第26卷第3期 数学研究与评论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0583-08 **文献标识码**: **A**

受迫 Liénard 方程周期解的存在唯一性

王 文[1], 沈祖和[2]
(1. 徐州工程学院计算科学系, 江苏 徐州 221008; 2. 南京大学数学系, 江苏 南京 210093)
(E-mail: ww@xzit.edu.cn)

摘 要: 本文利用整体反函数理论证明了受迫 Liénard 方程 $x''+f(x)x'+g(t,x)=e(t)$ 周期解的存在唯一性, 推广和改进了现有的结果.

关键词: Liénard 方程; 周期解; 存在唯一性
MSC(2000): 34C25
中图分类: O175.1

1 引 言

本文考虑受迫 Liénard 方程

$$x''+f(x)x'+g(t,x)=e(t) \tag{1.1}$$

和它的特例 Duffing 方程

$$x''+Cx'+g(t,x)=e(t) \tag{1.2}$$

在区间 $[0,2\pi]$ 上的周期边值问题, 即

$$x(0)-x(2\pi)=x'(0)-x'(2\pi)=0 \tag{1.3}$$

众所周知, Liénard 方程自提出以来, 就受到众多学者的重视, Liénard 方程之所以重要, 一方面由于它本身具有实际的物理背景; 另一方面很多其他形式的方程组, 往往通过一些坐标变化转化成 Liénard 方程的等价形式达到目的, 因此 Liénard 方程就成为一般平面系统的一个突破口 [1].

关于 Liénard 方程周期解的存在性已有众多结果, 近年来大部分借助 Fucik 谱讨论调和解的存在性, 如文 [2] 等, 然而关于周期解的存在唯一性, 除 Reissig 利用压缩原理较完整地给出 Liénard 方程在满足严格非共振条件结果, 这方面的研究非常罕见 [3].

此外, Reissig[4] 证明了方程

$$x''+f(x)x'+g(x)=e(t) \tag{1.4}$$

至少有一个周期解; Mawhin 和 Ward[5] 证明了方程 $x''+f(x)x'+g(t,x)=0$ 存在周期解; 文 [3] 利用重合度理论得到 Liénard 方程在 $f(x)\equiv C$ 时, 即 Duffing 方程周期解的存在唯一

收稿日期: 2004-06-09; **接受日期**: 2005-07-16
基金项目: 徐州工程学院科研课题 (200507)

性；林发兴 [6] 利用指数二分性得到了 Liénard 方程 (1.4) 周期解的存在性；而对于 Liénard 方程 $x''+f(x)x'+g(x)=0$ 在一定条件下利用 Poincare-Bendixson 环域定理证明极限环存在，然后再利用可微分函数的全微分沿闭路的线积分证明极限环唯一，如任保经 [7] 等.

本文应用整体反函数理论研究受迫 Liénard 方程 (1.1),(1.3) 周期解的存在唯一性，得到了存在唯一新的充分条件. 而对其特例 Duffing 方程 (1.2),(1.3) 周期解的存在唯一性结论，与已知的一些结果如文 [8] 等也有所不同.

2 预备知识

引理 1[9] 设 $C^{n\times n}$ 和 C_n 分别表示 n 阶复方阵和 n 维复向量， $A:[0,2\pi]\to C^{n\times n}$ 连续，对任意连续的 $g:[0,2\pi]\to C_n$, 线性周期系统

$$w'(t)=A(t)w(t)+g(t), \tag{2.1}$$

$$w(0)=w(2\pi) \tag{2.2}$$

有唯一解的充要条件是 $I-W(2\pi)$ 可逆，这里 $W(t)$ 是 $(2.1),(2.2)$ 对应的齐次方程

$$w'(t)=A(t)w(t), \tag{2.3}$$

$$w(0)=I \tag{2.4}$$

的基本解矩阵. 此外线性系统 $(2.1),(2.2)$ 的解

$$w(t)=W(t)\{[I-W(2\pi)]^{-1}W(2\pi)\int_0^{2\pi}W^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s+\int_0^{t}W^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s\} \tag{2.5}$$

现在考虑积矩阵特征值与奇异值之间的关系.

引理 2 设 $A_i, i=1,2,\cdots,n$ 均为方阵，那么

$$\prod_{i=1}^{n}\min\sigma(A_i)\le|\lambda(\prod_{i=1}^{n}A_i)|\le\prod_{i=1}^{n}\max\sigma(A_i),$$

这里 $\sigma(A_i)$ 表示 A_i 的奇异值， $\lambda(\prod_{i=1}^{n}A_i)$ 表示积矩阵 $\prod_{i=1}^{n}A_i$ 的特征值.

证明 由数值代数熟知的结论知

$$\rho(\prod_{i=1}^{n}A_i)\le\|\prod_{i=1}^{n}A_i\|_2\le\prod_{i=1}^{n}\|A_i\|_2=\prod_{i=1}^{n}\max\sigma(A_i)$$

其中 $\rho(\prod_{i=1}^{n}A_i)$ 表示 $\prod_{i=1}^{n}A_i$ 的谱半径，所以

$$|\max\lambda(\prod_{i=1}^{n}A_i)|\le\prod_{i=1}^{n}\max\sigma(A_i). \tag{2.6}$$

同理

$$\rho((\prod_{i=1}^{n}A_i)^{-1})\le\|(\prod_{i=1}^{n}A_i)^{-1}\|_2\le\prod_{i=1}^{n}\|A_i^{-1}\|_2\le\prod_{i=1}^{n}\max\sigma((A_i)^{-1}).$$

所以

$$|\min\lambda(\prod_{i=1}^{n}A_i)|\geq\prod_{i=1}^{n}\min\sigma(A_i). \tag{2.7}$$

由 (2.6), (2.7) 得

$$\prod_{i=1}^{n}\min\sigma(A_i)\leq|\lambda(\prod_{i=1}^{n}A_i)|\leq\prod_{i=1}^{n}\max\sigma(A_i). \tag{2.8}$$

引理 3[10] 设 X,Y 为 Banach 空间， $N:D(L)\subset X\to Y$ 是连续 Frechet 算子，存在 $K>0$, 使得

$$\|N'(u)v\|_Y\leq K\|v\|_X,\quad \forall u,v\in D(L).$$

又设 $L:D(L)\subset X\to Y$ 是线性稠定算子. 如果 $L+N'(u)$ 在 Y 上处处可逆, 且存在常数 $C>0$ 使得

$$\|(L+N'(u))^{-1}y\|_X\leq C\|y\|_Y,\quad \forall u\in D(L),y\in Y,$$

那么 $L+N$ 是 $D(L)$ 到 Y 上的同胚.

3. 主要结果

设 $C[0,2\pi]$ 表示 $[0,2\pi]$ 上的连续函数空间； $C_2[0,2\pi]=\{w|[0,2\pi]\to C_2$ 且 w 连续 $\}$, 范数为

$$\|w\|=\sup\{\|w(t)\||t\in[0,2\pi]\};$$

$$\widetilde{C}_2[0,2\pi]=\{w\in C_2[0,2\pi]\|w(0)=w(2\pi)\},$$

显然 $\widetilde{C}_2[0,2\pi]$ 是 $C_2[0,2\pi]$ 中的闭子空间.

假设

(H_1) $f:R\to R$ 连续， $g:R\times R\to R$ 关于 t 连续且以 2π 为周期，关于 x 连续可微， e 关于 t 连续且周期为 2π.

(H_2) 存在常数 $b>0$ 使得 $f(x)\geq 2b,\forall x\in C[0,2\pi]$; 或存在常数 $b<0$ 使得 $f(x)\leq 2b,\forall x\in C[0,2\pi]$.

(H_3) $-|b|<-g'_x(t,x)+bf(x)-b^2+1<|b|,\forall x\in C[0,2\pi]$.

(H_2) 和 (H_3) 可以用下面更弱的条件代替:

(H_4) 若存在常数 b 和 $c_1<0$, 使得

$$\int_0^{2\pi}[-f(x)+\sqrt{(f(x)-2b)^2+a^2(t)}]\mathrm{d}t\leq c_1,\quad \forall x\in C[0,2\pi];$$

或存在常数 b 和 $c_2>0$, 使得

$$\int_0^{2\pi}[-f(x)-\sqrt{(f(x)-2b)^2+a^2(t)}]\mathrm{d}t\geq c_2,\quad \forall x\in C[0,2\pi],$$

这里 $a(t)=-g'_x(t,x(t))+bf(x(t))-b^2+1$.

事实上, (H_2) 和 (H_3) 成立, 即若存在常数 $b>0$, 使得 $f(x)\ge 2b$ 和 $a^2(t)\le b^2$, 则

$$\int_0^{2\pi}[-f(x)+\sqrt{(f(x)-2b)^2+a^2(t)}]\mathrm{d}t\le\int_0^{2\pi}(-b)\mathrm{d}t=-2\pi b<0;$$

或若存在常数 $b<0$ 使得 $f(x)\le 2b$ 和 $a^2(t)\le b^2$, 则

$$\int_0^{2\pi}[-f(x)-\sqrt{(f(x)-2b)^2+a^2(t)}]\mathrm{d}t\ge\int_0^{2\pi}(-b)\mathrm{d}t=-2\pi b>0.$$

即 (H_4) 成立.

下面考虑问题 (1.1),(1.3) 周期解的存在唯一性.

令 $F(x)=\int_0^{2\pi}(f(s)-b)\mathrm{d}s$, 作变换 $u=x, v=x'+F(x)$, 则系统 (1.1) 等价于

$$\begin{cases} u'=-F(u)+v,\\ v'=-g(t,u)+bF(u)-bv+e(t).\end{cases}$$

令 $w=(u,v)^T, E(t)=(0,e(t))^T$, 和

$$R(t,w)=\begin{pmatrix} -F(u)+v\\ -g(t,u)+bF(u)-bv\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

则 (1.1), (1.3) 等价于

$$\begin{cases} w'=R(t,w)+E(t),\\ w(0)=w(2\pi).\end{cases} \tag{3.2}$$

由 (3.1) 得,

$$\frac{\partial R}{\partial w}(t,w)=\begin{pmatrix} -f(u)+b & 1\\ -g'_u(t,u)+bf(u)-b^2 & -b\end{pmatrix}.$$

取固定的 $w_0\in C_2[0,2\pi]$, 定义

$$A(t)=\frac{\partial R}{\partial w}(t,w_0(t))=\begin{pmatrix} -f(u_0)+b & 1\\ -g'_u(t,u_0)+bf(u_0)-b^2 & -b\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

考虑线性方程

$$w'=A(t)w+E(t). \tag{3.4}$$

先讨论 (3.4) 对应的齐次问题

$$w'(t)=A(t)w(t). \tag{3.5}$$

显然 (3.5) 有一个基本解矩阵 $W(t)$ 满足

$$\begin{cases} W'(t)=A(t)W(t),\\ W(0)=I.\end{cases} \tag{3.6}$$

定理 1 假设 (H_1)–(H_3) 成立, 那么 $I-W(2\pi)$ 可逆, 且 $\|(I-W(2\pi))^{-1}\|\le C$, 这里 $C>0$ 是一个常数.

证明 首先把区间 $[0,2\pi]$ N 等分, 每个子区间的长度 $h=\frac{2\pi}{N}$, 端点 $t_j=jh, j=0,1,2,\cdots,N$. (3.6) 的离散方程为

$$\frac{W(t_{j+1})-W(t_j)}{h}=A(t_j)W(t_j),\quad j=0,1,2,\cdots,N-1.$$

由此得

$$W(t_N)=\prod_{j=0}^{N-1}(I+A(t_j)h). \tag{3.7}$$

其次估计 $W(t_N)=W(2\pi)$ 的特征值，设 $A^H(t_j)+A(t_j)$ 的特征值为 $\lambda(t_j), j=0,1,2,\cdots,N-1$, 这里 $A^H(t_j)$ 是 $A(t_j)$ 的共轭转置矩阵，由 (3.3) 知

$$A^H(t_j)+A(t_j)=\begin{pmatrix} -2f(u_0)+2b & a(t_j) \\ a(t_j) & -2b \end{pmatrix},$$

其中 $a(t_j)=-g'_u(t_j,u_0(t_j))+bf(u_0(t_j))-b^2+1$. 由 (H_3) 知

$$a^2(t_j)<b^2. \tag{3.8}$$

于是

$$\lambda(t_j)=-f(u_0)\pm\sqrt{(f(u_0)-2b)^2+a^2(t_j)}. \tag{3.9}$$

应用 (H_2), 如果 $f(u_0)\geq 2b>0$, 那么

$$b^2\leq 2bf(u_0)-3b^2. \tag{3.10}$$

由 (3.8)(3.9) 和 (3.10), 得

$$\begin{aligned}\max\lambda(t_j)&<-f(u_0)+\sqrt{(f(u_0)-2b)^2+2bf(u_0)-3b^2}\\&=-f(u_0)+\sqrt{(f(u_0)-b)^2}=-b<0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

如果 $f(u_0)\leq 2b<0$, 那么

$$b^2\leq 2bf(u_0)-3b^2. \tag{3.12}$$

由 (3.8)(3.9) 和 (3.12), 得

$$\begin{aligned}\min\lambda(t_j)&>-f(u_0)-\sqrt{(f(u_0)-2b)^2+2bf(u_0)-3b^2}\\&=-f(u_0)-\sqrt{(f(u_0)-b)^2}=-b>0.\end{aligned} \tag{3.13}$$

再设 $\mu(t_j)$ 是 $(I+A(t_j)h)^H(I+A(t_j)h)$ 的特征值，由

$$(I+A(t_j)h)^H(I+A(t_j)h)=I+(A^H(t_j)+A(t_j))h+A^H(t_j)A(t_j)h^2$$

知，当 h 充分小时， $\mu(t_j)=1+\lambda(t_j)h+o(h^2)$. 由 (3.11)(3.13) 得，当 $f(u_0)\geq 2b>0$ 时，$\max\lambda(t_j)<-b<0$, 于是

$$\max\mu(t_j)\leq 1-bh,\quad 0<|h|\ll 1;$$

当 $f(u_0)\leq 2b<0$ 时， $\min\lambda(t_j)>-b>0$, 于是

$$\min\mu(t_j)\geq 1-bh,\quad 0<|h|\ll 1.$$

注意到 $I+(A^H(t_j)+A(t_j))h$ 为 Hermitian 矩阵，故应用引理 2 得，当 $\max\lambda(t_j)<-b<0$ 时，

$$|\lambda(W(2\pi))|\leq\prod_{j=0}^{N-1}(1-bh)^{\frac{1}{2}}=\exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}bh)+o(h)=exp(-\pi b)+o(h). \tag{3.14}$$

当 $\min\lambda(t_j)>-b>0$ 时,

$$|\lambda(W(2\pi))|\geq\prod_{j=0}^{N-1}(1-bh)^{\frac{1}{2}}=\exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}bh)+o(h)=\exp(-\pi b)+o(h).\tag{3.15}$$

由 (3.14),(3.15) 知，当 $h\to 0$ 时， 0 不是 $I-W(2\pi)$ 的特征值，因此 $I-W(2\pi)$ 可逆且存在常数 $C>0$, 使得 $\|(I-W(2\pi))^{-1}\|\leq C$. □

定理 2 假设 (H_1)–(H_3) 成立，那么问题 (1.1), (1.3) 存在唯一周期解.

证明 设 $Lw=-w', D(L)=\{w\in\widetilde{C}_2[0,2\pi]$ 且 w' 连续 $\}$, 易知 L 是 $\widetilde{C}_2[0,2\pi]$ 上的稠定闭算子.

再设 $N:C_2[0,2\pi]\to C_2[0,2\pi], (Nw)(t)=R(t,w(t)), w\in C_2[0,2\pi]$, 由 $f(x)$ 和 $g(t,x)$ 的假设知，$R(t,w)$ 在 w 处的 Frechet 导数 $\frac{\partial R}{\partial w}(t,w)$ 在 $[0,2\pi]\times C_2[0,2\pi]$ 上连续，且存在常数 $K>0$, 使得 $\|\frac{\partial R}{\partial w}(t,w)\|\leq K, \forall w\in C_2[0,2\pi], t\in[0,2\pi]$, 从而

$$(N'(w)y)(t)=\frac{\partial R}{\partial w}(t,w)y(t),\forall w\in C_2[0,2\pi],\forall y\in C_2[0,2\pi],$$

即 N 是连续 Frechet 可微且 $\|N'(w)\|\leq K,\forall w\in C_2[0,2\pi]$.

线性方程 (3.4) 可改写为 $[L+N'(w_0)]w=-E(t)$. 由定理 1 和引理 1 知 $[L+N'(w_0)]^{-1}$ 存在且存在常数 $C>0$, 使得

$$\|[L+N'(w_0)]^{-1}\|\leq C.$$

运用引理 3 可知， (3.2) 存在唯一周期解，即受迫 Liénard 方程 (1.1), (1.3) 存在唯一周期解. □

定理 3 假设 (H_1), (H_4) 成立，那么问题 (1.1), (1.3) 存在唯一周期解.

证明 类似于定理 1 的证明， $\max\lambda(t_j)=-f(u_0)+\sqrt{(f(u_0)-2b)^2+a^2(t_j)}$, 于是

$$\max\mu(t_j)=1+\max\lambda(t_j)h+o(h^2),0<|h|\ll 1.$$

而

$$\min\lambda(t_j)=-f(u_0)-\sqrt{(f(u_0)-2b)^2+a^2(t_j)},$$

于是

$$\min\mu(t_j)=1+\min\lambda(t_j)h+o(h^2),0<|h|\ll 1.$$

注意到 $I+(A^H(t_j)+A(t_j))h$ 为 Hermitian 矩阵，故应用引理 2 和 (H_4) 可得:

$$|\lambda(W(2\pi)|\leq\prod_{j=0}^{N-1}(\max\mu(t_j))^{\frac{1}{2}}=\exp(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\max\lambda(t_j)h)+o(h).$$

令 $h\to 0$, 得

$$|\lambda(W(2\pi)|\leq\exp(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-f(x)+\sqrt{(f(x)-2b)^2+a(t)^2}]\mathrm{d}t)\leq\exp(\frac{c_1}{2}).\tag{3.16}$$

应用引理 2 和 (H_4) 又可得:

$$|\lambda(W(2\pi)|\geq\prod_{j=0}^{N-1}(\min\mu(t_j))^{\frac{1}{2}}=\exp(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\min\lambda(t_j)h)+o(h).$$

令 $h\to 0$, 得

$$|\lambda(W(2\pi)|\geq \exp(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-f(x)-\sqrt{(f(x)-2b)^2+a(t)^2}]\mathrm{d}t)\geq \exp(\frac{c_2}{2}). \tag{3.17}$$

由 (3.16), (3.17) 知，当 $h\to 0$ 时， 0 不是 $I-W(2\pi)$ 的特征值，因此 $I-W(2\pi)$ 可逆且存在常数 $C>0$, 使得 $\|(I-W(2\pi))^{-1}\|\leq C$, 即定理 1 成立，由定理 2 的证明可知，定理 3 成立.

注 1 由条件 (H_4) 弱于 (H_2) 和 (H_3) 易知，定理 2 可看作定理 3 的推论.

应用定理 2 知下述推论成立.

推论 1 设 $g(t,x)$ 关于 t 连续且以 2π 为周期, 关于 x 连续可微； $e(t)$ 关于 t 连续且以 2π 为周期. 如果

$$1-\frac{|C|}{2}+\frac{C^2}{4}\leq g_x'(t,x)\leq 1+\frac{|C|}{2}+\frac{C^2}{4}\quad (C\neq 0),$$

那么 Duffing 方程 (1.2),(1.3) 存在唯一周期解.

应用定理 3 知下述推论成立.

推论 2 设 $g(t,x)$ 关于 t 连续且以 2π 为周期, 关于 x 连续可微； $e(t)$ 关于 t 连续且以 2π 为周期. 如果存在 $c_1<0$ 使得

$$\int_0^{2\pi}(-C+|-g_x'+\frac{C^2}{4}+1|)\mathrm{d}t\leq c_1;$$

或存在 $c_2>0$ 使得

$$\int_0^{2\pi}(-C-|-g_x'+\frac{C^2}{4}+1|)\mathrm{d}t\geq c_2\ (C\neq 0),$$

那么 Duffing 方程 (1.2), (1.3) 存在唯一周期解.

注 2 若将 $(H_1)-(H_4)$ 中的 $f(x)$ 换成 $f(x,x')$, 将 $\forall x\in C[0,2\pi]$ 换成 $\forall x\in C^1[0,2\pi]$, 则定理 2, 定理 3 对广义 Liénard 方程

$$x''+f(x,x')x'+g(t,x)=e(t)$$

同样成立.

下面给出一个应用实例.

例 考虑方程 $x''(t)+x'(t)+x(t)=e(t)$, 应用推论 1, 这里 $C=1,g(t,x)=x$, 满足条件

$$1-\frac{|C|}{2}+\frac{C^2}{4}\leq g_x'(t,x)\leq 1+\frac{|C|}{2}+\frac{C^2}{4},$$

故存在唯一周期解；由文 [8] 的定理 1, 若存在两个几乎处处连续的实函数 $a(t),b(t)$, 使得

$$n^2\leq a(t)\leq g_x'(t,x)\leq b(t)\leq (n+1)^2$$

且在 $[0,2\pi]$ 的一个正则集上 $a(t)>n^2,b(t)<(n+1)^2$, 则方程 (1.6) 存在唯一的 $2\pi-$ 周期解. 例 1 中 $g(t,x)=x$ 显然不满足上述条件，但例 1 对任意连续具有 2π 周期的函数 $e(t)$ 显然存在唯一周期解.

参考文献：

[1] 吴洪武. 近几年 Liénard 方程极限环研究的若干动态和思考 [J]. 中山大学研究生学刊 (自然版), 2000, **21**(4): 26–30.

WU Hong-wu. *The develoment and thinking of Liénard equation in the recent years* [J]. Journal of the Graduates Sun Yat-seu University (Natural Sciences), 2000, **21**(4): 26–30. (in Chinese)
[2] DRABEK P, INVERINZZI S. *On the periodic B V. P for Forced Duffing equation with jumping nonlinearity* [J]. Nonlinear Anal., 1986, **10**(7): 643–650.
[3] 陈红斌，李开泰．关于 Liénard 方程周期解的存在唯一性 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2001, **22**(2): 237–242.
CHEN Hong-bin, LI Kai-tai. *Existence and uniqueness for the periodic solution of the Liénard equation* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 2001, **22**(2): 237–242. (in Chinese)
[4] REISSIG R. *Über einen allgemeinen typerzwungener nichtlinearer schwingungen zweiter ordnung* [J]. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1974, **56**: 297–302.
[5] MAWHIN J, WARD J R. *Nonuniform nonreasonace conditions at the two first eigenvalue for periodic solutions of forced Liénard and Duffing equations* [J]. Rock. Moun. J. Math., 1982, **12**: 643–654.
[6] 林发兴． Liénard 方程周期解，概周期解的存在性 [J]. 数学学报， 1996, **39**(3): 314–318.
LIN Fa-xing. *Existence of periodic solution or almost periodic solution for Liénard equation* [J]. Acta. Math. Sinica, 1996, **39**(3): 314–318. (in Chinese)
[7] 任保经． Liénard 方程存在唯一，稳定周期解的一个充分条件 [J]. 河南师范大学学报 (自然科学版), 1991, **19**(4): 26–31.
REN Bao-jing. *A sufficient condition for stable and unique periodic solution of Liénard equation* [J]. J. Henan Normal University (Natural Science), 1991, **19**(4): 26–31. (in Chinese)
[8] 李维国，沈祖和． Duffing 方程周期解存在的构造性证明 [J]. 科学通报， 1997, **42**: 1591–1595.
LI Wei-guo, SHEN Zu-he. *A constructive proof of the existence of periodic solutions to the Duffing equation* [J]. Kexue Tongbao, 1997, **42**: 1591–1595. (in Chinese)
[9] HARTMAN P. *Ordinary Differential Equations. Second Edition* [M]. Boston-basel-Stuttgart: Birkhauser, 1982.
[10] BROWN K J, LIN S S. *Periodically perturbed conservative systems and a global inverse function theorem* [J]. Nonlinear Anal., 1980, **4**: 193–201.

The Existence and Uniqueness of Periodic Solution of Forced Liénard Equation

WANG Wen[1], *SHEN Zu-he*[2]
(1. Dept. of Computer Science, Xuzhou Institute of Technology, Jiangsu 221008, China;
2. Dept. of Math., Nanjing University, Jiangsu 210093, China)

Abstract: By using global inverse function theorems this paper proves the existense and uniqueness of periodic solution of forced Liénard equation

$$x'' + f(x)x' + g(t,x) = e(t).$$

The results generalize and improve some known results.

Key words: Liénard equation; periodic solution; existense and uniqueness.