quad (1)$$

设目标函数为 \$o(x, y)\$, \$h(x, y)\$ 为环形编码孔径系统的点扩散函数, \$n(x, y)\$ 为与系统无关的噪声函数,则编码孔径所形成的像函数 \$i(x, y)\$ 为

$$i(x, y) = o(x, y) * h(x, y) + n(x, y) \quad (2)$$

式中, \$\*\$ 为卷积符号,对上式进行傅里叶变换可得到其频谱分布:

$$I(u, \nu) = O(u, \nu)H(u, \nu) + N(u, \nu) \quad (3)$$

式中, \$H(u, \nu)\$ 为环形编码孔径的调制传递函数。

## 2 图像解码过程

为了得到目标真实的空间(二维或三维)分布,需要对接收平面上得到的编码图像进行必要的解码处理,即需要利用光学或数字图像处理技术对编码图像进行恢复和重构。其任务就是从已知的编码

图像中,根据系统的传递函数和噪声等某些先验知识和信息,对真实目标作出最佳估值。本文采用的主要图像恢复方法是利用数字图像处理技术在对编码图像进行去噪后,应用维纳(Wiener)滤波器进行图像解码,从而得到恢复后的图像。

维纳滤波就是寻找传输函数为 \$H\_w(u, \nu)\$ 的滤波器,使得恢复后的目标估值 \$o'(x, y)\$ 与真实值 \$o(x, y)\$ 的均方误差最小,即

$$E\{[o(x, y) - o'(x, y)]^2\} = \min \quad (4)$$

则

$$H_w(u, \nu) = \frac{H^*(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 + s_n(u, \nu)/s_o(u, \nu)} \quad (5)$$

式中, \$H^\*(u, \nu)\$ 为编码孔径成像系统传递函数的复数共轭; \$s\_o(u, \nu)\$ 和 \$s\_n(u, \nu)\$ 分别为目标图像和噪声的功率谱密度,则恢复目标的估值为

$$O'(u, \nu) = H_w(u, \nu) \cdot I(u, \nu) = \frac{H^*(u, \nu) \cdot I(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 + s_n(u, \nu)/s_o(u, \nu)} \quad (6)$$

很多情况下, \$s\_o(u, \nu)\$ 和 \$s\_n(u, \nu)\$ 都是未知的。为了计算方便,可根据处理对象的不同将 \$s\_n(u, \nu)/s\_o(u, \nu)\$ 设为某个经验值 \$\epsilon\$, 即:

$$H_w(u, \nu) = \frac{H^*(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 + \epsilon} \quad (7)$$

$$O'(u, \nu) = \frac{H^*(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 + \epsilon} \cdot I(u, \nu) \approx O(u, \nu) + N'(u, \nu) \quad (8)$$

对上式作逆傅里叶变换(IFFT),于是得到重构后的目标像:

$$o'(x, y) \approx o(x, y) + n'(x, y) \quad (9)$$

由上式可以看出,经过维纳滤波器滤波后,就可以近似重构出原目标的图像, \$n'(x, y)\$ 为噪声函数,它的存在会使图像的对比度有所降低。

图像恢复过程是用计算机完成的。首先,用计算机模拟孔径编码成像的重叠像,利用快速傅里叶变换(FFT)获得该重叠像的频谱分布;其次,计算编码孔径成像系统的点扩散函数,经过傅里叶变换后得到该系统的调制传递函数 \$H(u, \nu)\$,然后利用调制传递函数来设计维纳滤波器(设计维纳滤波器的关键环节是选择合适的 \$\epsilon\$,使处理结果尽可能趋于最佳);最后,利用维纳滤波函数对得到的重叠像的频谱分布进行滤波处理,进而通过逆傅里叶变换得到重构像。

## 3 点扩散函数的计算

根据标量衍射理论,利用积分法推导菲涅耳衍

射的点扩散函数通式。

如图 2 所示,点光源 Q(球面波中心)位于坐标原点,衍射屏  $S_0$  上的直角坐标为  $x_0$  和  $y_0$ ,在衍射屏的中心有一个编码孔径;观察屏 S 上的直角坐标为  $x$  和  $y$ ,在它上面观察到的是编码孔径的点扩散函数(观察屏和衍射屏位于球面波中心的同侧,点光源 Q 到  $S_0$  屏的距离为  $L$ ,  $S_0$  屏与 S 屏之间的距离为  $Z$ )。

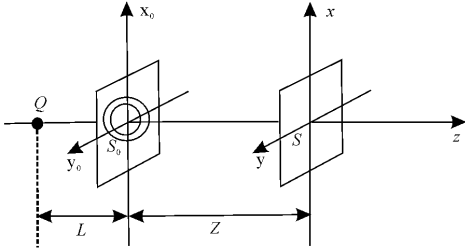


图 2 菲涅耳衍射光路图

Fig. 2 Diagram of beam path of Fresnel diffraction

从光轴上点光源 Q 发出的光可认为是发散的球面波,在到达编码孔径前表面时的复振幅分布为

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{a_0}{L} \exp(jkL) \exp\left(\frac{jk(x_0^2 + y_0^2)}{2L}\right) \quad (10)$$

式中,  $a_0$  为球面波离球心单位距离处的振幅。球面波经过编码孔径在其后表面上的复振幅分布为

$$U_{\Sigma}(x_0, y_0) = U_0(x_0, y_0) \cdot t(x_0, y_0)$$

式中,  $t(x_0, y_0)$  为编码孔径的透过率函数。如果令

$$C = \exp\left[\frac{jk(x_0^2 + y_0^2)}{2L}\right]$$

$$D = \exp\left\{\frac{jk[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}{2Z}\right\}$$

则由菲涅耳衍射公式可求得成像面上的复振幅分布:

$$U(x, y) = \frac{a_0}{j\lambda LZ} \exp[jk(L+Z)] \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} CDt(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (11)$$

对非相干成像系统有意义的是光强的点扩散函数。因为  $\exp(jkL)$  和  $\exp(jkZ)$  为常位相因子,所以由标量衍射理论计算出的系统点扩散函数 PSF 的通式为

$$\text{PSF} = \left(\frac{a_0}{j\lambda LZ}\right)^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} CDt(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right|^2 \quad (12)$$

下面确定环形编码孔径的点扩散函数。圆孔的透过率函数为

$$t(x_0, y_0) = \text{circ}\left[\frac{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}{R}\right] = \begin{cases} 1 & 0 \leq (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} \leq R \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $R$  为圆孔的半径。则像面上的复振幅分布为

$$U(x, y) = \frac{a_0}{j\lambda LZ} \exp(jkL) \cdot \exp(jkZ) \iint_{\Sigma} CD dx_0 dy_0 \quad (14)$$

式中,  $\Sigma$  代表编码孔径的面积。在  $(x_0, y_0)$  和  $(x, y)$  平面分别取极坐标  $(\rho_0, \varphi_0)$  和  $(\rho, \varphi)$ 。利用贝塞尔函数的性质和分部积分法可求出菲涅耳圆孔衍射复振幅的级数:

$$U(\rho, \varphi) = 2\pi E \frac{j\mu}{k} \exp\left(\frac{jk}{2F} R^2\right) \cdot \sum_{n=-1}^{\infty} \left(-\frac{jk}{2F} R^2\right)^n \frac{2^n J_n(\nu R)}{(\nu R)^n} \quad (15)$$

式中,

$$E = \frac{a_0}{j\lambda LZ} \exp\left[jk\left(L+Z+\frac{\rho^2}{2Z}\right)\right]$$

$$F = \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{Z}\right)^{-1}$$

$$\nu = k\rho/Z$$

设环形编码孔径的两圆半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ), 根据巴比涅原理可求得  $U(l, \varphi)$  的振幅解析表达式:

$$U(\rho, \varphi) = 2\pi E \frac{jF}{k} B_1 \exp\left(\frac{jk}{2F} r_1^2 + \beta_1\right) - 2\pi E \cdot \frac{jF}{k} B_2 \exp\left(\frac{jk}{2F} r_2^2 + \beta_2\right) \quad (16)$$

式中,  $B_1$  和  $\beta_1$  分别是复数  $\sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{jk}{2F} r_1^2\right)^m \cdot \frac{2^n J_n(\nu r_1)}{(\nu r_1)^n}$  的模与复角;  $B_2$  和  $\beta_2$  分别是复数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{jk}{2F} r_2^2\right)^n \cdot \frac{2^n J_n(\nu r_2)}{(\nu r_2)^n}$  的模与复角。若令  $B \exp(j\beta) =$

$$B_1 \exp\left(\frac{jk}{2F} r_1^2 + \beta_1\right) - B_2 \exp\left(\frac{jk}{2F} r_2^2 + \beta_2\right)$$

则振幅:

$$U(\rho, \varphi) = 2\pi E \frac{jF}{k} B \exp(j\beta) \quad (17)$$

因此, 环形编码孔径的点扩散函数为

$$h(\rho, \varphi) = B^2 \left[\frac{a_0}{L+Z}\right]^2 \quad (18)$$

#### 4 计算机模拟成像实验结果

图 3 的原始目标图像是人工制作的, 原始图像通过环形编码孔径所成的重叠像见图 4 所示。利用

快速傅立叶变换(FFT)得到编码像的频谱分布,用本文介绍的积分法确定编码孔径的点扩散函数(见图5所示)。点扩散函数经傅里叶变换后即可得到该系统的调制传递函数  $H(u, \nu)$ ,以此来设计和优化 Wiener 滤波器<sup>[3]</sup>。设计的关键问题是选择合适的因子,使处理结果尽可能趋于最佳。最后利用

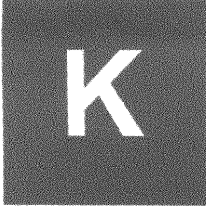


图3 原始图像  
Fig. 3 Raw image



图4 编码图像  
Fig. 4 Coded image

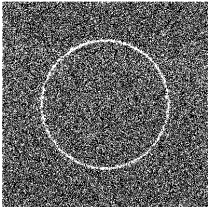


图5 计算所得的点扩散函数  
Fig. 5 Point spread function obtained by calculation

Wiener 滤波函数对编码重叠像的频谱分布进行滤波处理,再经过逆傅里叶变换便可得到重构出来的原目标像(见图6所示)。

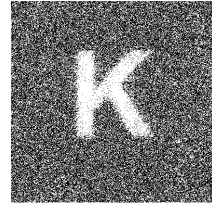


图6 解码图像  
Fig. 6 Decoded image

从上述结果可以看出,环形编码孔径成像方案可行,利用积分法推导出的点扩散函数及图像重构算法正确,成像效果很好。

### 3 结论

本文基于标量衍射理论,从理论上推导出了考虑衍射效应条件下的编码孔径中圆环的点扩散函数,并应用之制作了该光学系统的滤波器,从而对编码图像进行了重构处理,得到了重构图像。

#### 参考文献:

[1] Ress D, Ciario D R. A ring coded aperture microscope for high resolution imaging of high-energy X-rays[J]. Rev Sci Instrum, 1992, 63(10): 5086 - 5088.

[2] 胡家升,董已芝,赵宝庆,等. X光编码孔径成像和处理技术[J]. 光学学报,1989,9(7),623-629.

[3] 谢存,胡家升,程丽红,等. 光电成像中的一种编码方法[J]. 光电子·激光,2001,12(10):1064-1067.