

三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面之间的相互转化

刘志平, 王仁宏

(大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024)

(E-mail: Liu_zhi_ping@163.com)

摘 要: Bézier 曲面有两种不同的形式: 三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面, 它们有着不同的基底和不同的几何拓扑结构, 但是它们也有很多共同的性质, 因此三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面之间的相互转化就成为 CAGD 里一个重要研究课题. 在本文中, 我们用函数复合的方法实现两者之间的相互转化. 被复合的两个函数, 一个用 Polar 形式表示, 另一个用常见的 Bernstein 基形式表示.

关键词: 三角 Bézier 曲面; 四边 Bézier 曲面; 函数复合; Polar 形式.

MSC(2000): 65D17

中图分类号: O187.1

1 引言

三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面在计算机辅助几何设计 (CAGD) 领域都有着广泛的应用, 它们具有很多共同的性质, 例如角点插值性、保凸性、变差减少性等等, 但这两种形式的曲面有着不同的基函数和不同的几何拓扑结构, 因此, 研究三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面间的相互转化是一个非常有意义的工作.

1982 年, Ingrid Brueckner 给出了从三角 Bézier 曲面到四边 Bézier 曲面的转化公式, 他首先把 Bézier 曲面的定义域由三角形扩大为四边形, 然后给出了一个递推公式, 利用他给的递推公式就能求得四边 Bézier 曲面的控制顶点. 1987 年, Goldman 解决了问题的另一个方面: 从四边 Bézier 曲面到三角 Bézier 曲面的转化, Goldman 通过连接四边形对角线的方式把四边 Bézier 曲面的定义域化成两个三角形, 然后给出了三角 Bézier 曲面控制顶点的计算公式, 上面两篇文献里的证明都只利用了 Bernstein 多项式的基本性质. 在国内, 清华大学的胡事民在这个问题上也做了很好的研究工作, 他把三角形看作退化的四边形, 同样给出了计算 Bézier 控制顶点的精确公式, 并指出三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面间的相互转化实质上是一个升阶 (从三角到四边) 或降阶 (从四边到三角) 问题.

对同样的问题, 在本文中, 我们用函数复合的方法加以考虑, 这里要求被复合的两个函数, 一个用 Polar 形式表示, 另一个用常见的 Bernstein 基形式表示. 对于一般的复合函数求控制顶点问题, DeRose 做了大量的研究工作, 感兴趣的读者可以参考文献 [4,5]. 本文的主要思想: 令 $H(p) = F(G(p))$, 其中 $F(p)$ 是已知形式的 Bézier 曲面, f 是 F 的 Polar 形式, 令 $G(p) = p$, 并用想求形式的 Bézier 曲面表示, 则利用 f 就可以求得 $H(p) = F(p)$ 的控制顶点, 且 $H(p)$ 就是

想求形式的 Bézier 曲面. 例如从四边 Bézier 曲面到三角 Bézier 曲面的转化, 只需把 $G(p) = p$ 表示为三角 Bézier 曲面形式.

2 预备知识

在这一部分, 我们给出后面证明过程所要用的基础知识: Polar 形式定理和 Bézier 曲线、曲面的 Polar 形式表示.

1) $m \times n$ 次四边 Bézier 曲面

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1,$$

其中 $B_i^m(u) = \frac{m!}{i!(m-i)!} u^i (1-u)^{m-i}$, $S = \{s_{i,j} : 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ 称为 $S(u, v)$ 的控制网格.

2) n 次三角 Bézier 曲面

$$T(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} t_{i,j} B_{i,j}^n(u, v), \quad u, v \geq 0, u + v \leq 1,$$

其中 $B_{i,j}^n(u, v) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} u^i v^j (1-u-v)^{n-i-j}$, $T = \{T_{i,j} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-i\}$ 称为 $T(u, v)$ 的控制网格.

3) Polar 形式定理

对任一 n 次多项式 $F: R^s \rightarrow R^d$, 唯一存在 n 重对称仿射变换 $f: (R^s)^n \rightarrow R^d$, 满足

$$f(\underbrace{u, \dots, u}_n) = F(u), \quad u \in R^s,$$

f 称为 F 的 Polar 形式.

4) Polar 形式的 Bézier 曲线

给定定义在 $\Delta = [r, s]$ 上的 n 次 Bézier 曲线: $F: R \rightarrow R^3, \forall u \in R, u = \frac{s-u}{s-r}r + \frac{u-r}{s-r}s$, 令 $r(u) = \frac{s-u}{s-r}, s(u) = \frac{u-r}{s-r}$, 则 $u \in [r, s] \Leftrightarrow 0 \leq r(u), s(u) \leq 1$, 且 $r(u) + s(u) = 1, u = r(u)r + s(u)s$. 设 f 是 F 的 Polar 形式

$$\begin{aligned} F(u) &= f(\underbrace{u, \dots, u}_n) = r(u)f(u, \dots, u, r) + s(u)f(u, \dots, u, s) \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^{\Delta, n}(u) f(\underbrace{r, \dots, r}_{n-i}, \underbrace{s, \dots, s}_i), \end{aligned}$$

式中 $B_i^{\Delta, n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} r(u)^{n-i} s(u)^i$.

5) Polar 形式的三角 Bézier 曲面

n 次三角 Bézier 曲面: $F: R^2 \rightarrow R^3$ 定义在 $\Delta = \Delta(r, s, t)$ 上. $\forall u \in R^2$, 设 u 关于 $\Delta(r, s, t)$ 的重心坐标为 $r(u), s(u), t(u)$, 即 $u = r(u)r + s(u)s + t(u)t, 0 \leq r(u), s(u), t(u) \leq 1$,

$r(u) + t(u) + s(u) = 1$. 设 f 是 F 的 Polar 形式

$$F(u) = f(\underbrace{u, \dots, u}_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} B_{i,j,k}^{\Delta,n}(u) f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k),$$

式中 $B_{i,j,k}^{\Delta,n} = \frac{n!}{i!j!k!} r(u)^i s(u)^j t(u)^k$, $i + j + k = n$.

注: 这里的 $u, r, s, t \in R^2$; $r(u), s(u), t(u) \in R$.

6) Polar 形式的张量积 Bézier 曲面

$m \times n$ 次 Bézier 曲面 $F: R \times R \rightarrow R^3$ 定义在 $[r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$ 上类似于 Bézier 曲线的情况, $\forall u \in R$, $u = \frac{r_2-u}{r_2-r_1}r_1 + \frac{u-r_1}{r_2-r_1}r_2$, 令 $r_1(u) = \frac{r_2-u}{r_2-r_1}$, $r_2(u) = \frac{u-r_1}{r_2-r_1}$. 则 $u \in [r_1, r_2] \Leftrightarrow 0 \leq r_1(u), r_2(u) \leq 1$. 同样, $v = s_1(v)s_1 + s_2(v)s_2$, 其中 $s_1(v) = \frac{s_2-v}{s_2-s_1}$, $s_2(v) = \frac{v-s_1}{s_2-s_1}$, 设 f 是 F 的 Polar 形式

$$\begin{aligned} F(u, v) &= f(\underbrace{u, \dots, u}_m, \underbrace{v, \dots, v}_n) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^{\Delta u, m}(u) B_j^{\Delta v, n}(v) f(\underbrace{r_1, \dots, r_1}_{m-i}, \underbrace{r_2, \dots, r_2}_i, \underbrace{s_1, \dots, s_1}_{n-j}, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_j) \end{aligned}$$

式中的 $B_i^{\Delta u, m}(u) = \frac{m!}{i!(m-i)!} r_1(u)^{m-i} r_2(u)^i$, $B_j^{\Delta v, n}(v) = \frac{n!}{j!(n-j)!} s_1(v)^{n-j} s_2(v)^j$.

3. 三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面之间的相互转化

有了前面的准备工作, 在这一小节里, 我们具体给出三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面之间的相互转化公式

1) 从四边 Bézier 曲面到三角 Bézier 曲面的转化.

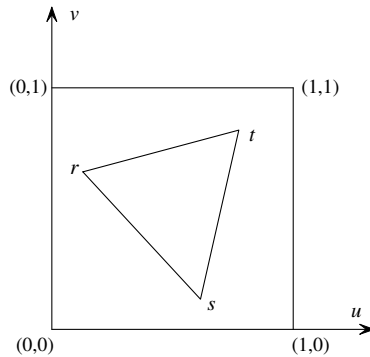


图 1 在四边形参数域内取三角形 $\Delta(r, s, t)$

已知 $m \times n$ 次四边 Bézier 曲面

$$F(p) = F(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1,$$

$f(\underbrace{u, \dots, u}_m; \underbrace{v, \dots, v}_n)$ 是 F 的 Polar 形式, 在 F 的参数域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 取一三角形 $\Delta = \Delta(r, s, t)$, r, s, t 的坐标分别为: $(u_r, v_r), (u_s, v_s), (u_t, v_t)$. 现在求以三角形 Δ 为参数域的三角 Bézier 曲面, 要求其原来的四边 Bézier 曲面在同一个参数点对应同样的函数值. 具体的算法步骤:

(i) 构造由 $\Delta(r, s, t)$ 到 $\Delta(r, s, t)$ 的恒等映射 $G(p) = p$, 要求 $G(p)$ 用三角 Bézier 曲面形式表示 $\forall p \in R^2$, 设 p 关于 $\Delta(r, s, t)$ 的重心坐标为 $r(p), s(p), t(p)$, 令 $G(p) = p = r(p)r + s(p)s + t(p)t$, 则 $G(p)$ 即满足上述要求. p 关于原坐标系的横坐标 u_p 可表示为: $u_p = r(p)u_r + s(p)u_s + t(p)u_t$, 同样, $v_p = r(p)v_r + s(p)v_s + t(p)v_t$.

(ii) 利用 F 的 Polar 形式 f , 计算 $H(p) = F(G(p)) = F(p)$ 的控制顶点, 由此得到的控制顶点就是要求的三角 Bézier 曲面的控制顶点

$$H(p) = F(G(p)) = F(u_p, v_p) = f(\underbrace{u_p, \dots, u_p}_m; \underbrace{v_p, \dots, v_p}_n).$$

利用 $u_p = r(p)u_r + s(p)u_s + t(p)u_t$, $v_p = r(p)v_r + s(p)v_s + t(p)v_t$ 和 Polar 形式的性质

$$\begin{aligned} F(u_p, v_p) &= f(\underbrace{u_p, \dots, u_p}_m; \underbrace{v_p, \dots, v_p}_n) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \frac{m!}{i!j!k!} r^i(p) s^j(p) t^k(p) f(\underbrace{u_r, \dots, u_r}_i; \underbrace{u_s, \dots, u_s}_j; \underbrace{u_t, \dots, u_t}_k; \underbrace{v_p, \dots, v_p}_n) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{i'=0}^n \sum_{j'=0}^{n-i'} \frac{m!}{i!j!k!} \frac{n!}{i'!j'!k'!} r^{i+i'}(p) s^{j+j'}(p) t^{k+k'}(p) f(i, j, k; i', j', k'), \end{aligned}$$

$f(i, j, k; i', j', k')$ 是 $f(\underbrace{u_r, \dots, u_r}_i; \underbrace{u_s, \dots, u_s}_j; \underbrace{u_t, \dots, u_t}_k; \underbrace{v_r, \dots, v_r}_{i'}; \underbrace{v_s, \dots, v_s}_{j'}; \underbrace{v_t, \dots, v_t}_{k'})$ 简单记法,

上面式子中的 $i + j + k = m, i' + j' + k' = n$.

令 $B_{I,J,K}^{\Delta, m+n} = \frac{(m+n)!}{I!J!K!} r^I(p) s^J(p) t^K(p), I + J + K = m + n$, 则 $B_{I,J,K}^{\Delta, m+n}$ 对应的控制顶点为

$$f_{I,J,K} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{i'=0}^n \sum_{j'=0}^{n-i'} \frac{m!n!I!J!K!}{(m+n)!i!j!k!i'!j'!k'!} f(i, j, k; i', j', k').$$

$H(p) = F(p)$ 就可以表示为 $m + n$ 次三角 Bézier 曲面形式

$$H(p) = H(r(p), s(p), t(p)) = \sum_{I=0}^{m+n} \sum_{J=0}^{m+n-I} f_{I,J,K} B_{I,J,K}^{\Delta, m+n}.$$

2) 从三角 Bézier 曲面到四边 Bézier 曲面的转化

已知 n 次三角 Bézier 曲面 $F(p)$ 定义在 $\Delta = \Delta(r, s, t)$ 上, p 关于 Δ 的重心坐标为: $r(p), s(p), t(p)$. 即: $p = r(p)r + s(p)s + t(p)t$

$$F(p) = F(r(p), s(p), t(p)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} f_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(r(p), s(p), t(p)),$$

以 r 为原点, rs 为 u 轴, rt 为 v 轴建立仿射坐标系, 记 r 点的坐标为 $(0,0)$, s 点的坐标为 $(1,0)$, t 点的坐标为 $(0,1)$, 记以 $(1,1)$ 为坐标的点为 w , 现在求以四边形 $rswt$ 为参数域的四边 Bézier 曲面, 要求其原来给定的三角 Bézier 曲面在 Δ 内的同一点对应同样的函数值.

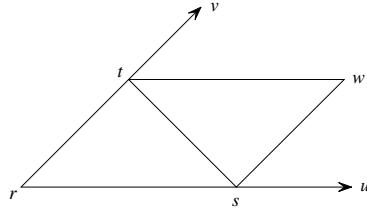


图 2 参数域由 $\Delta(r, s, t)$ 扩展为四边形 $rswt$

具体的算法步骤:

(i) 构造从四边形 $rswt$ 到四边形 $rswt$ 的恒等映射 $G(p) = p$, 要求 $G(p)$ 用四边 Bézier 曲面形式表示

$$G(p) = G(u, v) = (1 - u)(1 - v)r + u(1 - v)s + uvw + (1 - u)vt.$$

(ii) 利用 F 的 Polar 形式 f , 计算 $H(p) = F(G(p)) = F(p)$ 的控制顶点, 由此得到的控制顶点就是要求的四边 Bézier 曲面的控制顶点

$$\begin{aligned} H(p) &= f(p) = f(\underbrace{p, \dots, p}_n) \\ &= (1 - u)(1 - v)f(\underbrace{r, p, \dots, p}_{n-1}) + u(1 - v)f(\underbrace{s, p, \dots, p}_{n-1}) + uvf(\underbrace{w, p, \dots, p}_{n-1}) + (1 - u)vf(\underbrace{t, p, \dots, p}_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-j} \frac{n!}{i!j!k!(n-i-j-k)!} (1 - u)^{n-j-k} u^{j+k} (1 - v)^{i+j} v^{n-i-j} f(r^i s^j w^k t^{n-i-j-k}), \end{aligned}$$

式中 $f(r^i s^j w^k t^{n-i-j-k})$ 是 $f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{w, \dots, w}_k, \underbrace{t, \dots, t}_{n-i-j-k})$ 的简单表示. 令 $K = j + k$,

$$I = i + j$$

$$B_K^n(u) = \frac{n!}{K!(n-K)!} u^K (1 - u)^{n-K}, \quad B_I^n(v) = \frac{n!}{I!(n-I)!} (1 - u)^I u^{n-I},$$

则 $B_K^n(u)B_I^n(v) = \frac{n!}{(j+k)!(n-j-k)!} u^{j+k} (1 - u)^{n-j-k} \frac{n!}{(i+j)!(n-i-j)!} (1 - v)^{i+j} v^{n-i-j}$, 它所对应的控制顶点为

$$f_{K,I} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-j} \frac{(j+k)!(n-j-k)!(i+j)!(n-i-j)!}{n!i!j!k!(n-i-j-k)!} f(r^i s^j w^k t^{n-i-j-k})$$

$H(p) = F(p)$ 就可以表示为 $n \times n$ 次四边 Bézier 曲面形式

$$H(p) = H(u, v) = \sum_{K=0}^n \sum_{I=0}^n f_{K,I} B_K^n(u) B_I^n(v).$$

4 结 论

三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面之间的相互转化具有很强的实用价值, 例如可以用来做曲面的剪裁. 以前针对这个问题工作都是用原来曲面的控制顶点计算得到新曲面的控制顶点, 而本文却是利用了原来曲面函数的 Polar 形式直接生成新的控制顶点, Polar 形式和 Bernstein 基形式的混合使用充分利用了 Polar 形式的多元仿射性, 简化了证明过程.

参考文献:

- [1] BRUECKNER I. *Construction of Bézier points of quadrilaterals from those of triangles* [J]. *Comput. Aided Design*, 1982, **12**(1): 21–24.
- [2] GOLDMAN R N, FILIP D J. *Conversion from Bézier rectangles to Bézier triangles* [J]. *Comput. Aided Design*, 1987, **19**(1): 25–27.
- [3] HU Shi-min. *Conversion between triangular and rectangular Bézier patches* [J]. *Comput. Aided Geom. Design*, 2001, **18**(7): 667–671.
- [4] DEROSE T D. *Compositing Bézier simplexes* [J]. *ACM transaction on Graphics*, 1988, **7**(3): 198–221.
- [5] DEROSE T D, GOLDMAN R N, HAGEN H. et al. *Functional Composition Algorithms via Blossoming* [J]. 1993, *TOG*: 113–135.

Conversion between Triangular and Rectangular Bézier Surfaces

LIU Zhi-ping, WANG Ren-hong

(Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: Bézier surfaces are widely used in CAGD. There are two main types of Bézier surfaces, namely the rectangular Bézier patch and the triangular Bézier patch. The two patches have different basic functions, but they share many common properties, so the conversion of one type to the other has aroused the interest of many researches. This paper deals with this problem by use of functional composition. The polar form is used as the representation for one of the composite functions, whereas the Bernstein representation is used for the other function.

Key words: triangular Bézier surface; rectangular Bézier surface; functional composition; polar form.