第27卷第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.27, No.4
2007年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0901-06　　**文献标识码**: **A**

某可微函数类在 Orlicz 空间内的宽度估计

孙志玲 [1]， 吴嘎日迪 [2]

(1. 内蒙古民族大学数学与计算机科学学院，内蒙古　通辽 028000;
2. 内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特 010022)
(E-mail: zlsunnmg@sohu.com)

摘　要: 本文首先研究了 r 阶广义样条类在 Orlicz 空间内的极值问题，由此进一步考虑了光滑函数类 $\Omega_\infty^r[0,1]$ 在 Orlicz 空间内的 n 宽度的精确估计问题. 最后还讨论了相应的对偶情形.

关键词: Orlicz 空间；样条类；函数类；宽度；对偶.
MSC(2000): 41A63; 41A44
中图分类: O174.41

1 引 言

本文将文献 [2] 中有关宽度问题的结果从 L^p 空间推广到了 Orlicz 空间内. 我们假设 $M(u)$ 和 $N(v)$ 表示互余的 N 函数，与 $M(u)$ 和 $N(v)$ 对应的右导数 $p(u)$ 和 $q(v)$ 右连续且单调增加. 关于 N 函数的定义及其性质见文献 [1]. 由 N 函数 $N(v)$ 生成的 Orlicz 类 L_N 是指满足

$$\rho(v,N)=\int_0^1 N(v(x))\mathrm{d}x<\infty$$

的可测函数的全体 $v(x)$; 由 N 函数 $M(u)$ 生成的 Orlicz 空间 L_M^* 是指具有有限的 Orlicz 范数

$$\|u\|_M=\sup_{\rho(v,N)\le 1}|\int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x|$$

的可测函数的全体 $u(x)$, 同时 Orlicz 范数还可由下式计算

$$\|u\|_M=\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^1 M(\alpha u(x))\mathrm{d}x),$$

并且存在 $\alpha>0$, 满足 $\int_0^1 N(p(\alpha|u(x)|))\mathrm{d}x=1$, 使得

$$\|u\|_M=\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^1 M(\alpha u(x))\mathrm{d}x).$$

在 L_M^* 上还可以赋予与 Orlicz 范数等价的 Luxemburg 范数

$$\|u\|_{(M)}=\inf\{\alpha>0:\int_0^1 M(\frac{u(x)}{\alpha})\mathrm{d}x\le 1\}.$$

收稿日期: 2005-11-04; **接受日期**: 2006-10-11
基金项目: 内蒙古自然科学基金 (200408020108).

以下分别用 L_M^* 和 $L_{(M)}^*$ 表示带有 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间.

给定 l $(l \geq 1)$ 个非负实数 $t_1, \ldots, t_l$ 及多项式 $P_r(x) = \prod_{j=1}^{l}(x^2 - t_j^2)$, $D = \frac{d}{dx}$ 是微分算符. 记 $P_r(D) = \prod_{j=1}^{l}(D^2 - t_j^2)$, 此处 $r = 2l$. 引入函数类 $\Omega_M^{2l}[0,1]$: $f(x) \in \Omega_M^{2l}[0,1]$ 当且仅当 $f^{(2l-1)}(x)$ 在 [0,1] 上绝对连续, $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(1) = 0$, $k = 0, \ldots, l-1$, 且 $\|P_r(D)f\|_M \leq 1$. 由文献 [2] 知,

$$\Omega_\infty^r = \{f(x) = \int_0^1 K(x,y)g(y)\mathrm{d}y : g(x) \overset{\text{a.e.}}{=} P_r(D)f(x), \|g\|_\infty \leq 1\};$$

$$\Omega_{(M)}^r = \{f(x) = \int_0^1 K(x,y)g(y)\mathrm{d}y : g(x) \overset{\text{a.e.}}{=} P_r(D)f(x), \|g\|_{(M)} \leq 1\};$$

$$\Omega_N^r = \{f(x) = \int_0^1 K(x,y)g(y)\mathrm{d}y : g(x) \overset{\text{a.e.}}{=} P_r(D)f(x), \|g\|_N \leq 1\},$$

其中 $K(x,y) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi x \sin k\pi y}{p_r(ik\pi)}$, $i = \sqrt{-1}$.

引入关于 $P_r(D)$ 的广义 Bernoulli 核 $K_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi x}{p_r(ik\pi)}$. 设 $g \in L_{(M)}^*$, 以 $\tilde{g}$ 表示 g 的周期为 2 的奇延拓. 对 $f = K * g$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 K(x,y)g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi(x-y)}{p_r(ik\pi)} g(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi(x+y)}{p_r(ik\pi)} g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi(x-y)}{p_r(ik\pi)} g(y)\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi(x-y)}{p_r(ik\pi)} \tilde{g}(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

若记

$$\tilde{f}(x) = \int_{-1}^1 K_r(x-y)\tilde{g}(y)\mathrm{d}y,$$

则 $\tilde{f}$ 便是 $f \in \Omega_{(M)}^r[0,1]$ 的周期为 2 的奇延拓. 记

$$\Lambda_n = \{\xi : \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), 0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \xi_{n+1} = 1\};$$

$$\Gamma_n = \{h_\xi(t) : \xi \in \Lambda_m (m \leq n), h_\xi(t) = (-1)^j, \xi_j < t < \xi_{j+1}, j = 0, 1, \ldots, m, h_\xi(\xi_j) = 0\};$$

$$\Pi_n = \{f_\xi = K * h_\xi : h_\xi \in \Gamma_n\};$$

$$e(\Pi_n, L_{(M)}^*) = \inf\{\|f_\xi\|_{(M)} : f_\xi \in \Pi_n\}; \tag{1.1}$$

$$e(\Pi_n, L_N^*) = \inf\{\|f_\xi\|_N : f_\xi \in \Pi_n\}. \tag{1.2}$$

以下分别用 $d_n(A;X)$, $d^n(A;X)$, $\delta_n(A;X)$ 表示函数类 A 在线性赋范空间 X 内的 $n-K$ 宽度, $n-G$ 宽度, $n-L$ 宽度. 有关 n 宽度的定义可参考文献 [3].

2 Π_n 的极值问题

定理 1 设 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是满足 Δ_2 条件的互余的 N 函数, $M(u)$ 和 $N(v)$ 的图像不含直线段, $p(u)$ 和 $q(v)$ 分别是 $M(u)$ 和 $N(v)$ 的右导数, $n \in Z^+$, 则有

$$e(\Pi_n, L_{(M)}^*) = \|p_n\|_{(M)}; \tag{2.1}$$

$$e(\Pi_n, L_M^*) = \|p_n\|_M, \tag{2.2}$$

此处 $p_n(x) = \int_0^1 K(x,y)\mathrm{sgn}\sin(n+1)\pi y\mathrm{d}y$.

证明 根据 Bolzano-Weierstrass 定理容易证明极小问题 (1.1) 式有解. 设 f_{ξ^*} 是该极小问题的解，即存在 $\xi^* \in \Lambda_m(m \le n)$, 使得 $\min_{h_\xi \in \Gamma_n} \|f_\xi\|_{(M)} = \|f_{\xi^*}\|_{(M)}$. 考虑变分问题：令

$$\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \int_0^1 M(\frac{|f_\xi(x)|}{\|f_{\xi^*}\|_{(M)}})\mathrm{d}x = \int_0^1 M(\frac{|\sum_{j=0}^m (-1)^j \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} K(x,y)\mathrm{d}y|}{\|f_{\xi^*}\|_{(M)}})\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

则有 $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j}|_{\xi^*} = 0$ $(j=1,\ldots,m)$, 经计算得

$$\int_0^1 p(\frac{|f_{\xi^*}(x)|}{\|f_{\xi^*}\|_{(M)}})\mathrm{sgn}(f_{\xi^*}(x))K(x,\xi_j^*)\mathrm{d}x = 0 \quad (j=1,\ldots,m).$$

令

$$G(y) = \int_0^1 p(\frac{|f_{\xi^*}(x)|}{\|f_{\xi^*}\|_{(M)}})\mathrm{sgn}(f_{\xi^*}(x))K(x,y)\mathrm{d}x,$$

则 $G(\xi_j^*) = 0$ $(j=1,\ldots,m)$.

下面证明 $G(y)$ 在 (0,1) 内除了 ξ_j^* 外别无零点，且每一 ξ_j^* $(j=1,\ldots,m)$ 都是 $G(y)$ 的变号点. 令

$$\tilde{f}_{\xi^*}(x) = \int_{-1}^1 K_r(x-y)\tilde{h}_{\xi^*}(y)\mathrm{d}y;$$

$$\tilde{G}(y) = \int_{-1}^1 p(\frac{|\tilde{f}_{\xi^*}(x)|}{\|\tilde{f}_{\xi^*}\|_{(M)}})\mathrm{sgn}(\tilde{f}_{\xi^*}(x))K_r(x-y)\mathrm{d}x,$$

则 $\tilde{f}_{\xi^*}(x)$ 和 $\tilde{G}(y)$ 分别是 $f_\xi(x)$ 和 $G(y)$ 的以 2 为周期的奇延拓. 下面用文献 [4] 中的方法可证得 $G(y)$ 在 (0,1) 内零点的个数不大于 m (重根要按重数计算).

把点组 $\xi^* = \{0 = \xi_0^* < \xi_1^* < \cdots < \xi_m^* < \xi_{m+1}^* = 1\}$ 如下的延拓到全体整数 k: $k = -m-1, -m, \ldots, -1$ 时，规定 $\xi_k^* = -\xi_{|k|}^*$, 对 $|k| > m+1$ 的整数 k, 存在 k', 使得 $|k'| \le m+1$, $k = k'(\mathrm{mod}2(m+1))$, 规定 $\xi_k^* = \xi_{k'}^*$, 这样把 ξ_k^* 延拓到全体整数 k 上. 记 $\Delta_k = [\xi_{k-1}^*, \xi_k^*]$, $|\Delta_k| = \xi_k^* - \xi_{k-1}^*$, $\delta = \min|\Delta_k|$, 并令 $H_0(x) = G(x) + G(x+\delta)$. 注意到

$$\mathrm{sgn}(p(|a|)\mathrm{sgn}a + p(|b|)\mathrm{sgn}b) = \mathrm{sgn}(a+b),$$

用与文献 [2] 类似的方法，可证得 $\Delta_k = \frac{1}{m+1}$, $k = -m, \ldots, 0, \ldots, m+1$. 这样便可以得到

$$f_{\xi^*}(x) = \int_0^1 K(x,y)\mathrm{sgn}(\sin(m+1)\pi y)\mathrm{d}y.$$

最后，还须证 $m = n$. 记

$$F_{j+1,r}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)p_r(i(2k+1)(j+1)\pi)} \quad (j=0,1,\ldots).$$

由文献 [2] 可得，若 $j > j'$, 则有

$$F_{j+1,r}(x) < F_{j'+1,r}(x). \tag{2.4}$$

$$
\begin{aligned}
\|p_n\|_{(M)} &= \inf\{\alpha>0:\int_0^1 M(\frac{\int_0^1 K(x,y)\mathrm{sgn}(\sin(n+1)\pi y)\mathrm{d}y}{\alpha})\le 1\}\\
&= \inf\{\alpha>0:\int_0^1 M(\frac{4}{\alpha\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)(n+1)\pi x}{(2k+1)p_r(i(2k+1)(n+1)\pi)})\mathrm{d}x\le 1\}\\
&= \inf\{\alpha>0:\sum_{j=1}^{n+1}\int_{\frac{j-1}{n+1}}^{\frac{j}{n+1}} M(\frac{4}{\alpha\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)(n+1)\pi x}{(2k+1)p_r(i(2k+1)(n+1)\pi)})\mathrm{d}x\le 1\}\\
&= \inf\{\alpha>0:\int_0^1 M(\frac{4}{\alpha\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)p_r(i(2k+1)(n+1)\pi)})\mathrm{d}x\le 1\}\\
&= \|F_{n+1,r}\|_{(M)}.
\end{aligned}
$$

若 $m<n$, 由 (2.4) 式及 Luxemburg 范数的性质可得

$$\|F_{n+1,r}\|_{(M)}<\|F_{m+1,r}\|_{(M)}. \tag{2.5}$$

但又由于

$$\|F_{n+1,r}\|_{(M)}=\|p_n\|_{(M)}\ge\min_{h_\xi\in\Gamma_n}\|\int_0^1 K(\cdot,y)\mathrm{sgn}(\sin(m+1))\mathrm{d}y\|_{(M)}=\|F_{m+1,r}\|_{(M)}. \tag{2.6}$$

(2.5) 与 (2.6) 两式矛盾，故 $m=n$. 因此， (2.1) 式得证.

(2.2) 式也同样可证，只是把变分问题 (2.3) 换成

$$\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\int_0^1 M(k|f_\xi(x)|)\mathrm{d}x,$$

这里 $k>0$, 满足 $\int_0^1 N(p(k|f_{\xi^*}|))\mathrm{d}x=1$, 其余部分与上述情况相同.

3 一些宽度的计算

定理 2 设 $M(u)$ 是满足 Δ_2 条件的 N 函数， $M(u)$ 的图像不含直线段，则对 $n=1,2,\ldots$, 有

(1) $d_n(\Omega_\infty^r;L_M^*)=\delta_n(\Omega_\infty^r;L_M^*)=\|p_n\|_M$,

(2) $\mathrm{span}\{K(x,\frac{1}{n+1}),\ldots,K(x,\frac{n}{n+1})\}$ 是 Ω_∞^r 在 L_M^* 内的 $n-K$ 宽度和 $n-L$ 宽度的极子空间.

证明 由定理 1 中的 (2.2) 式和文献 [3] 中的定理 5.8-1 以及 Orlicz 空间的有关性质可得

$$d_n(\Omega_\infty^r;L_M^*)\ge\min_{h_\xi\in\Gamma_n}\|Kh_\xi\|_M=\|p_n\|_M. \tag{3.1}$$

为了得到上方估计，考虑 n 维子空间 $X_n^0=\mathrm{span}\{K(x,\frac{j}{n+1})\}$ $(j=1,\ldots,n)$. 由文献 [2] 中定理 2 的证明知，对 $h\in L^\infty(0,1)$, 存在线性泛函 $\lambda_1(h),\ldots,\lambda_n(h)$, 使当 $\|h\|_\infty\le 1$ 时有

$$|\int_0^1 K(x,y)h(y)\mathrm{d}y-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(h)K(x,\frac{j}{n+1})|\le|p_n(x)|$$

对任一 $x \in [0,1]$ 成立，这样便得到

$$d_n(\Omega_\infty^r; L_M^*) \le \delta_n(\Omega_\infty^r; L_M^*) \le \sup_{\|h\|_\infty \le 1} \| \int_0^1 K(x,y)h(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=1}^n \lambda_j(h) K(x, \frac{j}{n+1}) \|_M \\ \le \|p_n\|_M.$$

再由

$$\begin{aligned} d_n(\Omega_\infty^r; L_M^*) &\le E(\Omega_\infty^r; X_n^0)_M = \sup_{f\in\Omega_\infty^r} \min_{g\in X_n^0} \|f-g\|_M \\ &\le \sup_{\|h\|_\infty \le 1} \| \int_0^1 K(x,y)h(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=1}^n \lambda_j(h) K(x, \frac{j}{n+1}) \|_M \\ &\le \|p_n\|_M, \end{aligned}$$

结合 (3.1) 式得

$$d_n(\Omega_\infty^r; L_M^*) = E(\Omega_\infty^r; X_n^0)_M = \delta_n(\Omega_\infty^r; L_M^*) = \|p_n\|_M.$$

定理 3 在定理 1 的条件下，对 $n = 1, 2, \ldots$, 有

$$d_n(\Omega_M^r; L_1) = \delta_n(\Omega_M^r; L_1) = \|p_n\|_{(N)}.$$

证明 在定理 1 的条件下， $L_{(M)}^*$ 的共轭空间是 L_N^*, L_M^* 的共轭空间是 $L_{(N)}^*$, 并且注意到 $K(x,y) = K(y,x)$, 故算子 $K = K^{\mathrm{T}}$(K^{T} 是 K 的转置). 根据文献 [3] 中定理 5.8-3 的证明方法并结合文献 [5] 中定理 4 的证明方法，再由定理 1 的 (2.1) 式可得

$$\begin{aligned} d_n(\Omega_M^r; L_1) &\ge \min_{h_\xi \in \Gamma_n} \| \int_0^1 K^T(\cdot, y) h_\xi(y) \mathrm{d}y \|_{(N)} \\ &= \min_{h_\xi \in \Gamma_n} \| \int_0^1 K(\cdot, y) h_\xi(y) \mathrm{d}y \|_{(N)} = \|p_n\|_{(N)}. \end{aligned}$$

下面只需证明

$$\delta_n(\Omega_M^r; L_1) \le \|p_n\|_{(N)}. \tag{3.2}$$

根据文献 [6] 中定理 8.3-6 的证明方法并结合文献 [5] 中定理 4 的证明方法，便可得到 (3.2) 式的证明.

定理 4 设 $N(v)$ 是满足 Δ_2 条件的 N 函数，且其图像不含直线段，则对 $n = 1, 2, \ldots$, 有

$$\delta_n(\Omega_\infty^r; L_{(N)}^*) = d^n(\Omega_\infty^r; L_{(N)}^*) = \|p_n\|_{(N)}.$$

证明 由定理 1 的 (2.1) 式，并根据文献 [3] 中定理 5.8-2 的证明方法，在 Luxemburg 范数意义下那里的讨论完全成立，因此可得

$$d^n(\Omega_\infty^r; L_{(N)}^*) \ge \min_{h_\xi \in \Gamma_n} \| \int_0^1 K(\cdot, y) h_\xi(y) \mathrm{d}y \|_{(N)} = \|p_n\|_{(N)}.$$

上方估计与定理 2 的方法相同.

定理 5 在定理 1 的条件下，对 $n=1,2,\ldots$, 有

$$d^n(\Omega^r_{(N)};L_1)=\delta_n(\Omega^r_{(N)};L_1)=\|p_n\|_M.$$

证明 上方估计与定理 3 的方法相同. 下方估计可根据文献 [3] 中的定理 5.8-4 的证明方法结合文献 [5] 中定理 4 的证明方法，注意到 $K(x,y)=K(y,x)$, 并根据定理 1 的 (2.2) 式可得

$$\begin{aligned}d^n(\Omega^r_{(N)};L_1)&\geq\min_{h_\xi\in\Gamma_n}\|\int_0^1K^T(\cdot,y)h_\xi(y)\mathrm{d}y\|_M\\&=\min_{h_\xi\in\Gamma_n}\|\int_0^1K(\cdot,y)h_\xi(y)\mathrm{d}y\|_M=\|p_n\|_M.\end{aligned}$$

由定理 2 和定理 5, 定理 3 和定理 4, 可得下面的推论：

推论 在定理 1 和定理 2 的条件下，有

(1) $d_n(\Omega^r_\infty;L^*_M)=d^n(\Omega^r_{(N)};L_1)$;

(2) $d_n(\Omega^r_M;L_1)=d^n(\Omega^r_\infty;L^*_{(N)})$.

由上述推论可以看出，本文得到了与 L^p 空间类似的对偶定理.

参考文献：

[1] 吴从 ，王廷辅. 奥尔里奇空间及其应用 [M]. 哈尔滨：黑龙江科技出版社， 1983.
WU Cong-xin, WANG Ting-fu. *Orlicz Spaces and Their Applications* [M]. Harbin: Heilongjiang Science and Technology Press, 1983. (in Chinese)

[2] 孙永生. 一个广义样条类上的极值问题和有关的宽度问题 [J]. 中国科学 (A 辑), 1983, **8**: 677–688.
SUN Yong-sheng. *Extremal problem of a general spline classes and the relevant problems of widths* [J]. Sci. China Ser.A, 1983, **8**: 677–688. (in Chinese)

[3] 孙永生. 函数逼近论 (上册) [M]. 北京：北京师范大学出版社， 1989.
SUN Yong-sheng. *Approximation Theory of Function (the first volume)* [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1989. (in Chinese)

[4] 孙永生，黄达人. 关于函数类 $\Omega_p^{r+1}[0,1]$ 的宽度估计 [J]. 科学通报， 1984, **29**(12): 716–720.
Sun Yong-sheng, HUANG Da-ren. *Estimates of width for the function classes* $\Omega_p^{r+1}[0,1]$ [J]. Kexue Tongbao (Chinese), 1984, **29**(12): 716–720. (in Chinese)

[5] WU Ga-ridi. *On n-widths of some periodic convolution classes in Orlicz spaces* [J]. Approx. Theory Appl. (N.S.), 1998, **14**(3): 25–35.

[6] 孙永生，房艮孙. 函数逼近论 (下册) [M]. 北京：北京师范大学出版社， 1990.
SUN Yong-sheng, FANG Gen-sun. *Approximation Theory of Function (the last of two volumes)* [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1990. (in Chinese)

On n-Widths of Certain Function Classes in Orlicz Spaces

SUN Zhi-ling[1], *WU Ga-ridi*[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Inner Mongolia University for Nationalities, Inner Mongolia 028000, China;
2. College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Inner Mongolia 010022, China)

Abstract: This paper deals with the extremal problems of general spline classes which degree of r in Orlicz spaces. Based on this, we further study the problems of precisely estimation on n-Widths of smoothness function classes $\Omega^r_\infty[0,1]$ in Orlicz spaces. Moreover, we discuss the problems of corresponding dual cases.

Key words: Orlicz space; spline class; function class; width; duality.