

文章编号: 1002-2082(2008)03-0418-06

# 阿达玛变换在激光告警技术中的应用

王建宏, 王志斌, 张记龙

(中北大学 仪器科学与动态测试教育部重点实验室, 山西 太原 030051)

**摘要:** 系统信噪比一直是制约激光探测武器性能的关键性因素之一。为提高系统探测信噪比, 利用阿达玛变换方法, 在计算模板大小(17.48×17.48 mm)和码元数 $N=255$ 的基础上, 详细介绍了 $S_n$ 循环矩阵的生成, 最后选择液晶空间光调制器充当编码模板。通过在液晶面板上不同位置施加不同的电压, 利用旋光效应对通过的激光衍射条纹进行控制, 按其通过与否(1/0)进行编码。在这一方法指导下进行了系统的仿真实验研究并获得成功。实验结果表明: 将阿达玛变换应用于激光光谱测量, 在不增加测量次数的情况下, 可以有效地提高系统的信噪比。

**关键词:** Hadamard 矩阵;  $S_n$  循环矩阵; 编码模板; 阿达玛变换

中图分类号: TN247

文献标志码: A

## Application of Hadamard transform in laser alarm technology

WANG Jian-hong, WANG Zhi-bin, ZHANG Ji-long

(Key Laboratory of Instrumentation Science & Dynamic Measurement

Sponsored by Ministry of Education, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** The signal-to-noise ratio (SNR) is always a key factor to limit the development of passive laser detection system. In order to improve the SNR of the system with Hadamard transform, the formation of  $S_n$  circular matrix is introduced, and SLM served as the coding templet was selected based on the calculation of the appropriate coding templet size(17.48 mm×17.48 mm) and code symbol number ( $N=255$ ). By applying different voltages on different locations of the templet, the transmitting laser diffracted stripes are controlled by magnetic rotation effect, and coded according to if they have passed through or not. The simulated experiment for the system proved that this method is successful. The experiment result indicates that the SNR can be improved effectively without increasing the times of measurement if the Hadamard transform is applied to the measurement of the laser spectrum.

**Key words:** Hadamard matrix;  $S_n$  cyclic matrix; coding templet, Hadamard transform

## 引言

随着光电对抗技术的发展, 激光制导技术获得了长足的进步。在现代战争中, 激光制导武器表现出了极高的命中率, 因而备受各国重视。为了对付目前战场上威胁日益严重的激光制导武器, 发展激

光告警技术迫在眉睫。但是, 目前激光告警系统普遍存在信噪比低、虚警率高等问题。在强背景光中提取微弱的来袭激光信号非常困难。为了克服激光告警系统低信噪比的困难, 本文基于阿达玛变换原理, 设计了编码模板, 并进行了仿真和实验研究。结

收稿日期: 2007-10-22; 修回日期: 2007-11-28

基金项目: 国家自然科学基金(60572019, 60378019); 山西省青年科技研究基金(2007021019)

作者简介: 王建宏(1979-), 男, 山西阳泉人, 硕士, 主要从事激光光谱检测方面的研究工作。

E-mail: paohuo1@tom.com

果表明,该方法可以较大幅度提高系统信噪比。

## 1 基本设想方案

设计方案原理如图1所示。

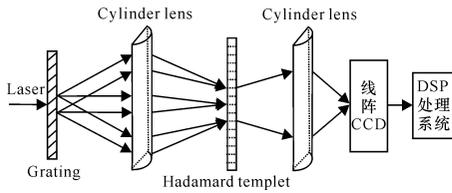


图1 来袭激光探测系统原理图

Fig. 1 Principle of detection system for invading laser

来袭激光经过光栅形成衍射条纹,经过柱面透镜会聚到阿达玛模板上,部分光透过阿达玛模板经柱面透镜会聚到 CCD 线阵探测器上,由探测器读出光强值,最后可得到相应的光强分布数学模型。

当不同波长激光来袭时,透过光栅及柱面镜照射在面板上的激光光谱(主要是 $\pm 1$ 级)位置不同,透过的光强也不同。建立坐标系,横轴为波长,纵轴为光强,计算 CCD 所收集到的总光强,进而得到各波长所对应的强度,然后返回读取最大光强所对应的波长值,即为来袭激光的波长。

## 2 基于阿达玛变换原理的信噪比增强理论

阿达玛变换的实质是用组合测量的办法代替单个测量。设误差 $\epsilon$ 与被测物理量无关,各次测量统计独立,均值为零。误差的平方是非负值,它的均值用 $\sigma^2$ 表示。设对 $n$ 个待测物的同一物理量进行测量。现将单个测量与组合测量比较如下:

### 1) 单个测量

对 $n$ 个待测物理量,测量 $m$ 次,有关系式:

$$y_{ij} = x_i + \epsilon_{ij}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

式中: $x_i$ 为第 $i$ 个待测物的真实值; $y_{ij}$ 和 $\epsilon_{ij}$ 分别为第 $i$ 个待测物第 $j$ 次测量的测量值和误差。

第 $i$ 个待测物的测量误差的均值与方差如下:

$$E(\epsilon_i) = \frac{\sum_{j=1}^m \epsilon_{ij}}{m} = 0$$

$$D(\epsilon_i) = E(\epsilon_i^2) - [E(\epsilon_i)]^2 = \frac{\sum_{j=1}^m \epsilon_{ij}^2}{m} - 0 = \sigma^2$$

式中 $\sigma$ 为误差的标准偏差。

### 2) 组合测量

对上述 $n$ 个待测物理量进行方向不同的测量,如正电压的测量。对第 $i$ 个组合测量也进行 $m$ 次测量求取平均测量值与平均误差。设计的 $n$ 个组合方法有如下要求:用+1代表正方向测量,-1代表负方向测量,由其组成的矩阵每两行或每两列相乘后的和数必为0,各行或各列之间彼此正交,即按阿达玛矩阵排列。得到的方程组如下:

$$\begin{cases} y_{1j}' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n + \epsilon_{1j} \\ y_{2j}' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_n + \epsilon_{2j} \\ \vdots \\ y_{ij}' = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \dots + x_n + \epsilon_{ij} \\ y_{nj}' = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + \dots + x_n + \epsilon_{nj} \end{cases}$$

于是可得:

$$y_1' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n + \epsilon_1$$

$$y_2' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_n + \epsilon_2$$

⋮

$$y_i' = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \dots + x_n + \epsilon_i$$

$$y_n' = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + \dots + x_n + \epsilon_n$$

式中: $y_i'$ 为第 $i$ 个组合测量时 $m$ 次测量后的平均值; $x_i$ 仍为待测量的真值; $\epsilon_i$ 为第 $i$ 个组合测量时进行 $m$ 次测量后的平均误差。

解上述方程,可得:

$$x_1 = \frac{1}{n}(y_1' + y_2' + y_3' + \dots + y_n') + \frac{1}{n}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{n}(y_1' - y_2' + y_3' + \dots + y_n') + \frac{1}{n}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

$$x_i = \frac{1}{n}(y_1' + y_2' - y_3' + \dots + y_n') + \frac{1}{n}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

$$x_n = \frac{1}{n}(y_1' - y_2' - y_3' + \dots + y_n') + \frac{1}{n}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

设 $\epsilon_i'$ 为第 $i$ 个被测物理量的估计值与真实值之差,则有:

$$\epsilon_1' = \frac{1}{n}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

$$\epsilon_2' = \frac{1}{n}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

⋮

$$\epsilon_i' = \frac{1}{n}(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

⋮

$$\epsilon_n' = \frac{1}{n}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

于是:

$$\sigma_i^2 = D(\epsilon_i') = E\left[\frac{1}{n^2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)^2\right]$$

因为每组每次测量统计独立,所以上式可写为

$$\sigma_i^2 = \frac{4}{(n+1)^2} [E(\epsilon_1^2) + E(\epsilon_2^2) + E(\epsilon_3^2) + \dots + E(\epsilon_n^2)]$$

根据单个测量中每组测量有  $E(\epsilon_i^2) = \sigma^2$ ,则上式可表述为

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sigma^2$$

上式说明组合测量比单个测量误差的标准差有所降低,  $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma$ 。当测量个数  $n$  很大时,其测量信噪比优势非常明显。

阿达玛矩阵实为由  $-1$ 、 $+1$  按任两行或列在正交前提下排列组合成  $n \times n$  阶的矩阵,每个测量物通过不同组合进行了  $n$  次测量,所以方差经过组合测量后降为单个测量的  $1/n$ ,标准差降为单个测量的  $1/\sqrt{n}$ 。

对阿达玛矩阵衍生的  $S_n$  矩阵从物理意义上理解,它由  $0, 1$  元素组成( $0$  代表不测量这个物理量, $1$  代表测量这个物理量)。从矩阵角度理解, $S_n$  矩阵为阿达玛矩阵去掉第一行第一列后所得矩阵中将  $+1$  换为  $0$ ,  $-1$  换为  $1$  所得到的矩阵,在矩阵每行中共有  $(n+1)/2$  个值为  $1$  的码元。

同理,按  $S_n$  矩阵组合方式进行测量,每一个测量物  $x_i$  共出现  $(n+1)/2$  次。则其估计值与真实值之差  $\epsilon''_i$  为

$$\epsilon''_i = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n)$$

方差为

$$\sigma_i^2 = \frac{4}{(n+1)^2} [E(\epsilon_1^2) + E(\epsilon_2^2) + E(\epsilon_3^2) + \dots + E(\epsilon_n^2)] = \frac{4n}{(n+1)^2} \sigma^2$$

即在组合测量中每个被测物的标准差与单个测量测量时有关系式  $\sigma_i = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \sigma$ 。

在光学领域中,为了达到光强采集的稳定性、可操作性和软件程序的实现,常将  $S_n$  矩阵某些行或列互换,达到第  $i+1$  行为第  $i$  行左移一位(空出的第一个元素补到最后)的效果。所得到的这一矩阵称为  $S_n$  循环矩阵。在  $S_n$  循环矩阵中,同样符合  $\sigma_i$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \sigma \text{ 的结论。}$$

光谱测量中的组合技术是在给定波长范围后,将有限光谱分成  $N$  等份,然后将光投向不同组合的透光或不透光狭缝模板,获取不同光强,最后计算出光强最大值对应于哪一等份,即对应哪个光谱的波长。对于光谱的探测(由单狭缝探测到多狭缝探测),光通量大大增强,在噪声的增加不如信号的均方根增加快的前提条件下,Hadamard 变换方法的信噪比优势非常明显。在应用中,应使波长等分段尽量小(检测越精确),所以理论上  $N$  取值越大越好。但实际应用中,受测量仪器及技术的限制, $N$  不可能无限制地增大。

本文从系统实用性考虑,借助阿达玛矩阵推导出循环  $S_n$  矩阵,避免了一维模板由电机带动产生的不良反映,将多个一维狭缝模板组合在同一张二维编码模板上,在很短时间内即可获取该激光的波长信息。

### 3 编码模板的计算

#### 3.1 编码模板

##### 3.1.1 阿达玛模板的选择

阿达玛模板是整个实验方案的灵魂,在本研究课题中,要求瞬态捕获来袭激光,并在尽可能短的时间内做出响应,所以采用液晶空间光调制器实现微弱激光信号的瞬态测量。

液晶空间光调制器(SLM)又称光学快门阵列(OSAs),它将液晶层作为光调制材料,液晶层采用向列型液晶的混合场效应工作模式。在晶层各区域施加不同的电场,可以引起液晶分子排列方向和位置的变化,从而导致其光学性质的变化,获得透明或不透明  $2$  种状态,以实现对光信号的调制。SLM 由多个集成电路控制单元组成,以电信号来控制每个单元的  $1$  或  $0$  状态。通过计算机指令,一个 SLM 指令就能产生所有的阿达玛模板编码阵列,这意味着模板不用移动,克服了移动式机械模板的传动误差和震动等缺陷,使每次编码采样完全在相同的条件下进行,而且其编码采样时间大大缩短。液晶面板的具体控制和计算机显示器一样,由图像显示命令执行 SLM 指令,且易于操作。

##### 3.1.2 编码要求

要使编码模板能够实现正确的编码和解码,编码排列必须满足以下条件: 1) 要求各编码排列之间线性无关; 2) 要使编码效果理想,码元应选  $0$  或  $1$ ,即透光或者不透光; 3) 为了获得优化的信噪比和探测器的动态响应特性,通常每一编码排列

中,透光元数和不透光元数相当;4) 编码排列中各透光和不透光码元应按二元伪随机序列码的顺序排列。由于阿达玛变换光谱仪的编码模板是由许多透光和不透光的单元按 $S_n$ 循环码的方式排列构成的,所以需要计算 $S_n$ 循环矩阵。

### 3.2 $N$ 的计算

由于待探测激光波长在 $400\text{ nm}\sim 1\ 100\text{ nm}$ 之间,要求光谱分辨率为 $10\text{ nm}$ ,则最少要有 $70$ 个确定的波长通过阿达玛光谱仪,以确定其光强。所以在生成阿达玛矩阵时,第一行至少应有 $70$ 个码元(0或1的总个数),即应有 $N > 70$ ;如果 $N < 70$ ,则在测量所得到的方程组中,未知数多于方程数,其解不唯一。

理论上 $N$ 值越大越好,实际中受阿达玛模板大小及凸透镜聚焦情况(聚焦光粗细不能超过相邻2狭缝间宽)的限制,不可能很大。

实验中采集光栅 $0, \pm 1$ 级衍射条纹时,由于要求测量的最大波长为 $1\ 100\text{ nm}$ ,所以模板要覆盖的范围为 $-1\ 100\text{ nm}\sim 0\sim 1\ 100\text{ nm}$ ,同时又要保证 $10\text{ nm}$ 的光谱分辨率,即每 $10\text{ nm}$ 对应一个码元,并且码元数必为 $2^n - 1$ 个。综合考虑可得 $N$ 的最小值为 $N = 255$ ,系统信噪比可提高 $(N + 1) / 2N^{1/2} = 8.01$ 。

### 3.3 根据编解码要求生成 $S_n$ 循环矩阵

根据上述分析,采用平方余数法生成循环 $S_n$ 矩阵。首先生成一个平方数序列: $1, 4, 9, 16, \dots, N^2$ ,令 $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ 是上述平方数序列除以 $N$ 的余数,其值总是基于中心位置且呈对称现象,即 $a_i = a_{(n+1-i)}$ 。其值等于 $S_n$ 循环矩阵第一行所对应值为1的元素位置。设循环 $S_n$ 矩阵的第一行元素依次为 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_j, \dots, S_{N-1}$ ,则矩阵中 $S_0, S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_n}$ 为1,且 $S_{a_i} = S_{a_{(n+1-i)}}$ ,其余为0。在本课题中, $N$ 取 $255$ ,则平方数序列为 $1, 4, 9, \dots, 255^2$ 。该平方数序列每个元素除以 $255$ 所得余数为 $1, 4, 9, \dots, 248, 249, 253$ 。在矩阵第一行中第一个元素即 $S_0$ 定义为1;第2个元素 $S_1 = S_{a_1}$ 为1;第 $4+1$ 个元素 $S_4 = S_{a_2}$ 为1, ..., 第 $253+1$ 个元素为 $S_{220} = S_{a_{221}} = S_{a_1} = 1$ ,其余全为0。模版的第一行为 $[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 1\ 0]$

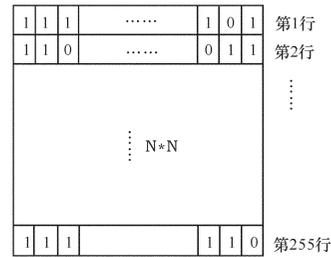
而第二行为第一行各元素向左平移一位,余出的一位补在最后空出的地方。

$$[1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \dots\ 0\ 1\ 0\ 1]$$

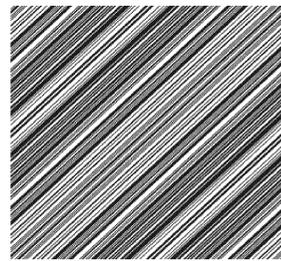
其余各行与上面类似。在模版设计的矩阵中,1代表在模版上进行采集,0代表在模版上不进行

采集。

具体排列方法如图2(a)所示。在空间光调制器的液晶面板上各区域对应于各码元,在码元为1处形成白屏(光可通过);在码元为0处形成黑屏(光不可通过)。



(a) 液晶面板( $S_n$ 循环矩阵码元排列)



(b)  $N=255$ 时所生成的阿达玛模板图

图2 空间光调制器的模板生成

Fig. 2 Templet formation of SLM

按照以上所生成 $S$ 循环矩阵,由Matlab生成的模版图如图2(b)所示。

当激光入射时,可在模板上得到零级、 $\pm 1$ 级光谱。激光经过白色狭缝时,有一定光通过,而照射在黑色狭缝处无光通过。各波长对应的光强计算过程如下:设 $y_i$ 为CCD收集到的第 $i$ 行总光强, $I_{\lambda_i}$ 为各个对应波长的光强。由 $S_n$ 循环矩阵可得下列方程:

$$y_1 = I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + I_{\lambda_3} + \dots + I_{\lambda_{250}} + I_{\lambda_{254}}$$

$$y_2 = I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + \dots + I_{\lambda_{253}} + I_{\lambda_{255}}$$

.....

$$y_{255} = I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + \dots + I_{\lambda_{251}} + I_{\lambda_{255}}$$

255个未知数,255个方程,因为 $S_n$ 矩阵为一左循环矩阵,且各行列码元符合线性无关条件,所以,以上所形成的矩阵及其增广矩阵的秩相等且为满秩,其有解且唯一。解此方程组得到各个光的强度值 $I_{\lambda_i}$ 。每个解表示不同波长对应的光强值,寻找最大值,则其所对应的波长就被测激光的波长。

### 3.4 模板尺寸的计算

阿达玛模版的尺寸与光栅常数和柱面镜焦距

有关,取光栅常数  $d = 1/300$ ,柱面镜焦距  $f = 25 \text{ mm}$ ,计算在此情况下的模板大小,如图 3 所示。

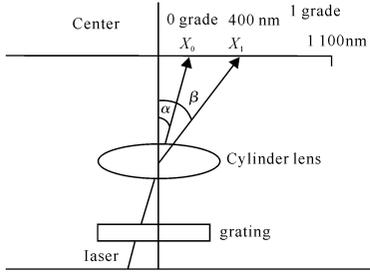


图 3 光谱分布图

Fig. 3 Spectrum distribution

为保证  $10 \text{ nm}$  的分辨率,即必须保证  $400 \text{ nm}$  到  $1100 \text{ nm}$  之间 70 个编码个数。根据激光波长与选用光栅及柱面镜之间的关系:

$$\begin{cases} x_0 = f \tan \alpha \\ x_1 = f \tan \beta \\ d(\sin \beta \pm \sin \alpha) = k\lambda \end{cases}$$

方程中:  $\alpha$  为激光入射角(此实验中因激光垂直入射,  $\alpha = 0$ );  $f$  为柱面镜焦距;  $d$  为光栅常数;  $\beta$  为  $\pm 1$  级干涉条纹与中心点的偏向角;  $k = 1$ 。经计算  $1100 \text{ nm}$  1 级条纹距 0 级条纹为  $8.74 \text{ mm}$ ,则整体阿达玛模板大小应为  $17.48 \text{ mm}$ 。

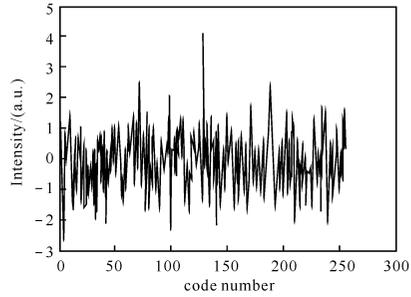
### 4 仿真结果

光电探测噪声一般有热噪声、散粒噪声、复合噪声、 $1/f$  噪声、温度噪声 5 种,根据中心极限定理,当噪声统计独立时,它们之和近似服从高斯分布( $u, \sigma^2$ )。根据文献[5]可知正弦光栅的衍射光强函数为

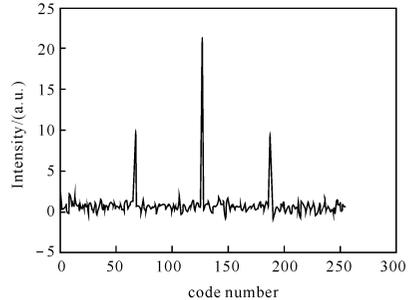
$$I(x, y) = \left(\frac{l^2}{2\lambda z}\right)^2 \sin^2\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \left\{ \sin^2\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \cdot \sin^2\left[\frac{1}{\lambda z}(x - f_0\lambda z)\right] + \frac{m^2}{4} \sin^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x + f_0\lambda z)\right] \right\} \quad (6)$$

根据上面论述的相关参数: $l$  为光栅宽度,值为  $20 \text{ cm}$ ;  $z$  为光栅到接收屏间的距离,值为  $25 \text{ cm}$ ;  $f_0$  为柱面镜焦距,值为  $25 \text{ cm}$ 。假设入射激光波长为  $532 \text{ nm}$ ,  $m$  为衍射级数,取  $m = 1$ 。在此假定噪声服从  $n \sim N(0, 1)$ ,以  $\pm 1$  级衍射条纹光强值为信号进行原信噪比为  $\text{SNR} = \frac{I_{\pm 1}}{\sigma} = 1$  的阿达玛变换实验仿真。其中  $\sigma$  为噪声均方差,  $I_{\pm 1} = 1, I_0 = 4$ 。在 Matlab 软件中仿真了来袭激光探测系统中未进

行阿达玛变换与经过阿达玛变换时的光强分布,如图 4 所示。



(a) 未进行阿达玛变换时的光强分布图



(b) 进行阿达玛变换后的光强分布图

图 4 仿真实验结果对比图

Fig. 4 Contrast of simulated experiment results

假设探测器每  $100 \mu\text{s}$  扫描一次,虚警率为 1 次/h。结合阈值理论公式:

$$PF = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{erf}\left[\frac{\text{TNR}}{\sqrt{2}}\right] \quad (7)$$

式中: $PF$  为虚警概率;  $\text{erf}$  为误差函数;  $\text{TNR}$  为阈值和噪声均方差的比值,简称阈噪比,计算可得探测阈值为 2.19;阿达玛变换后信噪比  $\text{SNR} = 7.71$ 。可见,进行阿达玛变换后,系统信噪比有了明显的提高,前后比值提高到 7.71,与前面的计算值  $(n+1)/2n^{1/2} = 8$  非常接近。

### 5 结论

文中将阿达玛变换技术应用于激光光谱检测提高了系统信噪比,根据探测要求对  $N$  的大小进行了讨论和计算,在此基础上计算了所需编码模板的尺寸大小。详细介绍了一种易于实现且合适的编码方式——液晶空间光调制器,并依照编码要求和相似的探测数据进行了仿真实验。结果表明,选用该方法进行系统信噪比的改进是非常可行的。

另外,由于阿达玛变换仅涉及到四则运算,而

现下普遍采用的傅里叶变换(FT)涉及较为复杂的三角函数和复数运算,所以阿达玛变换的解码速度快于FT。

#### 参考文献:

- [1] 元洪兴. Hadamard 变换光谱成像技术[J]. 红外, 2005(6):12-20.  
YUAN Hong-xing. Hadamard transform spectrum imaging technique[J]. Infrared, 2005(6):12-20. (in Chinese)
- [2] WUTTIG A. RIESENBERG R. Sensitive Hadamard transform imaging spectrometer with a simple MEMS[J]. SPIE, 2003, 4881:167-178.
- [3] 贾辉,李福田. 阿达玛变换成像光谱仪编码模板的设计与制作[J]. 光电工程, 2003, 30(4):53-56.  
JIA Hui, LI Fu-tian. Design and fabrication of

encoding template for Hadamard transform imaging spectrometer [J]. Opto-Electronic Engineering, 2003, 30(4):53-56. (in Chinese)

- [4] 张忠君,周岩. 完全循环Hadamard 矩阵存在的几个必要条件[J]. 燕山大学学报, 1999, 23(4):373-374.  
ZHANG Zhong-jun, ZHOU Yan. Some necessary conditions for the complete circulant Hadamard matrices[J]. Journal of Yanshan University, 1999, 23(4):373-374. (in Chinese)
- [5] 王洵,黄克林. 正弦衍射光栅的傅里叶分析方法[J]. 石油学院学报, 2002, 22(2):74-77.  
WANG Xun, HUANG Ke-lin. Fourier's analysis method for sinusoidal grating[J]. Journal of Fushun Petroleum Institute. 2002, 22(2):74-77. (in Chinese)