第26卷第1期 数学研究与评论 Vol.26, No.1
2006年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)01-0156-05 **文献标识码**: **A**

一类裂变图的 $L\binom{0,1,2}{d,d,1}$- 标号数上界

高敏刚 [1,2], 刘家壮 [1]

(1. 山东大学数学与系统科学学院, 山东 济南 250100;
2. 中国科学院科技政策与管理研究所, 北京 100080)
(E-mail: mggao@163.com)

摘　要: 将图的标号问题由每个顶点需要一个标号的情况推广到每个顶点需要多个标号的情况, 给出裂变图的概念以及赋权图的 $L\binom{0,1,2}{d,d,1}$- 标号的概念, 给出 R- 单位球图对应裂变图的 $L\binom{0,1,2}{d,d,1}$- 标号数的一个上界.

关键词: 频率分配; R- 单位球图; $L\binom{0,1,2}{d,d,1}$- 标号; 裂变图.
MSC(2000): 05C
中图分类: O157.5

1 引 言

作为一种不可再生资源, 频率越来越紧缺, 对频率的分配也越来越困难. 频率分配问题是指对每个无线电发射台分配一个频率, 使得相互干扰的无线电发射台所分配的频率的间隔在允许的范围之内. Hale[1] 于 1980 年将此问题归结为图的 $T-$ 染色问题, T- 染色问题在过去的几十年里被广泛研究 [2,3]. Roberts[4] 于 1990 年提出在几个不同地点的无线电发射台有效地分配无线电频率, 频率用非负整数表示, 从而相近的地点分配到不同的频率 (即相差 1), 极相近的地点分配的频率至少相差 2, 从而使得这些频率不会相互干扰. Gerard J.Chang 和 David Kuo[5] 于 1996 年更精确地提出图 G 的一个 $L(2,1)$- 标号的概念. 近几年, 图的 $L(2,1)$- 标号被推广到了图的 $L(d,1)$- 标号, 图的 $L(d,1)$- 标号是指一个从顶点集 $V(G)$ 到非负整数集的函数 $f(v)$, 使得若 $d(u,v)=1$, 则 $|f(u)-f(v)|\geq d$; 若 $d(u,v)=2$, 则 $|f(u)-f(v)|\geq 1$. 图的一个 $k-L(d,1)$ 标号是图的一个 $L(d,1)$- 标号, 使得所有标号都小于等于 k 并且至少有一个达到 k. 图 G 的 $L(d,1)$- 标号数是一个使得 G 有一个 $k-L(d,1)$ 标号的最小数 k, 记作 $\lambda_d(G)$. Griggs 和 Yeh[6] 于 1992 年证明了对一般图的 $L(2,1)$- 标号问题是 NP- 完备问题. 作为推广, $L(d,1)$- 标号至少是 NP- 完备问题, 从而, 要直接给出一般图的比较好的 $L(d,1)$- 标号的困难性可想而知, 因此, 人们转而研究某类图的 $L(d,1)$- 标号数的上界, 以此来间接解决实际问题.

考虑下面的实际问题: 同一地区往往会有多个通讯公司, 不同通讯公司要从频率管理部门申请不同频率, 这些频率之间要相互区分, 而且, 这个区分越大不同通讯公司的信号相互干扰才会越小, 他们的用户手机信号才会越稳定. 这种情况我们可以抽象为图论中的每个顶点需要多个标号的问题, 对这类问题以往的研究就有一定的局限性了. 为此, 本人在文章的第二部分引入一类新图, 并将图的 $L(d,1)$- 标号推广到赋权图的 $L\binom{0,1,2}{d,d,1}$- 标号. 在文章的第三部分本人给出了

收稿日期: 2003-09-08

无 $K_{1,n}$ 图的裂变图的 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号数的一个上界，并对在标号问题中起重要作用的 R- 单位球图的裂变图给出 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号数上界.

2 基本定义

首先给出几个相关定义：

定义 2.1 设 G 是一个赋权图， $n>0, S$ 是 $V(G)$ 的一个子集，若 S 中的任意两个顶点在 G 中的距离都大于 n, 则称 S 为 G 的一个 n- 距离稳定子集.

对于每个顶点需要多个标号的问题，我们考虑将以往研究的图的每个顶点 "裂变", 使得每个顶点满足，需要几个标号就 "裂变" 成几个新的顶点，然后，我们按照一定规则给它们连边. 在此思想基础上，假设图 $G=(V,E)$ 的每个点 v_i 需要 n_i 个标号，我们引入下面的新图：

定义 2.2 图 $G=(V,E)$ 的裂变图 $G'=(V',E',W)$ 是如下定义的赋权图：

顶点集 $V'=\{v_{11},\cdots,v_{1n_1},\cdots,v_{i1},\cdots,v_{in_i},\cdots,v_{|V|1},\cdots,v_{|V|n_{|V|}}\}$,

边集 $E'=\{v_{ik}v_{jl}$: 或者 $i=j$ 和 $1\le k<l\le n_i$ 或者 $1\le i<j\le |V|, 1\le k\le n_i, 1\le l\le n_j$ 和 $v_iv_j\in E\}$,

边权

$$w(v_{ik}v_{jl})=\begin{cases}0, & i=j, 1\le k<l\le n_i\text{时},\\ 1, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

其中， $|V|$ 是图 G 的顶点数.

令 $V_i=\{v_{i1},\cdots,v_{in_i}\}, 1\le i\le |V|$, 我们会发现每个 V_i 与图 G 中的 v_i 对应，而且每个 V_i 在裂变图 G' 中的点生成子图是完全图 K_{n_i}. 我们不难想象，图 G 的每个顶点 v_i 需要 n_i 个标号的问题，就转化为了每个顶点集 V_i 需要 n_i 个标号的问题，即裂变图 $G^{'}$ 的每个顶点需要一个标号的问题.

我们将图的 $L(d,1)$- 标号推广到赋权图的 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号：

定义 2.3 图 $H=(V,E,W)$ 是赋以非负整数边权的图，对任一非负整数 d 和任给 $u,v\in V$, 图 H 的 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号是指一个顶点集 V 到非负整数集 $\{0,1,\cdots,k\}$ 的函数 $h(v)$ 使得若 $d(u,v)\le 1$, 则 $|h(u)-h(v)|\ge d$; 若 $d(u,v)=2$, 则 $|h(u)-h(v)|\ge 1$. 赋权图 H 的 $k-L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号是图 H 的一个 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号使得 $\max\{h(v): v\in V(H)\}=k$. 图 H 的 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号数是使得图 H 有一个 $k-L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号的最小数 k, 记作 $\lambda^{0,1,2}_{d,d,1}(H)$.

因为我们可以认为不带权的图边权为单位 1, 那么若赋权图的边权均为 1, 则其 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号显然就等价于 $L(d,1)$- 标号，从而赋权图的 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号是图的 $L(d,1)$- 标号的一个推广，这一点在文章第三部分的几个推论中也有所体现.

定义 2.4 无 $K_{1,n}$ 图 G 是这样一个图，它不含点导出子图 $K_{1,n}(n\ge 3)$. 无 $K_{1,3}$- 图也称无爪图.

定义 2.5[4,8] 一个图被称为 R- 单位球图，对在 R- 维空间中分布的一些点，若其中两个点在 R- 维欧氏空间中的欧式距离至多为 1, 则它们之间有一条边，记作 G_R.

除以上定义之外的所有概念均参考文献 [7].

3 R- 单位球图的裂变图的 $L(^{0,1,2}_{d,d,1})$- 标号数上界

若我们记有 p 个点而不含禁用子图 F 的一个图 H 中最多能够含有的边的数目为 $ex(p,F)$,

则有

引理 3.1[9] 对所有 $p \geq n, ex(p,K_n) = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + C_r^2$, 这里 $p \equiv r(\mathrm{mod}(n-1))$ 且 $0 \leq r \leq n-1$.

定理 3.1 对最大度为 Δ 的任一无 $K_{1,n}(n \geq 3)$ 简单图 G, 其裂变图 G' 满足

$$\lambda_{d,d,1}^{0,1,2}(G') \leq \frac{(n-2)}{(n-1)} n_0 \Delta^2 + dn_0\Delta + d(n_0-1),$$

其中, $n_0 = \max_{1 \leq i \leq |V(G)|} n_i$.

证明 考虑如下标号方案: 开始时裂变图 G' 的所有顶点未得到标号, 令 $S_{-d+1} = S_{-d+2} = \cdots = S_{-1} = \emptyset$. $F_0 = V(G')$, 对 $i = 1, 2, \cdots$, 当 $S_{i-d+1}, S_{i-d+2}, \cdots, S_{i-1}$ 确定且还有未标号的顶点时, 令

$$F_i = \{v \in V(G') : v \text{ 未标号且对所有的 } u \in \bigcup_{i-d+1}^{i-1} S_j, d(u,v) \geq 2\}.$$

选取 F_i 的极大 2- 距离稳定子集 S_i, 即 S_i 是 F_i 的 2- 距离稳定子集但 S_i 不是 F_i 的任何 2- 距离稳定子集的真子集, 注意若 $F_i = \emptyset$, 即对任意的未标号顶点 v_{hl}, 存在某个顶点 $u \in \bigcup_{i-d+1}^{i-1} S_j$, 使得 $d(u, v_{hl}) < 2$, 则 $S_i = \emptyset$. 无论 $F_i = \emptyset$ 与否, 标记 S_i 中的顶点为 i, 然后 $i = i+1$, 直到所有的顶点得到标号. 假设 k 是所用到的最大标号并选取一个标号为 k 的顶点 v_{hl}, 令

$$I_1 = \{i : 0 \leq i \leq k-1 \text{ 且对某个 } u \in S_i, d(u, v_{hl}) \leq 1\},$$

$$I_2 = \{i : 0 \leq i \leq k-1 \text{ 且对某个 } u \in S_i, d(u, v_{hl}) \leq 2\},$$

$$I_3 = \{i : 0 \leq i \leq k-1 \text{ 且对所有 } u \in S_i, d(u, v_{hl}) \geq 3\},$$

则有 $|I_2| + |I_3| = k$.

下面我们首先考虑无 $K_{1,n}(n \geq 3)$ 图 G 的结构, 令 G 的某个顶点 v_h 的度为 p, 则有 $p \leq \Delta$. 对于顶点 v_h, 与 v_h 距离为 1 的点的个数小于等于 Δ; 而对与 v_h 距离为 2 的点的个数, 我们分析如下:

G 为一个无 $K_{1,n}(n \geq 3)$ 简单图, 则 G 的由顶点 v_h 的所有邻点的点导出子图 H 不含有 $\overline{K_n}$, 故 $\overline{H}$ 不含有 K_n. 由引理 3.1, 我们有 $ex(p, K_n) = \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + C_r^2$, 这里 $p \equiv r(\mathrm{mod}(n-1))$ 且 $0 \leq r < n-1$, 对所有的 $0 \leq p \leq \Delta, n \geq 3, r$ 是一个 p 的函数, 我们有 $\varepsilon(\overline{H}) \leq \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} + C_r^2$. 故而有 $\varepsilon(H) \geq C_p^2 - \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} - C_r^2$.

H 中每有一边, 相应地与顶点 v_h 距离为 2 的顶点数目就要减少 2. 在裂变图 G' 中考虑顶点 v_{hl}, 与顶点 v_{hl} 距离小于等于 1 的点的个数至多为 $(\Delta+1)n_0 - 1$, 而与之距离为 2 的顶点个数至多为

$$\begin{aligned} f(p) &= p(\Delta-1)n_0 - 2(C_p^2 - \frac{(n-2)(p^2-r^2)}{2(n-1)} - C_r^2)n_0 \\ &= -\frac{1}{(n-1)}p^2 n_0 + pn_0\Delta + \frac{1}{n-1}r^2 n_0 - rn_0. \end{aligned}$$

令 $g(r)=\dfrac{1}{(n-1)}(r)^2-r$, 由二次函数的性质，关于 r 的二次函数 $g(r)$ 在 $r=\frac{n-1}{2}$ 达到其最小值，在其边界 $r=0$ 达到其最大值且 $g(0)=0$. 故有 $g(r)\le 0$, 则

$$f(p)\le h(p)=-\frac{1}{(n-1)}p^2n_0+pn_0\Delta.$$

对 $0\le p\le\Delta, n\le 3$, 令 $h'(p)=0$, 我们有 $p=\frac{n-1}{2}\Delta$, 二次函数 $h(p)$ 在 $p=\Delta$ 处达到最大值且 $h(\Delta)=\frac{(n-2)}{(n-1)}n_0\Delta^2$. 故有 $f(p)\le h(p)\le\frac{(n-2)}{(n-1)}n_0\Delta^2$. 从而

$$|I_1|\le(\Delta+1)n_0-1, |I_2|\le\frac{(n-2)}{(n-1)}n_0\Delta^2+(\Delta+1)n_0-1.$$

任给 $i\in I_3, v_{hl}\bar{\in}F_i$, 否则 $S_i\cup v_{hl}$ 是 F_i 的 2- 距离稳定子集，这与 S_i 的选取矛盾．即存在 $\bigcup_{i-d+1}^{i-1}S_j$ 中的某个顶点 u, 有 $d(u,v_{hl})\le 1$, 也就是存在 j, 满足 $i-d+1\le j\le i-1$, 使得 $j\in I_1$, 通过 i 到这样的一个 j 的映射，从而定义了一个从 I_3 到 I_1 的函数，则每个 $j\in I_1$ 是 I_3 中至多 $d-1$ 个元素的像，这意味着 $|I_3|\le(d-1)|I_1|$, 故而

$$\lambda_{d,d,1}^{0,1,2}(G^{'})\le k=|I_2|+|I_3|\le\frac{(n-2)}{(n-1)}n_0\Delta^2+dn_0\Delta+d(n_0-1).$$

推论 3.1 对最大度为 Δ 的任一无 $K_{1,n}(n\ge 3)$ 简单图 G, 其 $L(d,1)$- 标号数满足

$$\lambda_d(G)\le\frac{(n-2)}{(n-1)}\Delta^2+d\Delta.$$

证明 因为图 G 的裂变图的 $L_{d,d,1}^{(0,1,2)}$- 标号是图 G 的 $L(d,1)-$ 标号的推广，由定理 3.1, 令 $n_0=1$

$$\lambda_d(G)\le\frac{(n-2)}{(n-1)}\Delta^2+d\Delta.$$

推论 3.2 对最大度为 Δ 的任一无爪简单图 G, 其裂变图 G' 满足

$$\lambda_{d,d,1}^{0,1,2}(G')\le\frac{1}{2}n_0\Delta^2+dn_0\Delta+d(n_0-1).$$

证明 由定理 3.1, 当 $n=3$ 时，结论显然成立．

图 G 的线图记作 $L(G)$, 它的顶点是 G 的边．当相应的 G 的边相邻时， $L(G)$ 的两个顶点相邻．一个图 G 是一个线图，若它同构于某个图 H 的线图 $L(H)$, 由 [9], 线图是无爪图，故有

推论 3.3 对最大度为 Δ 的简单线图 G, 其裂变图 G' 满足

$$\lambda_{d,d,1}^{0,1,2}(G')\le\frac{1}{2}n_0\Delta^2+dn_0\Delta+d(n_0-1).$$

[4,8] 中指出：在频率分配问题中，单位间歇图及其推广即 R- 单位球图有着特别重要的意义．当无线电发射台位于 R- 单位球图中 (R =1,2 或 3) 时，当且仅当两个发射台的距离小于 m 英里时，它们之间发生干扰．在这种情况下，其干扰图即为 R- 单位球图．

对部分 R,[8] 给出了 R- 单位球图的 $L(2,1)$- 标号数的上界．

引理 3.2[10] (球装定理) 在 3- 维空间中，围着一个半径为 1 的球，至多可以放 12 个半径为 1 的球，剩下的空间不能放进第 13 个半径为 1 的球．

令 R- 单位球图的体积为 $V(R)$, 沿以 R- 维单位球的球心 o 所对应的 R- 维正单纯形延伸至 R- 维单位球的球面所围成的体积为 $V_1(R), n(R)=\lceil\frac{V(R)}{V_1(R)}\rceil$, 则有

定理 3.2 对最大度为 Δ 的 R- 单位球图 $G_R(R\geq 2)$, 其裂变图 G'_R 有满足

$$\lambda_{d,d,1}^{0,1,2}(G_R^{'})\leq\frac{(n(R)-2)}{(n(R)-1)}n_0\Delta^2+dn_0\Delta+d(n_0-1).$$

证明 由 [8],R- 单位球图 $G_R(R\geq 2)$ 为无 $K_{1,n(R)}$ 图，再由定理 3.1, 对最大度为 Δ 的 R-单位球图 $G_R(R\geq 2)$, 有

$$\lambda_{d,d,1}^{0,1,2}(G'_R)\leq\frac{(n(R)-2)}{(n(R)-1)}n_0\Delta^2+dn_0\Delta+d(n_0-1).$$

推论 3.4 对最大度为 Δ 的 R- 单位球图 $G_R(R\geq 2)$, 其 $L(d,1)$- 标号数满足

$$\lambda_d(G)\leq\frac{(n(R)-2)}{(n(R)-1)}\Delta^2+d\Delta.$$

推论 3.5 对最大度为 Δ 的 2- 单位球图 G_2, 其裂变图 G'_2 满足

$$\lambda_{d,d,1}^{0,1,2}(G_2^{'})\leq\frac{4}{5}n_0\Delta^2+dn_0\Delta+dn_0-d.$$

参考文献:

[1] HALE W K. *Frequency assignment: Theory and Applications* [A]. Proc. IEEE, 1980, **68**: 1497–1514.
[2] COZZENS M B, ROBERTS F S. *T-colorings of Graphs and the Chanel Assignment Problem* [J]. Congr. Numer, 1982, **35**: 191–208.
[3] CHANG G J, KE Wen-Tsai, KUO D. et al. *On L(d,1)-labelings of graphs* [J]. Discrete Math., 2000, **220**: 57–66.
[4] ROBERTS F S. *T-colorings of graphs: recent results and open problems* [J]. Discrete Math., 1991, **7**: 133–140.
[5] CHANG G J, KUO D. *The $L(2,1)$-labeling problem on graphs* [J]. SIAM J. Discrete Math., 1996, **2**: 309–316.
[6] GRIGGS J R, YEH R K. *Labeling graphs with a condition at distance 2* [J]. SIAM J. Discrete Math., 1992, **5**: 596–595.
[7] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. The Macmil Press, LTD, 1976.
[8] SAKAI D. *Labeling chordal graphs: distance two condition* [J]. SIAM J. Discrete Math., 1994, **7**: 133–140.
[9] HARARY *Graph Theory* [M]. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
[10] CHEN Xing-shen. *The mathematics in china* [J]. Adv. Math., 1996, **10**: 1–6.

Upper Bound of $L_{d,d,1}^{0,1,2}$)-Labeling Number of a Class of Fissile Graphs

GAO Min-gang[1,2], *LIU Jia-zhuang*[1]
(1. School of Math. & System Sci., Shandong University, Ji'nan 250100, China
2. Institute of Policy and Management, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: In this paper, we extend the result for the case where every vertex needs one label to the case where every vertex needs more labels, give the definition of the fissile graph and the definition of $L(_{d,d,1}^{0,1,2})$-labeling of the weighted graphs, and obtain an upper bound of the $L(_{d,d,1}^{0,1,2})$-labeling number of the fissile graphs of R-unit sphere graphs.

Key words: Frequency assignment; R-unit sphere graph; $L(_{d,d,1}^{0,1,2})$-labeling; fissile graph.