第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0750-05 **文献标识码**: **A**

无限维奇 Hamilton 模李超代数的导子

华秀英， 刘文德

(哈尔滨师范大学数学系，黑龙江 哈尔滨 150080)
(E-mail: huaxiuyingnihao@163.com)

摘 要: 本文首先确定了无限维奇 Hamilton 模李超代数的生成元集，然后确定了奇 Hamilton 模李超代数到广义 Witt 模李超代数的导子空间，进而确定了无限维奇 Hamilton 模李超代数的导子代数.

关键词: 阶化；奇 Hamilton 李超代数；导子代数.
MSC(2000): 17B50; 17B05
中图分类: O152.5

1 引言与准备

众所周知，无论是对李代数还是李超代数，(超) 导子代数的刻画都是一个重要课题. 在限制李 (超) 代数的情形，这方面的工作具有特殊的意义. 我们知道，一个 (超) 代数的 (超) 导子代数是限制李 (超) 代数，每个单李 (超) 代数均可嵌入其 (超) 导子代数中，而限制李 (超) 代数理论在有限维单的模李 (超) 代数分类中有极其重要的作用. 文献 [1, 5] 决定了 Cartan 型李代数的导子代数. 文献 [4, 6, 8] 中分别决定了有限维 Cartan 型模李超代数 $K(m,n;\underline{t}), H(m,n;\underline{t})$ 和 $W(m,n;\underline{t}), S(m,n;\underline{t})$ 的超导子代数. 文献 [3] 决定了 Cartan 型模李超代数 $HO(n,n;\underline{t})$ 的超导子代数. 而本文将研究无限维模李超代数 $HO(n,n)$ 的超导子代数.

在本文中设基域 $\mathbb{F}$ 的特征 $p\geq 3$. 本文中除下列符号、定义外，均与文献 [3] 所用符号相同. 若 x 是 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素，则用 $\mathrm{P}(x)$ 表示 x 的 $\mathbb{Z}_2$- 次数. 定义 $\mathrm{T_H}:\Lambda(n,n)\to W(n,n)$, 使得

$$\mathrm{T_H}(a):=\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{\mu(i)\mathrm{P}(a)}D_i(a)D_{i'},\quad \forall\, a\in\Lambda(n,n).$$

对任意 $a,b\in\Lambda(n,n)$, 可以验证 $[\mathrm{T_H}(a),\mathrm{T_H}(b)]=\mathrm{T_H}(\mathrm{T_H}(a)(b))$[3]. 设 $HO(n,n):=\{\mathrm{T_H}(a)\,|\,a\in\Lambda(n,n)\}$, 并令 $\overline{HO}(n,n):=\overline{HO}(n,n)_{\bar 0}+\overline{HO}(n,n)_{\bar 1}$, 其中

$$\overline{HO}(n,n)_\alpha:=\Big\{\sum_{i=1}^{2n}a_iD_i\in W(n,n)_\alpha\,\Big|\,D_i(a_{j'})=(-1)^{\mu(i)\mu(j)+(\mu(i)+\mu(j))(\alpha+\bar 1)}D_j(a_{i'}),\ i,j\in Y\Big\},$$

这里 $\alpha\in\mathbb{Z}_2$. 可以验证 $HO(n,n)$ 是 $\overline{HO}(n,n)$ 的理想 [3]. 回忆 $\Lambda(n,n)$ 和 $W(n,n)$ 具有 $\mathbb{Z}$- 阶化结构，即 $\Lambda(n,n)=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}\Lambda(n,n)_i$, 这里

$$\Lambda(n,n)_i=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^{(\alpha)}x^u\,|\,|\alpha|+||u||=i,\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^n,\,u\in\mathbb{B}(n)\}$$

收稿日期: 2005-08-01; **接收日期**: 2006-01-18
基金项目: 黑龙江省自然科学基金 (A2004-8); 黑龙江省高校骨干教师基金.

及 $W(n,n)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}W(n,n)_i$, 这里

$$W(n,n)_i=\Big\{\sum_{j=1}^{2n}a_jD_j\,\Big|\,a_j\in\Lambda(n,n)_{i+1},\,j\in Y\Big\}.$$

可以验证 $HO(n,n)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}HO(n,n)_i$ 是 $W(n,n)$ 的 $\mathbb{Z}$- 阶化子李超代数，这里

$$HO(n,n)_i=HO(n,n)\bigcap W(n,n)_i=\{\mathrm{T_H}(a)\,|\,a\in\Lambda(n,n)_{i+2}\}.$$

由文献 [2] 知 $\ker\mathrm{T_H}=\mathbb{F}\cdot 1$. 本文中 $W(n,n),HO(n,n)$ 和 $\overline{HO}(n,n)$ 分别简记为 $W,HO,\overline{HO}$. 任取 $i\in Y$, 令 $\eta_i:\Lambda(n,n)\to\Lambda(n,n)$ 是线性映射，使得

$$\eta_i(x^{(\alpha)}x^u):=\begin{cases}x^{(\alpha+\varepsilon_i)}x^u, & 若\, i\in Y_0,\\ x^{(\alpha)}x_ix^u, & 若\, i\in Y_1.\end{cases}$$

2 主要结果

研究奇 Hamilton 模李超代数 HO 到广义 Witt 模李超代数 W 的导子空间时，需要考查导子在 HO 的生成元集上的作用. 为此我们首先确定 HO 的生成元集.

命题 2.1 设

$$\Gamma:=\{\mathrm{T_H}(x^{(2\varepsilon_1)}),\mathrm{T_H}(x_{1'}x_k)\,|\,k\in Y\setminus 1'\},$$

$$\Omega:=\{\mathrm{T_H}(x_i),\,\mathrm{T_H}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_{i'})\,|\,i\in Y_0,\,\alpha_i\in\mathbb{N}\setminus 1\}.$$

则 $\Gamma\bigcup\Omega$ 生成 HO.

证明 设 $\Gamma\bigcup\Omega$ 生成 HO 的子代数为 L. 对 $|\alpha|+||u||$ 用归纳法证明 $\mathrm{T_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in L$. 当 $|\alpha|+||u||=1$ 时，$\mathrm{T_H}(x_i)\in\Omega\subset L$, $i\in Y_0$. 由 [3, 引理 3, p.181] 知 HO_0 由 Γ 生成，故 $[\mathrm{T_H}(x_{k'}),\mathrm{T_H}(x_kx_j)]=\mathrm{T_H}(x_j)\in L$, $j\in Y_1\setminus k$. 从而 $|\alpha|+||u||=1$ 时结论成立. 假设 $|\alpha|+||u||>1$. 若 $||u||>2$, 设 $x^u=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s}$, 这里 $s>2$, $i_j\in Y_1$, $1\le j\le s$. 不妨设 $j\in\{1,\dots,s-2\}$, 则由归纳假设和文献 [3, 引理 4 (iii), p181], 知

$$[\mathrm{T_H}(x^{(\alpha+\varepsilon_{i_{j'}})}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{s-2}}),\,\mathrm{T_H}(x_{i_j}x_{i_{s-1}}x_{i_s})]=\mathrm{T_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in L.$$

若 $||u||=0$ 和 $||u||=2$, 则相仿于文献 [3, 定理 5, 情形 4, 2, p182], 可证得 $\mathrm{T_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in L$. 若 $||u||=1$, 由上面两种情况知

$$[\mathrm{T_H}(x_{i'}x_j),\,\mathrm{T_H}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i+\varepsilon_i)})]=\mathrm{T_H}(x^{(\alpha_i\varepsilon_i)}x_j)\in L,\quad i\in Y_0,\,j\in Y_1,\,j\neq i'.$$

相仿于文献 [3, 定理 5, 情形 3, p182], 可证得 $\mathrm{T_H}(x^{(\alpha)}x^u)\in L$. □

定义 2.2[7] 设 $f\in\Lambda(n,n)$, $i\in Y_1$, 若 $D_i(f)=0$, 则称 f 是 x_i- 截头的.

由定义 2.2 知下列引理显然成立：

引理 2.3 以下结论成立：

(1) 若 $i\in Y_0$, 对任意 $g\in\Lambda(n,n)$, 都有 $D_i\eta_i(g)=g$. 若 $i\in Y_1$, 且 $g\in\Lambda(n,n)$ 是 x_i- 截头的，则 $D_i\eta_i(g)=g$.

(2) $D_i\eta_j=(-1)^{\mu(i)\mu(j)}\eta_jD_i$, 这里 $i\neq j,\quad i,j\in Y$.

引理 2.4 设 $g_1,g_2,\dots,g_k\in\Lambda(n,n)$, 对 $1\leq i\leq k$, 若 $i\in Y_1$, g_i 是 x_i- 截头的，对 $1\leq i,j\leq k$, $D_i(g_j)=(-1)^{\mu(i)\mu(j)}D_j(g_i)$, 则存在 $g\in\Lambda(n,n)$, 使得 $D_i(g)=g_i$, $i=1,\dots,k$.

证明 对 k 用归纳法证明本结论. 若 $k=1$, 令 $g:=\eta_1(g_1)$, 由引理 2.3 (1) 知 $D_1(g)=D_1(\eta_1(g_1))=g_1$, 故结论成立. 假设 $k\geq 2$, 并且对 $k-1$ 时结论成立，则存在 $f\in\Lambda(n,n)$, 使得 $D_i(f)=g_i,\quad i=1,\dots,k-1$. 令 $g:=f+\eta_k(g_k-D_k(f))$, 由引理 2.3 (2) 有

$$\begin{aligned}D_i(g)&=g_i+D_i\eta_k(g_k-D_k(f))\\&=g_i+(-1)^{\mu(i)\mu(k)}\eta_k(D_i(g_k)-D_iD_k(f))\\&=g_i+(-1)^{\mu(i)\mu(k)}\eta_k((-1)^{\mu(i)\mu(k)}D_k(g_i)-(-1)^{\mu(i)\mu(k)}D_kD_i(f))\\&=g_i,\quad i=1,\dots,k-1.\end{aligned}$$

由引理 2.3 (1) 知

$$\begin{aligned}D_k(g)=D_k(f+\eta_k(g_k-D_k(f))&=D_k(f)+D_k\eta_k(g_k-D_k(f))\\&=D_k(f)+g_k-D_k(f)=g_k.\end{aligned}$$

由归纳法，本引理成立. □

为确定奇 Hamilton 模李超代数到广义 Witt 模李超代数的非负 $\mathbb{Z}$- 齐次导子，需要下面的引理.

引理 2.5 设 $\varphi\in\mathrm{Der}_t(HO,W)$, $t\geq 0$, 则存在 $y\in W_t$, 使得 $\varphi=\mathrm{ad}y|_{HO}$.

证明 分以下几步证明本结论.

1) 设 $\varphi(D_k)=\sum_{i\in Y}f_{ik}D_i,\quad\forall\, k\in Y$. 因为 $\varphi([D_k,D_l])=0$, 所以

$$[\varphi(D_k),D_l]+(-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}[D_k,\varphi(D_l)]=0,$$

因此

$$\Big[\sum_{i\in Y}f_{ik}D_i,\,D_l\Big]+(-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}\Big[D_k,\,\sum_{i\in Y}f_{il}D_i\Big]=0.$$

于是

$$\sum_{i\in Y}\big((-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}D_k(f_{il})-(-1)^{(\mathrm{P}(f_{ik})+\mu(i))\mu(l)}D_l(f_{ik})\big)D_i=0.$$

易见

$$\mathrm{P}(\varphi)+\mu(k)=\mathrm{P}(f_{ik})+\mu(i),\quad i\in Y.\tag{2.1}$$

所以

$$(-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}D_k(f_{il})-(-1)^{(\mathrm{P}(\varphi)+\mu(k))\mu(l)}D_l(f_{ik})=0,$$

于是

$$D_k((-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(l)}f_{il})=(-1)^{\mu(k)\mu(l)}D_l((-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}f_{ik}).$$

设 $k\in Y_1$, 用 k 代替上式中的 l, 得 $D_k((-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}f_{ik})=0$, 从而 $(-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}f_{ik}$ 是 x_k- 截头的. 由引理 2.4 知，存在 $g_i\in\Lambda(n,n)$, 使得

$$D_k(g_i)=(-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}f_{ik},\quad i,k\in Y.\tag{2.2}$$

2) 由 (2.2) 式知， $\mathrm{P}(g_i)+\mu(k)=\mathrm{P}(f_{ik})$, 再由 (2.1) 式知， $\mathrm{P}(\varphi)=\mathrm{P}(g_i)+\mu(i),\quad i\in Y$. 令 $Z=-\sum_{i\in Y}g_iD_i$, 则由 (2.2) 式知，对任意 $k\in Y$, 有

$$\begin{aligned}[][Z,\,D_k]&=-\Big[\sum_{i\in Y}g_iD_i,\,D_k\Big]=\sum_{i\in Y}(-1)^{(\mathrm{P}(g_i)+\mu(i))\mu(k)}D_k(g_i)D_i\\&=\sum_{i\in Y}(-1)^{\mathrm{P}(\varphi)\mu(k)}D_k(g_i)D_i=\sum_{i\in Y}f_{ik}D_i=\varphi(D_k).\end{aligned}$$

令 $y=Z_t$, 则 $[y,D_k]=\varphi(D_k),\forall\,k\in Y$. 令 $\psi=\varphi-\mathrm{ad}y$, 则 $\psi(HO_{-1})=0$. 显然 $\psi(HO_j)\subset W_{t+j}$, 其中 $j\geq -1$.

3) 下面对 j 用归纳法证明 $\psi(HO_j)=0,\quad j\geq -1$. 由 2) 知 $\psi(HO_{-1})=0$, 设 $j\geq 0$, 显然 $[HO_{-1},HO_j]\subseteq HO_{j-1}$, 由归纳假设知， $\psi(HO_{j-1})=0$, 于是 $[HO_{-1},\psi(HO_j)]=0$, 即 $[W_{-1},\psi(HO_j)]=0$, 从而 $\psi(HO_j)\subseteq C_W(W_{-1})=W_{-1}$, 所以 $\psi(HO_j)\subseteq W_{-1}\bigcap W_{t+j}$, 由 $t+j\geq 0$ 知 $\psi(HO_j)=0$, 故 $\psi=0$, 所以 $\varphi=\mathrm{ad}y\in\mathrm{ad}W_t$. □

由引理 2.5 得下列命题：

命题 2.6 $\mathrm{Der}_t(HO,W)=\mathrm{ad}W_t$, 对任意 $t\geq 0$.

相仿于文献 [3, 命题 9, p189] 可得下列命题：

命题 2.7

$$\mathrm{Der}_{-1}(HO,W)=\mathrm{ad}W_{-1},$$

由命题 2.1 知， [3, 引理 10, p.192] 对于无限维的情形也是成立的，即

引理 2.8 设 $\varphi\in\mathrm{Der}_{-t}(HO,W)$, $t>1$. 假设 $\varphi(\mathrm{T_H}(x^{((t+1)\varepsilon_i)}))=0$ 且 $\varphi(\mathrm{T_H}(x^{(t\varepsilon_i)}x_{i'}))=0$, $i\in Y_0$. 则 $\varphi=0$.

定义 $\Phi:HO\to HO$, 使得对任意 $\mathrm{T_H}(f)\in HO$, 有 $\Phi(\mathrm{T_H}(f))=\mathrm{T_H}(\sum_{i\in Y_0}D_iD_{i'}(f))$. 容易验证 Φ 是 HO 的 -2 次导子 (文献 [3, 命题 11] 中也应有此导子).

相仿于文献 [3, 命题 11–12], 并由引理 2.8 容易得到下列命题成立：

命题 2.9

$$\mathrm{Der}_{-t}(HO,W)=\mathbb{F}\cdot\Phi,\quad 其中\,t>1,\,t\neq p^d,\ d\in\mathbb{N};$$

$$\mathrm{Der}_{-t}(HO,W)=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}D_r)^{p^d}\,|\,r\in Y_0,\,d\in\mathbb{N}\},其中\ t=p^d.$$

由命题 2.6, 2.7, 2.9 可得无限维奇 Hamilton 模李超代数到广义 Witt 模李超代数的导子空间，即

定理 2.10 $\mathrm{Der}(HO,W)=\mathrm{ad}W\bigoplus\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}D_r)^{p^d}\,|\,r\in Y_0,\,d\in\mathbb{N}\}$.

下面定理确定了无限维奇 Hamilton 模李超代数的导子.

定理 2.11 $\mathrm{Der}(HO)=\mathrm{ad}(\overline{HO}+\mathbb{F}\cdot h)\bigoplus\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}D_r)^{p^d}\,|\,r\in Y_0,\,d\in\mathbb{N}\}\bigoplus\mathbb{F}\cdot\Phi$.

证明 由命题 2.7 知

$$\mathrm{Der}_{-1}(HO)=\mathrm{ad}HO_{-1};$$

由命题 2.9 知

$$\mathrm{Der}_{-t}(HO)=\mathbb{F}\cdot\Phi,\quad 其中\,t>1,\,t\neq p^d,\forall\,d\in\mathbb{N};$$

$$\mathrm{Der}_{-t}(HO)=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{(\mathrm{ad}D_r)^{p^d}\,|\,r\in Y_0,\,d\in\mathbb{N}\},其中\ t=p^d.$$

相仿于文献 [3, 引理 6, 7, 13] 及命题 2.6, 并由 HO 是 $\overline{HO}$ 的理想，可得

$$\mathrm{Der}_t(HO) = \mathrm{ad}|_{HO}\overline{HO}, \quad t > 0,$$

$$\mathrm{Der}_0(HO) = \mathrm{ad}(HO + \mathbb{F} \cdot h)_0, \text{其中 } h = \sum_{i=1}^{n} x_{i'} D_{i'}.$$

故结论成立. □

参考文献:

[1] CELOUSOV M JU. *Derivations of Lie algebras of Cartan type* [J]. Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika, 1970, **98**: 126–134. (in Russian)

[2] 刘文德，张永正．有限维单 Cartan 型模李超代数 HO [J]. 数学学报， 2005, **48**: 319–330.
LIU Wen-de, ZHANG Yong-zheng. *Finite-dimensional simple Cartan-type modular Lie superalgebras HO* [J]. Acta Math. Sinica, 2005, **48**: 319–330. (in Chinese)

[3] LIU Wen-de, ZHANG Yong-zheng, WANG Xiu-ling. *The derivation algebra of the Cartan-type Lie superalgebra HO* [J]. J. Algebra, 2004, **273**: 176–205.

[4] 马凤敏，张庆成． K 型模李超代数的导子代数 [J]. 数学杂志， 2000, **20**(4): 431–435.
MA Feng-min, ZHANG Qing-cheng. *Derivation algebras for K-type modular Lie superalgebras* [J]. J. Math. (Wuhan), 2000, **20**(4): 431–435. (in Chinese)

[5] STRADE H, FARNSTEINER R. *Modular Lie Algebras and Their Representations* [M]. Monographys and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 116. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[6] WANG Ying, ZHANG Yong-zheng. *Derivation algebra Der(H) and central extensions of Lie superalgebras* [J]. Comm. Algebra, 2004, **32**: 4117–4131.

[7] 张永正，刘文德．模李超代数 [M]. 北京：科学出版社， 2004.
ZHANG Yong-zheng, LIU Wen-de. *Modular Lie Superalgebras* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)

[8] ZHANG Qing-cheng, ZHANG Yong-zheng. *Derivation algebras of the modular Lie superalgebras W and S of Cartan-type* [J]. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 2000, **20**: 137–144.

Derivations of Infinite-Dimensional Odd Hamiltonian Modular Lie Superalgebra

HUA Xiu-ying, LIU Wen-de
(Department of Mathematics, Harbin Normal University, Heilongjiang 150080, China)

Abstract: The paper first gives the generators of infinite-dimensional odd Hamiltonian modular Lie superalgebra, then determines the derivation space of odd Hamiltonian modular Lie superalgebra to the generalized Witt modular Lie superalgebra. Furthermore, the derivation algebra of infinite-dimensional odd Hamiltonian modular Lie superalgebra is determined.

Key words: Gradation; odd Hamiltonian Lie superalgebra; derivation algebra.