美式期权定价方法的最新进展

李梦玄*

摘　要：本文回顾了过去期权定价领域内所作的工作，给出了美式期权定价的基本方法，最后我们对方法和模型的最近发展趋势做了预测。

关键词：期权定价; 美式期权; 自由边界法; 变分不等式

一、 引言

期权是这样一种衍生物证券，它给持有者在到期日或到期日之前以预先指定的价格（执行价 K）卖或者买标的资产的权利。行权是权利而非义务，所以 call 的行权报酬为 $(S-K)^{+} \equiv \max\{S-K,\ 0\}$，put 的为 $(K-S)^{+} \equiv \max\{K-S,\ 0\}$，S 为标的资产价格。期权可以是欧式的，即只能在到期日行权的；也可以是美式的，即依据持有者的判断，可以在到期日或到期日之前执行的。

本节先回顾欧式衍生物的基本定价原理。限于篇幅, 主要回顾无套利方法.

（一） 无套利方法

无套利原理是衍生物证券计算的核心方法。其源于Black and Scholes(1972) and Merton (1973)。

1. Black-Scholes-Merton框架

BSM分析开始于对标的资产价格服从几何布朗运动过程的假设：

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \delta)dt + \sigma dW_t \tag{1}$$

μ 表示资产的期望回报，δ 是红利率，σ 是回报波动性。W是具有物理概率测度P的标准布朗运动。交易是无约束的，如无税，无交易费用，无摩擦。同样的，投资者也可以在一个无风险利率r为常数的情况下无约束的投资。利率取无风险利率，我们也称这种标的风险资产为基本资产。

2. 基本定价方程

$g(S_T)$ 为欧式衍生物的支付，到期日为T ，假定证券的当前价格 $V_t \equiv V(S,t)$ 可微（即 $V(S,t) \in \mathscr{C}^{2,1}$ 在区间 $D \equiv R_{+} \times [0,\ T)$ 上）。我们可以应用伊藤引理 (Karatzas and [1]Shreve 1988,p. 149)得：

$$dV_t = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S}S_t(\mu - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S_t^2\sigma^2)dt + \frac{\partial V}{\partial S}S_t\sigma dW_t$$

---

* 李梦玄，中南财经政法大学新华金融保险学院讲师，华中科技大学管理学院财务与金融管理专业博士生。

令 $\mu^V(t,S)$ 为衍生物回报的均值，$\sigma^V(t,S)$ 为回报的波动性，得：

$$dV_t = V_t[\mu^V(t,S_t)dt + \sigma^V(t,S_t)dW_t]$$

对于一个无风险资产的自融资组合：

$$dX_t = rX_t dt + X_t\pi_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t] + X_t\pi_t^V[(\mu^V(t,S_t) - r)dt + \sigma^V(t,S_t)dW_t]$$

初值（期初组合的成本）$X_0 = x$，$X\pi$ 表示投资于标的资产的数量，$X\pi^V$ 表示投资于衍生物的量，$X(1-\pi-\pi^V)$ 表示剩余的投资于无风险资产的量。令 $X_t\pi_t{}^V = V(S_t,t)$，$X_t\pi_t = -S_t \times \partial V(S_t,t)/\partial S$，得：

$$dX_t = (rX_t - \frac{\partial V}{\partial S}S_t(\mu - r) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S}S_t(\mu - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S_t^2\sigma^2 - rV)dt$$

注意到该资产组合是局部无风险的，因为初始资金是无风险投入的，为了排除套利现象，资产组合的回报必须等于无风险利率。即衍生物价格V必须满足：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S}S_t(r-\delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S_t^2\sigma^2 - rV = 0 \qquad (2)$$

边界条件：

$$\begin{cases} V(S_T,\ T) = g(S_T) & on\ R_+ \\ V(0,\ t) = g(0)e^{-r(T-t)} & on\ [0,\ T) \\ \lim\limits_{S\to\infty} V(S,\ t) = g(\infty)e^{-r(T-t)} & on\ [0,\ T) \end{cases} \qquad (3)$$

方程(2)就是衍生物价格的基本计算方程。这是因为它可以应用到任何衍生物证券的定价，而与支付结构无关。改变的只是边界条件(3)。我们也可以引入新变量 $(x,\ \tau)$ 和函数 $\mu(x,\ \tau)$ 使：

$$S = K\exp(x),\ t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2},\ V(S,t) = e^{-\alpha x - \beta\tau}u(x,\tau)$$

其中 $\alpha \equiv (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma^2$，$\beta \equiv \alpha^2 + 2r/\sigma^2$，K为一个任意的正常数（在某些特殊的期权中，K表示执行价），得到一个修正的计算方程：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (4)$$

对应的边界条件：

$$\begin{cases} e^{-\alpha x}u(x,0) = g(K\exp(x)) & on \quad R \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\alpha x-\beta\tau}u(x,\tau) = g(0)e^{-2r/\sigma^2} & on \quad \tau\in[0,\ \frac{1}{2}\sigma^2 T] \\ \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\alpha x-\beta\tau}u(x,\tau) = g(\infty)e^{-2r/\sigma^2} & on \quad \tau\in[0,\ \frac{1}{2}\sigma^2 T] \end{cases} \tag{5}$$

方程(4)即为热传导方程，该方程在物理学中已经有充分研究。它的基本解（对应边界条件 $\lim_{x\to\pm\infty}\mu(x,\tau)=0$ ）为高斯密度函数 $\mu(x,\tau)=(2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp(-x^2/4t)$（具有均值0和标准差 $\sqrt{2t}$ ）（见Wilmott et al. 1993, p. 81）.

二、美式期权

美式衍生证券可以在到期之前的任何时间点执行。因而，定价的部分问题在于确定最优的执行策略，也就是确定使证券持有者的价值最大化的执行时间。

关于美式期权定价的方法, 我们考虑自由边界法，变分不等式法。

（一） 自由边界法

自由边界法追溯到Samuelson(1965), McKean (1965), Taylor (1967), and Merton(1973). 将它应用于Markovian马尔可夫过程框架比如说§1.1的 Black-Scholes 框架中去。一个重要的因素是可以看到§1.1.2的原理的适用，即使当考虑的要求权是美式的。因此只要和约是可持续的，基本的定价公式刻画了它的价格。在补充的情况下，即期权被执行，它的价值必然等于执行支付。

令 $V(S,t)$ 为执行支付是 $g(s)$ 的美式期权的价格。因为是持有者选择执行，我们可以知道如果在 $g(s)<0$ 时执行是次优的。所以我们可以只关心支付非负，即 $g(s)\ge 0$ 的期权。假设支付函数 $g(.)$ 是连续的，几乎处处可微的，以及在 $\{S:g(S)>0\}$ 是二次可微的。持续区域 $\xi\equiv\{(S,t)\in R_+\times[0,T):V(S,t)>g(S)\}$ 是继续持有时期权价值会更高的点 (S,t) 的集合，它的补充情况是执行区域 $\zeta\equiv\{(S,t)\in R_+\times[0,T):V(S,t)=g(S)\}$. 在考虑其原理时期权价格是连续的弱假设下，持续区域是开集，执行区域是闭集。ζ 的边界用B表示，则B是执行区域的一部分 $(i.e., B\in\zeta)$ ，用以区分执行最优的点和持续性最好的点。这个集称为立即执行边界。它的t截面， $B(t)\equiv\{S\in R_+:(S,t)\in B\}$ ，是t时刻的边界点的集合。对于一般的支付函数 $g(.)$ ， $B(t)$ 可能不是单值的：从原理上来说，执行区域可能有一个上下边界，也可能是不连续区间的并集。立即执行边界是它的t截面的集合：$B=\{B(t):t\in[0,T]\}$ ，B的确定是解决定价问题的关键。因为B预先不知道，它通常是一个自由边界。美式期权的定价问题是一个自由边界问题。

当期权在区域ξ内存续时，直觉上是可以假设价格是光滑的，正好是$V(S,t)\in\xi^{2,1}$，对于欧式期权可有同样的假设。在这个假设下，伊藤引理适用而且可以调用得到(2)的原理。期权的价格在ξ内满足(2)。

要描述立即执行边界更困难。当然，对$(S,t)\in B$立即执行是最优的，这时

$V(B(t),t)=g(B(t))$。但是这个条件却不足以充分决定B，你可以指定任意的函数$B(t)$并简单解决满足那个边界条件的定价偏微分等式。这只要对应不同的合同规范（如执行策略）提出不同的函数V。所以，为了解决定价问题，必须加上一个反映沿着B执行最优的条件。

无套利原理可用于此目的。假设期权价格的微分在$B(t)$和支付的微分不一致，即

$\partial V(B(t),t)/\partial S\neq g^{'}(B(t))$。如果这样，则表明套利机会存在。当然，考虑一个收敛于$B(t)$

的序列$S^{n}\in\xi$，使得$\lim_{n\to\infty}\left|\ \partial V(S^{n},t)/\partial S\ \right|>\left|\ g^{'}(B(t))\ \right|$。那么，对于足够大的

n($i.e., B\in\xi$ 并逼近$B(t)$)，必然有$V(S^{n},t)<g(S)$，和 ξ的定义矛盾（即有套利机会）。

如果$\lim_{n\to\infty}\left|\ \partial V(S^{n},t)/\partial S\ \right|<\left|\ g^{'}(B(t))\ \right|$，也可以构建套利机会。Wilmott et al 提供了一

个非正式的原理。这两个结果的结合得到在点$S=B(t)$有条件$\partial V(S\ \ ,t)/\partial S=g^{'}(S)$。这个要求价格和支付的微分在直接执行边界上相等的条件，就是高度联系和光滑裱糊（smooth pasting）条件（见 Ingersoll 1987,p.374 or Dixit and Pindyck 1994,p.130）.

简而言之，期权价格解决了受制于边界条件（6）的基本定价公式（2）。

$$\begin{cases} V(S,T)=g(S) & on\ R_{+} \\ V(0,t)=g(0) & for\ t\in[0,T] \\ V(S,t)=g(S) & for\ (S,t)=(B(t),t) \\ \dfrac{\partial V(S,t)}{\partial S}=g^{'}(S) & for\ (S,t)=(B(t),t) \end{cases} \qquad (6)$$

方法(2),(6)就是定价函数的自由边界描述形式。

（二） 变分不等式

自由边界问题通常很难解决，因为在解决问题的过程中要确定未知边界。一种替代的方法是用变化不等式重做该问题。由于不等式并不明显依赖边界，这种变换很有前景。定价函数可以直接从描述中得到。边界则可以从这个解答中确定。

为了理解变分不等式，先以线性补形式表述定价问题或许非常有效。回顾定价函数可以从热传导方程(4)和相应的边界条件（5）的以 u 表示的解来获得。为了简化符号，写成

$$\Lambda u(x,\tau)\equiv\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}$$

注意Λ是一个倒序的布朗运动$x\equiv\{x_{\tau}:\tau\in[0,\ \tfrac{1}{2}\sigma^{2}T]\}$的伊藤微分算子：它代表当时间向

后推移时函数$u(x,\tau)$的漂移（也就是当重新调节的到期期限测度$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-\tau)$增大时）。在持续区域$u(x,\tau) > e^{\alpha x+\beta\tau} g(K\exp(x)) \equiv \hat{g}(x,\tau)$ 内，价格满足$\Lambda u(x,\tau)=0$。在执行区域$u(x,\tau)=\hat{g}(x,\tau)$,因此

$$\Lambda u(x,\tau) = \Lambda \hat{g}(x,\tau)$$

而且，因为$\Lambda \hat{g}(x,\tau)$代表来自执行的局部收益，当执行是最优的时候，它不可能是负的。这样就得到$\Lambda u(x,\tau) = \Lambda \hat{g}(x,\tau) \ge 0$。简而言之，

$$\Lambda u(x,\tau)(u(x,\tau) - \hat{g}(x,\tau)) = 0 \qquad （7）$$

$$u(x,\tau) - \hat{g}(x,\tau) \ge 0 \quad 和\ \Lambda u(x,\tau) \ge 0 \qquad （8）$$

找一个连续且几乎处处可微的函数$u(x,\tau)$，使之满足受制于如下边界条件的(7)-(8)问题：

$$\begin{cases} u(x,0) = e^{\alpha x} g(K\exp(x)) & for\ \ R \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\alpha x-\beta\tau} u(x,\tau) = g(0) & for\ \ \tau \in [0,\ \frac{1}{2}\sigma^2 T] \\ \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\alpha x-\beta\tau} u(x,\tau) = g(\infty) & for\ \tau \in [0,\ \frac{1}{2}\sigma^2 T] \end{cases} \qquad （9）$$

叫做线性补问题（LCP）。注意与问题相对应的以 x 表示的未知执行边界没有出现在(7)-(9)。线性补偿问题（LCP）可以解释为一个界限问题(obstacle problem)，在该问题下，一个函数的不受约束变化由基本定价方程式支配，这个函数必须超过一个由执行支付给定的界限，并且在区域的边界满足各个条件。

变化不等式的表达式通过结合并放松前面的条件(7)-(8)而得到。特别的，令ϕ为一个由函数$v(x,\tau)$组成的检验函数集，函数$v(x,\tau)$在τ内连续、连续可微，在 x 内几乎处处可微，同时还满足边界条件（9）和对于所有$(x,\tau) \in R \times [0,\ \frac{1}{2}\sigma^2 T]$的不等式约束$v(x,\tau) \ge \hat{g}(x,\tau)$。注意到我们问题的解，即函数 u 属于$\phi$。而且，对任何$v \in \phi$我们有$v(x,\tau) \ge \hat{g}(x,\tau)$，从而有$\Lambda u(x,\tau)(v(x,\tau) - \hat{g}(x,\tau)) \ge 0$，并且当$v(x,\tau) = \hat{g}(x,\tau)$时取等号。对 x 求积分得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda u(x,\tau)(v(x,\tau) - \hat{g}(x,\tau))dx \ge 0 \qquad （10）$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda u(x,\tau)(u(x,\tau) - \hat{g}(x,\tau))dx = 0 \qquad （11）$$

求上面(10)和(11)两式的差。消去函数$\hat{g}(x,\tau)$，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda u(x,\tau)(v(x,\tau)-u(x,\tau))dx \geq 0$$

通过分部积分, 我们可以去掉二阶微分

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \tau}(v(x,\tau)-u(x,\tau))dx - \frac{\partial u}{\partial x}(v(x,\tau)-u(x,\tau)) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(v^{'}(x,\tau)-u^{'}(x,\tau))dx$$

$u, v \in \phi$，这样，他们在$x = \pm\infty$满足相同的边界条件，从而整理条件之后

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \tau}(v(x,\tau)-u(x,\tau))dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(v^{'}(x,\tau)-u^{'}(x,\tau))dx \qquad (12)$$

变化不等式问题就是寻找$u \in \phi$使得（35）式对于所有$t \in [0,T]$，所有检验函数$v \in \phi$都能成立。可以进一步对时间求积分，即得到总的变分不等式。

变分不等式法应用于美式期权定价由 jail et al.(1990)提出。该问题的数学描述在下面可以找到：Bensoussan and Lions(1978) and Kingderlehrer and Stampacchia(1980）.

三、结论

衍生证券的定价方法已经达到一定的成熟程度, 然而在几个前沿还有很多挑战。在保持简单和易处理的同时, 仍需继续发展和数据更加匹配的资产定价模型。多因素 SV 和随机相关性等模型是继续研究的潜在方向。

参考文献

1. Bensoussan, A., J. L. Lions. 1978. *Applications des Inequations Variationelles en Contre Stochastique.* Dunod, Paris, France.

2. Dixit, A., R. Pindyck. 1994. *Investment under Uncertainty.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

3. Ingersoll, J. 1987. *Theory of Financial Decision Making.* Rowman and Little.eld Publishers, NJ.

4. Jaillet, P., D. Lamberton, B. Lapeyre. 1990. Variational inequalities and the pricing of American options. *Acta Appl. Math.* 21 263–289.

5. Karatzas, I., S. Shreve. 1988. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer Verlag, New York.

6. Kinderlehrer, D., G. Stampacchia. 1980. *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*. Academic Press, New York.

7. Wilmott, P., J. Dewynne, S. Howison. 1993. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, Oxford, U.K.

Recent Develpoment of the Valuation Method for Amercian Options

Li Mengxuan

Abstract: This paper surveys the literature on option pricing from its origins to the present and gives an extensive review of valuation methods for American-style claims. Applications to complex securities are surveyed. Emphasis is placed on recent trends and developments in methodology and modeling.

Key Words: option pricing; American options; the free-boundary approach;
variational inequalities