第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0292-07 **文献标识码**: A

具有平行平均曲率向量子流形的曲率估计与稳定性

孙弘安， 钟定兴
(赣南师范学院数学系，江西 赣州 341000)
(E-mail: hongans@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文估计空间形式中具有平行平均曲率向量子流形上共形度量的数量曲率上界，并利用其研究了具有常平均曲率超曲面的稳定性.

关键词: 平行平均曲率向量；曲率估计；强稳定性.
MSC(2000): 53C25
中图分类: O186.16

1 引 言

众所周知，空间形式中极小子流形的共形度量的曲率估计与强稳定性的研究，已取得了不少结果. 自然要问，作为极小子流形的推广，具有平行平均曲率向量子流形的情形如何？对三维空间形式中具有平均曲率向量的超曲面， [1], [2] 和 [3] 等人获得了一系列有趣的结果，它们都是极小曲面相应结果的推广.

本文研究一般的空间形式中具有平行平均曲率向量的子流形，给出了其共形度量的数量曲率上界，并利用其研究了具有常平均曲率超曲面的稳定性. 其结果是文 [4] 极小子流形相应结果的推广.

2 准备工作

设 M 是 $n+p$ 维空间形式 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行平均曲率向量的 n 维子流形，在 $N^{n+p}(c)$ 中选取局部正交标架场 $e_1,\cdots,e_{n+p}$, 使得限制在 M 上时， $e_1,\cdots,e_n$ 与 M 相切， $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 是对偶形式. 以下除特别说明外，约定指标取值范围如下：

$$1\le i,j,k,\cdots\le n,\qquad 1\le A,B,C,\cdots\le n+p,\qquad n+1\le\alpha,\beta,\gamma,\cdots\le n+p$$

且 $\sum$ 号下重复指标表示在相应范围内作和. 在 M 上有 $\omega_\alpha=0,\omega_{\alpha i}=\sum h^\alpha_{ij}\omega_j$, 和

$$d\omega_i=-\sum\omega_{ij}\wedge\omega_j,\omega_{ij}+\omega_{ji}=0, \tag{2.1}$$

$$d\omega_{ij}=-\sum\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{2.2}$$

$$d\omega_{\alpha\beta}=-\sum\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{2.3}$$

收稿日期: 2004-02-15
基金项目: 国家自然科学基金 (10261006), 江西省自然科学基金 (0511008) 和江西省教育厅科技项目.

$$R_{ijkl}=c(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\sum(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}-h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}), \tag{2.4}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=\sum(h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}-h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}), \tag{2.5}$$

其中 ω_{ij},$\omega_{\alpha i}$,$\omega_{\alpha\beta}$ 是 $N^{n+p}(c)$ 的联络 1- 形式在 M 上的限制， $B=\sum h_{ij}^{\alpha}\omega_i\omega_j e_\alpha$ 是 M 的第二基本形式， R_{ijkl} 和 $R_{\alpha\beta kl}$ 分别是 M 的曲率张量和法曲率张量的分量.

对每个 α, 用 H_α 表示矩阵 (h_{ij}^{α}),M 的平均曲率向量 $h=\frac{1}{n}\sum h_{ii}^{\alpha}e_\alpha=\frac{1}{n}\sum(T_rH_\alpha)e_\alpha$, 平均曲率 $H=\|h\|=\frac{1}{n}\sqrt{\sum(T_rH_\alpha)^2}$, 第二基本形式长度平方 $\|B\|^2=\sum T_r(H_\alpha)^2$, 令 R 表示 M 的数量曲率，则

$$R=\sum R_{ijij}=n(n-1)c+n^2H^2-\|B\|^2, \tag{2.6}$$

用 h_{ijk}^{α} 和 h_{ijkl}^{α} 分别表示 B 的一阶和二阶共变导数，则有 [9]: $h_{ijk}^{\alpha}=h_{ikj}^{\alpha}$ 和

$$\Delta h_{ij}^{\alpha}=\sum h_{ijkk}^{\alpha}=\sum h_{kl}^{\alpha}R_{lijk}+\sum h_{li}^{\alpha}R_{lkjk}-\sum h_{ki}^{\beta}R_{\alpha\beta jk}, \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)=\|\bigtriangledown B\|^2+\sum h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}, \tag{2.8}$$

其中 $\nabla,\triangle$ 分别表示 M 关于诱导度量 g 的共变导数和 Laplacian 算子.

我们需要如下引理:

引理 1[5] 设 $A_1,\cdots,A_p$ 是 p 个 n 阶对称矩阵，则

$$-\sum \mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta-A_\beta A_\alpha)^2+\sum[\mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)]^2\le[1+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(p-1)](\sum\mathrm{tr}A_\alpha^2)^2, \tag{2.9}$$

其中 sgn 是符号函数.

引理 2[6] 设 A_1,A_2 是两个 n 阶对称矩阵，若 $\mathrm{tr}A_1=\mathrm{tr}A_2=0$, 且 $A_1A_2=A_2A_1$, 则

$$|\ \mathrm{tr}(A_1^2A_2)\ |\le\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\mathrm{tr}(A_1^2)\sqrt{\mathrm{tr}(A_2^2)}, \tag{2.10}$$

下面需用如下两个命题:

命题 1 设 M 是 $N^{n+1}(c)$ 中具有平行平均曲率向量的 n 维子流形，则

$$\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)\ge\|\nabla B\|^2+n(c+H^2)\|B\|^2-n^2cH^2-[1+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(p-1)+\frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}]\|B\|^4. \tag{2.11}$$

证明 由 (2.4),(2.5),(2.7) 和 (2.8) 直接计算得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)=&\|\nabla B\|^2+nc\|B\|^2-n^2cH^2+\sum\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta-H_\beta H_\alpha)^2-\\&\sum[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2+\sum\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta,\end{aligned} \tag{2.12}$$

现在来估计 $\sum\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta$.

选取 e_{n+1} 与 h 同向，因 h 在法丛中平行，故

$$H_\alpha H_{n+1}=H_{n+1}H_\alpha, \tag{2.13}$$

且 $\mathrm{tr}H_\alpha = 0(\alpha \neq n+1)$, $\mathrm{tr}H_{n+1} = nH$.

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta &= \sum \mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_{n+1})\mathrm{tr}H_{n+1} \\ &= \sum_{\alpha\neq n+1} \mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_{n+1})\mathrm{tr}H_{n+1} + \mathrm{tr}H_{n+1}^3 \mathrm{tr}H_{n+1},\end{aligned} \tag{2.14}$$

令 $A = H_{n+1} - HI$, 其中 I 是单位矩阵，则 $\mathrm{tr}A = 0$, 且 $AH_\alpha = H_\alpha A$, 应用引理 2 得

$$|\mathrm{tr}(AH_\alpha^2)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\mathrm{tr}H_\alpha^2\sqrt{\mathrm{tr}(A^2)} \tag{2.15}$$

又因为 $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(H_{n+1}^2) - nH^2$, 故

$$\sqrt{n}H\sqrt{\mathrm{tr}(A^2)} \leq \frac{1}{2}\mathrm{tr}(H_{n+1}^2). \tag{2.16}$$

于是对 $\alpha \neq n+1$, 有

$$\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_{n+1})\mathrm{tr}H_{n+1} \geq nH^2\mathrm{tr}(H_\alpha^2) - \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}\mathrm{tr}(H_\alpha^2)\mathrm{tr}(H_{n+1}^2), \tag{2.17}$$

类似地

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^3)\mathrm{tr}H_{n+1} &\leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\mathrm{tr}(A^2)\sqrt{\mathrm{tr}(A^2)}\mathrm{tr}(H_{n+1}) \leq \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(H_{n+1}^2) \\ &= \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}[\mathrm{tr}(H_{n+1}^2) - nH^2]\mathrm{tr}(H_{n+1}^2),\end{aligned} \tag{2.18}$$

而

$$\mathrm{tr}(A^3) = \mathrm{tr}(H_{n+1}^3) - 3H\mathrm{tr}(H_{n+1}^2) + 2nH^3. \tag{2.19}$$

故

$$\mathrm{tr}(H_{n+1}^3)\mathrm{tr}H_{n+1} \geq 3nH^2\mathrm{tr}(H_{n+1}^2) - 2n^2H^4 - \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}[\mathrm{tr}(H_{n+1}^2) - nH^2]\mathrm{tr}(H_{n+1}^2), \tag{2.20}$$

将 (2.17),(2.20) 代入 (2.14) 得

$$\begin{aligned}\Sigma\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta \geq & nH^2\|B\|^2 + 2nH^2\mathrm{tr}(H_{n+1}^2) - 2nH^4 - \\ & \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}\|B\|^2\mathrm{tr}H_{n+1}^2 + \frac{n(n-2)H^2}{2\sqrt{n-1}}\mathrm{tr}(H_{n+1}^2) \\ \geq & nH^2\|B\|^2 - \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}\|B\|^4,\end{aligned} \tag{2.17}$$

将 (2.21) 代人 (2.12), 并利用引理 1 即得 (2.10). □

命题 2 设 M 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行平均曲率向量的 n 维子流形，则

$$(\nabla\|B\|^2)^2 \leq \frac{4n}{n+2}\|B\|^2\|\nabla B\|^2. \tag{2.22}$$

证明 令 $\|B_\alpha\|^2=\sum_{i,j}(h^\alpha_{ij})^2$, 从而 $\|B\|^2=\sum\|B_\alpha\|^2$. 对于任意一点 $x\in M$ 和某一固定的 α, 我们可选取局部标架场，使得在 x 有 $h^\alpha_{ij}=0(i\neq j)$, 于是

$$\begin{aligned}(\nabla\|B\|^2)^2&=4\sum_k(\sum h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ijk})^2=4\sum_k(\sum_i h^\alpha_{ii}h^\alpha_{iik})^2\\&\leq\sum_i(h^\alpha_{ii})^2\sum_{i,k}(h^\alpha_{iik})^2=4\|B_\alpha\|^2\sum_{i,k}(h^\alpha_{iik})^2,\end{aligned}\tag{2.23}$$

另一方面，注意到 $h^\alpha_{ijk}=h^\alpha_{ikj}$, 有

$$\sum(h^\alpha_{ijk})^2\geq 3\sum_{i\neq k}(h^\alpha_{iik})^2+\sum(h^\alpha_{iii})^2=2\sum_{i\neq k}(h^\alpha_{iik})^2+\sum(h^\alpha_{iik})^2,\tag{2.24}$$

对于某一固定的指标 k, 由平均曲率向量平行得

$$\sum_i(h^\alpha_{iik})^2=\sum_{i\neq k}(h^\alpha_{iik})^2+(h^\alpha_{kkk})^2\leq\sum_{i\neq k}(h^\alpha_{iik})^2+(n-1)\sum_{i\neq k}(h^\alpha_{iik})^2=n\sum_{i\neq k}(h^\alpha_{iik})^2,\tag{2.25}$$

从而

$$\sum_{i\neq k}(h^\alpha_{iik})^2\geq\frac{1}{n}\sum_i(h^\alpha_{iik})^2,\tag{2.26}$$

将 (2.26) 代入 (2.24) 得

$$\sum(h^\alpha_{ijk})^2\geq\frac{n+2}{n}\sum(h^\alpha_{iik})^2,\tag{2.27}$$

再结合 (2.23), 即有

$$(\nabla\|B\|^2)^2\leq\frac{4n}{n+2}\|B\|^2\sum(h^\alpha_{ijk})^2=\frac{4n}{n+2}\|B\|^2\|\nabla B\|^2.\tag{2.28}$$

3 曲率估计

设 M 是 $N^{n+P}(c)$ 中具有平行平均曲率向量的 n 维子流形. g 是 M 的诱导度量， R 是关于 g 的数量曲率， a 是满足下列条件的实数：当 $c\geq 0$ 时， $a\geq 1+[(n-1)(2+\mathrm{sgn}(p-1))+(n-2)\sqrt{n-1}-1]^{-1}$; 当 $c<0$ 时， $a<1-[2(n-1)(2+\mathrm{sgn}(p-1))+2(n-2)\sqrt{n-1}-1]^{-1}$. 令

$$\rho=n(n-1)ac+n^2H-R\tag{3.1}$$

则由 (2.6) 知

$$\rho=\|B\|^2+n(n-1)(a-1)c.\tag{3.2}$$

当 $c=0$ 时，总假定 M 不是全测地的，故 $\rho>0$, 这样在 M 上就可引入共形度量 $\widetilde{g}=\rho g$. 我们要给出关于度量 $\widetilde{g}$ 的数量曲率的上界估计，它可看成一个 Riemann 流形 M 能具有平行平均曲率向量浸入 $N^{n+p}(c)$ 的一种内蕴的必要条件.

定理 1 设 M 是 $N^{n+p}(c)$ 中具有平行平均曲率向量的 n 维子流形，g 是 M 的诱导度量，R 是关于 g 的数量曲率， a 是满足下列条件的实数

当 $c\geq 0$ 时， $a\geq 1+[(n-1)(2+\mathrm{sgn}(p-1))+(n-2)\sqrt{n-1}-1]^{-1}$;

当 $c<0$ 时， $a<1-[2(n-1)(2+\operatorname{sgn}(p-1))+2(n-2)\sqrt{n-1}-1]^{-1}$,
则 M 上共形度量 $\widetilde{g}=[n(n-1)ac+n^2H^2-R]g$ 的数量曲率 $\widetilde{R}$ 满足

$$\widetilde{R}\le(n-1)(2+\operatorname{sgn}(p-1))+(n-2)\sqrt{n-1}-1. \tag{3.3}$$

证明 为了方便起见，令 $\delta=(2+\operatorname{sgn}(p-1)+\frac{n-2}{\sqrt{n-1}})$, $b=n(n-1)(a-1)c$, 则由 (3.2) 知

$$\rho=\|B\|^2+b\ \ (b\ge 0). \tag{3.4}$$

如所知， $\widetilde{g}$ 的数量曲率 $\widetilde{R}$ 满足 [7]

$$\begin{aligned}\rho\widetilde{R}&=R-(n-1)\Delta\log\rho-\frac{1}{4}(n-1)(n-2)\|\nabla\log\rho\|^2\\&=R-(n-1)\frac{\triangle\rho}{\rho}-\frac{1}{4}(n-1)(n-6)\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\rho^2}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

将 (2.10) 和 (3.4) 代入 (3.5) 得

$$\begin{aligned}-\rho^2\widetilde{R}\ge&[1-(n-1)\delta]\rho^2+[2(n-1)\delta b+n(n-1)(2-a)c+\\&n(n-2)H^2]\rho-(n-1)\delta b^2-2n(n-1)(c+H^2)b-\\&2n^2(n-1)cH^2+2(n-1)\|\nabla B\|^2+\frac{1}{4}(n-1)(n-6)\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\rho^2}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

另一方面，注意到 $\rho\ge\|B\|^2$, 由命题 2 知:

$$\|\nabla B\|^2\ge\frac{n+2}{4n}\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\rho}. \tag{3.7}$$

故

$$2(n-1)\|\nabla B\|^2+\frac{1}{4}(n-1)(n-6)\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\rho}\ge\frac{n-1}{4n}(n-2)^2\frac{\|\nabla\rho\|^2}{\rho}\ge 0. \tag{3.8}$$

将 (3.8) 代入 (3.6), 得

$$-\rho^2\widetilde{R}\ge[1-(n-1)\delta]\rho^2+L(\rho), \tag{3.9}$$

其中

$$\begin{aligned}L(\rho)=&[2(n-1)\delta b+n(n-1)(2-a)c+n(n-2)H^2]\rho-\\&(n-1)\delta b^2-2n(n-1)(c+H^2)b-2n^2(n-1)cH^2.\end{aligned} \tag{3.10}$$

现证 $L(\rho)\ge 0$.

$$\begin{aligned}L'(\rho)&=2(n-1)\delta b+n(n-1)(2-a)c+n(n-2)H^2\\&=[2(n-1)\delta(a-1)+2-a]n(n-1)c+n(n-2)H^2\ge 0,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}L(nH^2+b)&=(n-1)\delta b^2-n(n-1)acb+[2(n-1)\delta b-nb+n(n-2)H^2-n(n-1)ac]nH^2\\&\ge[(n-1)\delta(a-1)-a]n(n-1)cb+[(2(n-1)\delta-n)(a-1)-a]n(n-1)c\\&\ge 0,\end{aligned} \tag{3.12}$$

而 $\rho \geq nH^2 + b$, 故 $L(\rho) \geq 0$, 再由 (3.9) 即得 (3.3). □

注 定理 1 是文 [4] (定理 1) 关于极小子流形相应结果 $\widetilde{R} \leq 2(n-1)(2-\frac{1}{p})-1$ 的推广. 当 $n=2$ 时，定理 1 优于该结果.

推论 1[3] 设 M 是 $N^3(c)$ 中具有常数平均曲率 H 的曲面， g 是诱导度量， K 是 M 关于度量 g 的高斯曲率， a 是满足下列条件的实数:

当 $c \geq 0$ 时， $a \geq 2$; 当 $c < 0$ 时， $a \leq \frac{2}{3}$.

则共形度量 $\widetilde{g} = (ac + 2H^2 - K)g$ 的高斯曲率 $\widetilde{K}$ 满足 $\widetilde{K} \leq 1$.

4 常平均曲率超曲面的强稳定性

现在，我们利用定理 1 来研究空间形式中常平均曲率超曲面的强稳定性.

设 M 是 $N^{n+1}(c)$ 中具有常平均曲率 H 的超曲面，设 $D \subset M$ 是 M 中具有紧闭包 $\overline{D}$ 的区域，且具有光滑边界 ∂D. 我们说 D 是强稳定性的 [1,2], 如果

$$I_D(f) = \int_D [\|\nabla f\|^2 - (n^2c + n^2H^2 - R)f^2]^*1 > 0 \tag{4.1}$$

对所有使 $f|_{\partial D} = 0$ 的 D 上的非负实值函数成立.

显然，若 $H = 0$, 强稳定性退化为极小子流形的稳定性.

定理 2 设 M 是 $N^{n+1}(c)$ 中具有常平均曲率 H 的超曲面， g 是 M 上的诱导度量， R 是数量曲率.

$$\widetilde{c} = \max\{n^2c, \frac{4n-6+2(n-2)\sqrt{n-1}}{4n-5+2(n-2)\sqrt{n-1}}n(n-1)c\} \tag{4.2}$$

若共形度量 $\widetilde{g} = (\tilde{c} + n^2H^2 - R)g$ 的截面曲率为常数，且对 M 上单连通区域 D 有

$$\int_D (\widetilde{c} + n^2H^2 - R)^*1_g < \frac{\omega_n}{2}[\frac{2n-3+(n-2)\sqrt{n-1}}{n(n-1)}]^{-\frac{n}{2}}, \tag{4.3}$$

其中 $\omega_n = 2\Pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$ 表示 n 维单位球面 $S^n(1) \subset R^{n+1}$ 的 n 维体积，则 D 是强稳定的.

证明 假设 D 不是强稳定的，由 (4.1), 存在函数 $f: D \to [a, +\infty), f|_{\partial D} = 0$, 使得

$$\int_D [\|\nabla f\|^2 - (n^2c + n^2H^2 - R)f^2]^*1_g \leq 0.$$

结合 (4.2) 有

$$\int_D [(\widetilde{c} + n^2H^2 - R)f^2]^*1_g \geq \int_D (\|\nabla f\|^2)^*1_g. \tag{4.4}$$

令 $\rho = \widetilde{c} + n^2H^2 - R$, 由定理假设知 $\rho > 0$, 且 M 上关于共形度量 $\tilde{g} = \rho g$ 的体积元 $*1_{\tilde{g}} = (\rho^{\frac{n}{2}})^*1_g$. 故

$$\int_D (f^2)^*1_{\widetilde{g}} = \int_D (\rho^{\frac{n}{2}} f^2)^*1_g \geq \rho^{\frac{n}{2}-1} \int_D (\|\nabla f\|^2)^*1_g = \int_D (\|\nabla f\|^2)^*1_{\tilde{g}}. \tag{4.6}$$

由特征值的极大 - 极小原理，得

$$\widetilde{\lambda}_1(D) \leq 1, \tag{4.7}$$

其中 $\widetilde{\lambda}_1(D)$ 表示 D 上关于 $\tilde{g}$ 的 Laplacian 第一 Dirichlet 特征值.

因 $\widetilde{g}$ 有常数截面曲率，若记为 $\widetilde{K}$, 则关于 $\widetilde{g}$ 的数量曲率 $\widetilde{R}=n(n-1)\widetilde{K}$, 由定理 1 得

$$\widetilde{K} \leq \frac{1}{n(n-1)}[2n-3+(n-2)\sqrt{n-1}]. \tag{4.8}$$

将 D 看作空间形式 $N^n(\tilde{K})$ 的一个区域，其诱导度量为 $\widetilde{g}$, 则由 Faber – Krahn 不等式 [8], 得

$$\widetilde{\lambda}_1(D) \geq \widetilde{\lambda}_1(\Omega), \tag{4.9}$$

Ω 是 $N^n(\widetilde{K})$ 的一个测地盘，使 Ω 的体积 $\widetilde{V}(\Omega)$ 等于 D 在 $\widetilde{g}$ 下的体积 $\tilde{V}(D)$. 再由特征值比较定理和 (4.6) 知 $\widetilde{\lambda}_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$. 这里 Ω^* 是曲率为

$$K_0=\frac{1}{n(n-1)}[2n-3+(n-2)\sqrt{n-1}] \tag{4.10}$$

的 n 维球面 $S^n(\frac{1}{K_0})$ 上的测地盘，使 Ω^* 的体积 $V(\Omega^*)=\tilde{V}(\Omega)$.

另一方面，在条件 (4.3) 下，有

$$V(\Omega^*)=\tilde{V}(D)=\int_D[(\tilde{c}+n^2H^2-R)]^*1_g<\frac{1}{2}\omega_n(\frac{1}{\sqrt{K_0}})^n. \tag{4.11}$$

这表明 Ω^* 含在 $S^n(\frac{1}{\sqrt{K_0}})$ 的闭半球面内, 后者的第一 Dirichlet 特征值等于 nK_0. 结合 (4.5),(4.6) 得

$$1 \geq \tilde{\lambda}_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*) > nK_0=\frac{1}{n-1}[2n-3+(n-2)\sqrt{n-1}] \geq 1 \tag{4.12}$$

矛盾. □

注 定理 2 是文 [4] 中定理 3 的推广.

参考文献:

[1] BARBOSA J L, DO Carmo M, ESCHENBURG J. *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds* [J]. Math. Z., 1988, **197**: 123–138.
[2] SILVERIA A M da. *Stability of complete noncompact surface with constant mean curvature* [J]. Math. Ann., 1987, **277**: 629–638.
[3] LI Hai-zhong. *Stability of surfaces with constant mean curvature* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1989, **105**: 992–997.
[4] SHEN Yi-bing. *Curvature and stability for minimal submanifolds* [J]. Sci. Sinica Ser. A, 1988, **31**: 787–797.
[5] LI A M, LI J M. *An intrisic rigidity theorem for minimal submanifolds in sphere* [J]. Arch Math., 1992, **58**(2): 582–594.
[6] SANTOS W. *Submanifold With Parallel mean curvature Vector in sphere* [J]. Tohku Math., 1994, **46**: 405–415.
[7] CHEN B Y. *Geometry of Submanifolds* [M]. Marcel Deker, Inc. 1973.
[8] CHAVEL I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry* [M]. Academic Press, 1984.
[9] YAU S T. *Submanifolds with constant mean curvature* [J]. Amer. J. Math., 1974, **96**: 346–366.

Curvature Estimation and Stability of Submanifolds with Parallel Mean Curvature Vactor

SUN Hong-an, ZHONG Ding-xing
(Dept. of Math., Gannan Teachers' College, Ganzhou 341000, China)

Abstract: In this paper, we estimate the scalar curvature of a conformal metric on a submanifold with parallel mean curvature vactor in the space form. By use of the estimation, we study the stability of the domains of hypersurfaces with constant mean curvature in the space form.

Key words: parallel mean curvature; curvature estimation; stability.