第26卷第3期 数学研究与评论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0571-05 **文献标识码**: **A**

算子的拟相似性与本质谱的性质

苏维钢

(福建师范大学数学与计算机科学学院，福建 福州 350007)

(E-mail: wgsu@fjnu.edu.cn)

摘 要: 设算子 A 和 B 拟相似，本文通过算子谱的精密结构的分析，给出了算子 A 的 Wolf 本质谱、 Kato 本质谱、 Weyl 本质谱以及右本质谱的连通分支与算子 B 的 Wolf 本质谱的某些子集的相交关系，并肯定地回答了 L.A.Fialkow 在文献 [3] 中提出的一个问题.

关键词: 有界线性算子；拟相似；本质谱；连通分支.

MSC(2000): 47A10, 47A11, 47A53

中图分类: O177.7

1 引言、记号和预备知识

算子拟相似的概念，最早是由 B.Sz-Nagy 和 C.Foias[1] 两人提出的．之后， T.B.Hoover[2], L.A.Fialkow[3], D.A.Herrero[4] 等做了有关拟相似性的研究．但至今为止，算子谱、本质谱在何种条件下不因拟相似变换而改变，仍是一个没有完全解决的问题． L.A.Fialkow 在 [3] 中提出一个问题，如果算子 A 和 B 拟相似，是否 $\sigma_{re}(A)$ 的每一个非空开闭子集都与 $\sigma_{le}(B)$ 相交？这是算子拟相似理论中的一个重要问题．本文通过算子谱的精密结构的分析，给出了算子 A 的 Wolf 本质谱、 Kato 本质谱、 Weyl 本质谱以及右本质谱的连通分支与算子 B 的 Wolf 本质谱的某些子集的相交关系．本文证明了如果算子 A 和 B 拟相似，则 $\sigma_{re}(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau\cap\sigma_R(A)\cap\sigma_R(B)\neq\emptyset$. 作为这个结果的推论，本文肯定地回答了 L.A.Fialkow 提出的上述问题．本文的主要结果是定理 2.2,2.7, 推论 2.8, 定理 2.10, 2.11.

设 H 是无限维复 Hilbert 空间， $B(H)$ 表示 H 上有界线性算子全体．对于 $A,B\in B(H)$, 如果存在单射且有稠值域算子 $X,Y\in B(H)$, 使得 $AX=XB$, $BY=YA$, 则称算子 A 和 B 拟相似，记为 $A\sim B$.

对于 $T\in B(H)$, $\sigma(T)$ 表示 T 的谱， $\rho(T)=\mathbf{C}\setminus\sigma(T)$ 表示 T 的预解集．记 $\nu(T)=\dim\mathrm{Ker}(T)$, $\mu(T)=\dim\mathrm{Ker}(T^*)$, 若 $\nu(T)$ 与 $\mu(T)$ 中至少有一个有限，则记 $\mathrm{ind}(T)=\nu(T)-\mu(T)$.$Z$ 表示整数全体． $E=Z\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$. D° 表示平面点集 D 的内点全体， ∂D 表示 D 的边界， $\overline{D}$ 表示 D 的闭包．记 $\Psi_n(T)=\{\lambda\in C:\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ 闭且 $\mathrm{ind}(T-\lambda)=n\},(n\in E)$. $\Psi_{mn}(T)=\{\lambda\in C:\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ 闭且 $\nu(T-\lambda)=m,\mu(T-\lambda)=n\},(m,n=0,1,2,\cdots,\infty)$. $H_n(T)=\{\lambda\in C:\mathrm{ind}(T-\lambda)=n\},(n\in E)$. $H_{mn}(T)=\{\lambda\in C:\nu(T-\lambda)=m,\mu(T-\lambda)=n\},(m,n=0,1,2,\cdots,\infty)$. $\sigma_{le}(T)=\{\lambda\in C:\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ 非闭或 $\nu(T-\lambda)=\infty\}$, $\sigma_{re}(T)=\{\lambda\in C:\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ 非闭或 $\mu(T-\lambda)=\infty\}$, $\sigma_{le}(T)$ 和 $\sigma_{re}(T)$ 分别表示算子 T 的左本质谱和右本质谱． $\sigma_e(T)=\sigma_{le}(T)\cup\sigma_{re}(T)$, 称 $\sigma_e(T)$ 为算子 T 的 Wolf 本质谱． $\sigma_K(T)=\sigma_{le}(T)\cap\sigma_{re}(T)$,

收稿日期: 2004-05-08

基金项目: 国家自然科学基金 (10471025), 福建省自然科学基金 (Z0511019).

称 $\sigma_K(T)$ 为算子 T 的 Kato 本质谱. $\sigma_P^\circ(T)$ 表示算子 T 的具有有限代数重数的孤立特征值全体. $\sigma_B(T)=\sigma(T)\setminus\sigma_P^\circ(T)$, 称 $\sigma_B(T)$ 为算子 T 的 Browder 本质谱. $K(H)$ 表示 H 上紧算子全体, $\sigma_W(T)=\cap_{K\in K(H)}\sigma(T+K)=\sigma_B(T)\setminus(\Psi_\circ(T)\cap\sigma(T)^\circ)$, 称 $\sigma_W(T)$ 为 T 的 Weyl 本质谱. $\sigma_c(T)=\{\lambda\in C:\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ 非闭且 $\nu(T-\lambda)=\mu(T-\lambda)=0\}$, 称 $\sigma_c(T)$ 为算子 T 的连续谱. $\sigma_D(T)=\{\lambda\in C:\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ 非闭 $\}$.

已知 $\sigma(T),\sigma_B(T),\sigma_W(T),\sigma_e(T),\sigma_{le}(T),\sigma_{re}(T),\sigma_K(T)$ 都是非空紧集, $\Psi_n(T)(n\in E)$ 是开集. 由文献 [5], 容易得到如下算子谱的精密结构:

(1) $\mathbf{C}\setminus\sigma(T)$ 的每个有界连通分支 $H(T)$(称为 $\sigma(T)$ 的洞) 是个开集, 而且有 $\sigma(T)=\sigma_e(T)\cup(\cup_{1\le n<\infty}\Psi_n(T))\cup(\cup_{1\le n<\infty}\Psi_{-n}(T))\cup(\Psi_\circ(T)\cap\sigma(T)^\circ)\cup\sigma_P^\circ(T)$.

(2) $\mathbf{C}\setminus\sigma_e(T)$ 的每个有界连通分支 $H(T)$(称为 $\sigma_e(T)$ 的洞) 是个开集, 而且存在 $n(-\infty<n<\infty)$, 使 $H(T)\subset\Psi_n(T)$, 而且有 $\sigma_e(T)=\Psi_\infty(T)\cup\Psi_{-\infty}(T)\cup\Psi_{\infty\infty}(T)\cup\sigma_D(T)$.

(3) $\mathbf{C}\setminus\sigma_K(T)$ 的每个有界连通分支 $H(T)$(称为 $\sigma_K(T)$ 的洞) 是个开集, 而且存在 $n(-\infty\le n\le\infty)$, 使 $H(T)\subset\Psi_n(T)$, 而且有 $\sigma_K(T)=\Psi_{\infty\infty}(T)\cup\sigma_D(T)$.

(4) $\Psi_\circ(T)\cap\sigma(T)=(\Psi_\circ(T)\cap\sigma(T)^\circ)\cup\sigma_P^\circ(T)$.

(5) $\sigma_W(T)=\sigma_e(T)\cup(\cup_{1\le n<\infty}\Psi_n(T))\cup(\cup_{1\le n<\infty}\Psi_{-n}(T))$.

2 结果及其证明

引理 2.1[4] 设 $A\sim B$, 则 $\sigma_e(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau\cap\sigma_e(B)\neq\emptyset$.

定理 2.2 设 $A\sim B$, V_A 是 $\sigma_e(A)$ 的非空闭子集, V_B 是 $\sigma_e(B)$ 的非空闭子集, $\partial(\sigma_e(A)\setminus V_A)\subset V_B$. 若存在 $\mathbf{C}$ 的一个开集 D, 满足:

(a). $(\sigma_e(B)\cap V_A)\setminus V_B\subset D\subset\sigma_e(A)$;

(b). $\partial D\subset V_B$,

则对于 V_A 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau\cap V_B\neq\emptyset$.

证明 设 τ_1 是 V_A 的任意一个非空开闭子集, 先证 $\tau_1\cap V_B\neq\emptyset$.

若 τ_1 不是 $\sigma_e(A)$ 的开子集, 则存在 $t\in\tau_1$ 以及点列 $\{t_n\}\subset\sigma_e(A)\setminus\tau_1$, 使得 $\lim_{n\to\infty}t_n=t$. 由于 τ_1 是 V_A 的开子集, 因此可以假设 $\{t_n\}\subset\sigma_e(A)\setminus V_A$. 又 $t\in\tau_1\subset V_A$, 故 $t\notin\sigma_e(A)\setminus V_A$, 于是 $t\in\partial(\sigma_e(A)\setminus V_A)\subset V_B$, 所以 $t\in\tau_1\cap V_B$, 因此 $\tau_1\cap V_B\neq\emptyset$.

若 τ_1 是 $\sigma_e(A)$ 的开子集, 由于 τ_1 是闭集 V_A 的闭子集, 所以 τ_1 也是 $\sigma_e(A)$ 的闭子集, 因此 τ_1 是 $\sigma_e(A)$ 的开闭子集. 设 τ_2 是 τ_1 的一个连通分支, 于是 τ_2 也是 $\sigma_e(A)$ 的一个连通分支, 根据引理 2.1 知 $\tau_2\cap\sigma_e(B)\neq\emptyset$, 从而 $\tau_1\cap\sigma_e(B)\neq\emptyset$. 假设 $\tau_1\cap V_B=\emptyset$, 则对于 $\forall\lambda\in\tau_1\cap\sigma_e(B)$, 有 $\lambda\in(\sigma_e(B)\cap V_A)\setminus V_B\subset D$, 因此 $\lambda\in\tau_1\cap D$, 故 $\tau_1\cap D\neq\emptyset$.

$\forall\lambda_0\in\tau_1\cap D$, 由于 D 是开集, τ_1 是 $\sigma_e(A)$ 的开子集, 故存在 $\varepsilon>0$, 使得 $O(\lambda_0,\varepsilon)\subset D$, 且 $O(\lambda_0,\varepsilon)\cap\sigma_e(A)\subset\tau_1$, 因此

$$O(\lambda_0,\varepsilon)=O(\lambda_0,\varepsilon)\cap D\subset O(\lambda_0,\varepsilon)\cap\sigma_e(A)\subset\tau_1,$$

于是 $O(\lambda_0,\varepsilon)\subset\tau_1\cap D$, 故 $\tau_1\cap D$ 是 $\mathbf{C}$ 的开子集. 设 $\{t_n\}\subset\tau_1\cap D$, $\lim_{n\to\infty}t_n=t$, 由于 τ_1 是闭集, 因此

$$t\in\tau_1\cap(D\cup\partial D)=(\tau_1\cap D)\cup(\tau_1\cap\partial D)\subset(\tau_1\cap D)\cup(\tau_1\cap V_B)=\tau_1\cap D,$$

故 $\tau_1 \cap D$ 是 $\mathbf{C}$ 的闭子集. 以上证明了 $\tau_1 \cap D$ 是 $\mathbf{C}$ 的开闭子集，但 $\tau_1 \cap D \neq \emptyset$,$\tau_1 \cap D \neq \mathbf{C}$, 矛盾，故 $\tau_1 \cap V_B \neq \emptyset$.

下面证明 $\tau \bigcap V_B \neq \emptyset$. 由于 τ 是紧集 V_A 的连通分支，因此 τ 等于 V_A 的包含 τ 的所有开闭子集的交，不妨设 $\tau = \cap_{\alpha\in I}\tau_\alpha$($\tau_\alpha$ 是 V_A 的包含 τ 的开闭子集). 由前段证明知闭集族 $\{\tau_\alpha \cap V_B : \alpha \in I\}$ 具有有限交性质，又 V_B 是紧集，所以 $\tau \cap V_B = \cap_{\alpha\in I}(\tau_\alpha \cap V_B) \neq \emptyset$.

推论 2.3 设 $A \sim B$, $\sigma_e(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau \cap \sigma_G(A) \cap \sigma_G(B) \neq \emptyset$, 其中

$$\sigma_G(T) = \sigma_e(T) \setminus G(T), \quad G(T) = (H_\infty(T) \cup H_{-\infty}(T) \cup H_{\infty\infty}(T))^\circ.$$

证明 取 $V_A = \sigma_e(A)$, $V_B = \sigma_G(A) \cap \sigma_G(B)$, $D = G(B)$, 则 V_B 是 $\sigma_e(B)$ 的闭子集， D 是开集. 由于 $A \sim B$, 对于 $\forall\lambda \in \mathbf{C}$, 都有

$$\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda) = \dim\mathrm{Ker}(B-\lambda), \quad \dim\mathrm{Ker}(A-\lambda)^* = \dim\mathrm{Ker}(B-\lambda)^*,$$

因此

$$H_\infty(A) = H_\infty(B), \quad H_{-\infty}(A) = H_{-\infty}(B), \quad H_{\infty\infty}(A) = H_{\infty\infty}(B),$$

从而 $G(A) = G(B)$. 于是

$$\begin{aligned}(\sigma_e(B) \cap V_A) \setminus V_B &= (\sigma_e(B) \cap \sigma_e(A)) \setminus (\sigma_G(A) \cap \sigma_G(B)) \subset (\sigma_e(A) \setminus \sigma_G(A)) \cup (\sigma_e(B) \setminus \sigma_G(B)) \\ &= G(A) \cup G(B) = D \subset \sigma_e(A).\end{aligned}$$

由于 $D = G(B) \subset \sigma_e(B)$, 且 $\sigma_e(B)$ 是闭集， D 是开集，故 $\partial D \subset \sigma_e(B) \setminus D = \sigma_G(B)$, 同理 $\partial D \subset \sigma_G(A)$, 于是 $\partial D \subset V_B$. 又 $\partial(\sigma_e(A) \setminus V_A) = \emptyset \subset V_B$, 所以根据定理 2.2 知推论 2.3 得证.

推论 2.4 设 $A \sim B$, 则对于 $\sigma_e(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau \cap \partial(\sigma_G(A) \cap \sigma_G(B)) \neq \emptyset$.

证明 由推论 2.3 知 $\tau \cap \sigma_G(A) \cap \sigma_G(B) \neq \emptyset$, 由于 $\sigma_G(A) \cap \sigma_G(B)$ 是 $\sigma_e(A)$ 子集，故 $\partial(\tau \cap \sigma_G(A) \cap \sigma_G(B)) \subset \partial(\sigma_G(A) \cap \sigma_G(B))$, 因此 $\tau \cap \partial(\sigma_G(A) \cap \sigma_G(B)) \supset \partial(\tau \cap \sigma_G(A) \cap \sigma_G(B))$, 所以 $\tau \cap \partial(\sigma_G(A) \cap \sigma_G(B)) \neq \emptyset$.

推论 2.5 设 $A \sim B$ ，则对于 $\sigma_G(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau \cap \sigma_G(B) \neq \emptyset$.

证明 取 $V_A = \sigma_G(A)$,$V_B = \sigma_G(B)$,$D = G(A) = G(B)$, 则 V_A,V_B 分别是 $\sigma_e(A)$, $\sigma_e(B)$ 的非空闭子集， D 是开集. $\partial(\sigma_e(A) \setminus V_A) = \partial G(A) = \partial D \subset V_B$, $(\sigma_e(B) \cap V_A) \setminus V_B \subset \sigma_e(B) \setminus V_B = G(B) = D \subset \sigma_e(A)$. 所以根据定理 2.2 知推论 2.5 得证.

推论 2.6 设 $A \sim B$, 则对于 $\sigma_K(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau \cap \sigma_F(A) \cap \sigma_F(B) \neq \emptyset$, 其中 $\sigma_F(T) = \sigma_e(T) \setminus (H_{\infty\infty}(T))^\circ$.

证明 取 $V_A = \sigma_K(A)$, $V_B = \sigma_F(A) \cap \sigma_F(B)$, $D = (H_{\infty\infty}(A))^\circ = (H_{\infty\infty}(B))^\circ$, 则

$$\begin{aligned}\partial(\sigma_e(A) \setminus V_A) &= \partial(\sigma_e(A) \setminus \sigma_K(A)) \\ &= \partial(\Psi_\infty(A) \cup \Psi_{-\infty}(A)) \subset \overline{H_\infty(A) \cup H_{-\infty}(A)} \\ &= \overline{H_\infty(B) \cup H_{-\infty}(B)} \subset \sigma_F(A) \cap \sigma_F(B) = V_B.\end{aligned}$$

由于 $D \subset \sigma_e(A)$, 且 $\sigma_e(A)$ 是闭集， D 是开集，故 $\partial D \subset \sigma_e(A) \setminus D = \sigma_F(A)$, 同理 $\partial D \subset \sigma_F(B)$, 因此 $\partial D \subset V_B$. $(\sigma_e(B) \cap V_A) \setminus V_B \subset (\sigma_e(B) \cap \sigma_e(A)) \setminus (\sigma_F(A) \cap \sigma_F(B)) \subset$

$(\sigma_e(A) \setminus \sigma_F(A)) \cup (\sigma_e(B) \setminus \sigma_F(B)) = (H_{\infty\infty}(A))^\circ \cup (H_{\infty\infty}(B))^\circ = D \subset \sigma_e(A)$, 所以根据定理 2.2 知推论 2.6 得证.

定理 2.7 设 $A \sim B$, 则对于 $\sigma_{re}(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau \cap \sigma_R(A) \cap \sigma_R(B) \neq \emptyset$, 其中 $\sigma_R(T) = \sigma_e(T) \setminus R(T)$, $R(T) = (H_{-\infty}(T) \cup H_{\infty\infty}(T))^\circ$.

证明 应用定理 2.2, 取 $V_A = \sigma_{re}(A)$, $V_B = \sigma_R(A) \cap \sigma_R(B)$, $D = R(A) = R(B)$, 则 $\partial(\sigma_e(A) \setminus V_A) = \partial\Psi_\infty(A) \subset \overline{H_\infty(A)} = \overline{H_\infty(B)} \subset \sigma_R(A) \cap \sigma_R(B) = V_B$. 由于 $D \subset \sigma_e(A)$, 且 $\sigma_e(A)$ 是闭集, D 是开集, 故 $\partial D \subset \sigma_e(A) \setminus D = \sigma_R(A)$, 同理 $\partial D \subset \sigma_R(B)$, 因此 $\partial D \subset V_B$. $(\sigma_e(B) \cap V_A) \setminus V_B \subset (\sigma_e(B) \cap \sigma_e(A)) \setminus (\sigma_R(A) \cap \sigma_R(B)) \subset (\sigma_e(A) \setminus \sigma_R(A)) \cup (\sigma_e(B) \setminus \sigma_R(B)) = D \subset \sigma_e(A)$, 所以根据定理 2.2 知定理 2.7 得证.

推论 2.8 设 $A \sim B$, 则 $\sigma_{re}(A)$ 的每一个非空的开闭子集都与 $\sigma_{le}(B)$ 相交.

证明 设 τ_1 是 $\sigma_{re}(A)$ 的任意一个非空开闭子集, τ 是 τ_1 的一个连通分支, 则 τ 也是 $\sigma_{re}(A)$ 的一个连通分支, 根据定理 2.7 得 $\tau \cap \sigma_R(A) \cap \sigma_R(B) \neq \emptyset$, 又 $\sigma_{le}(B) \supset \sigma_R(B)$, 故 $\tau \cap \sigma_{le}(B) \neq \emptyset$, 所以 $\tau_1 \cap \sigma_{le}(B) \neq \emptyset$.

评注 推论 2.8 肯定地回答了 L.A.Fialkow 在文献 [3] 中提出的问题.

引理 2.9 设 $A \sim B$, 则 $\sigma_W(A)$ 的每个非空开闭子集 τ, 都有 $\tau \cap \sigma_{le}(B) \neq \emptyset$.

证明 先证 $\tau \cap \sigma_{re}(A) \neq \emptyset$. 反证法, 假设 $\tau \cap \sigma_{re}(A) = \emptyset$, 则 $\tau \subset \sigma_W(A) \setminus \sigma_{re}(A) = (\cup_{1 \leq |n| < \infty} \Psi_n(A)) \cup \Psi_\infty(A)$. 记 $D = (\cup_{1 \leq |n| < \infty} \Psi_n(A)) \cup \Psi_\infty(A)$, 则 D 是开集, $\tau \subset D \subset \sigma_W(A)$. $\forall \lambda \in \tau$, 存在 $r_1 > 0$, 使得 $O(\lambda, r_1) \subset D$, 又 τ 是 $\sigma_W(A)$ 的开子集, 故存在 $r_2 > 0$, 使得 $O(\lambda, r_2) \cap \sigma_W(A) \subset \tau$, 取 $r = \min\{r_1, r_2\}$, 则 $O(\lambda, r) = O(\lambda, r) \cap D \subset O(\lambda, r_2) \cap \sigma_W(A) \subset \tau$, 因此 τ 是开集, 又 τ 是闭集 $\sigma_W(A)$ 的闭子集, 因此 τ 是闭集, 于是 τ 是 $\mathbf{C}$ 的开闭子集, 但 $\tau \neq \emptyset$,$\tau \neq \mathbf{C}$, 矛盾, 所以 $\tau \cap \sigma_{re}(A) \neq \emptyset$.

记 $\tau_1 = \tau \cap \sigma_{re}(A)$. 由于 $\sigma_{re}(A)$ 是闭集, $\sigma_{re}(A) \subset \sigma_W(A)$ 及 τ 是 $\sigma_W(A)$ 的开闭子集, 推知 τ_1 是 $\sigma_{re}(A)$ 的开闭子集, 根据推论 2.8 得 $\tau_1 \cap \sigma_{le}(B) \neq \emptyset$, 从而 $\tau \cap \sigma_{le}(B) \neq \emptyset$.

定理 2.10 设 $A \sim B$, 则 $\sigma_W(A)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B) \neq \emptyset$, 其中 $\sigma_M(T) = \sigma_K(T) \setminus M(T)$, $M(T) = ((\cup_{1 \leq |n| \leq \infty} H_n(T)) \cup H_{\infty\infty}(T))^\circ$.

证明 设 τ_1 是 $\sigma_W(A)$ 的任意一个非空的开闭子集, 先证 $\tau_1 \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B) \neq \emptyset$. 根据引理 2.9 知 $\tau_1 \cap \sigma_{le}(B) \neq \emptyset$. 假设 $\tau_1 \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B) = \emptyset$, 则 $\forall \lambda \in \tau_1 \cap \sigma_{le}(B)$, 有

$$\lambda \in (\sigma_{le}(B) \cap \sigma_W(A)) \setminus (\sigma_M(A) \cap \sigma_M(B)),$$

又

$$\begin{aligned}(\sigma_{le}(B) \cap \sigma_W(A)) \setminus (\sigma_M(A) \cap \sigma_M(B)) &\subset (\sigma_W(A) \setminus \sigma_M(A)) \\ &\cup (\sigma_{le}(B) \setminus \sigma_M(B)) \subset M(A) \cup M(B).\end{aligned}$$

由于 $A \sim B$, 故 $M(A) = M(B)$, 于是 $\lambda \in \tau_1 \cap M(A)$, 故 $\tau_1 \cap M(A) \neq \emptyset$.

面证明 $\tau_1 \cap M(A)$ 是 $\mathbf{C}$ 的开闭子集. $\forall \lambda \in \tau_1 \cap M(A)$, 由于 $M(A)$ 是开集, 故存在 $r_1 > 0$, 使得 $O(\lambda, r_1) \subset M(A)$, 又 τ_1 是 $\sigma_W(A)$ 的开子集, 故存在 $r_2 > 0$, 使得 $O(\lambda, r_2) \cap \sigma_W(A) \subset \tau_1$, 取 $r = \min\{r_1, r_2\}$, 则 $O(\lambda, r) = O(\lambda, r) \cap M(A) \subset O(\lambda, r_2) \cap \sigma_W(A) \subset \tau_1$, 故 $O(\lambda, r) \subset \tau_1 \cap M(A)$, 因此 $\tau_1 \cap M(A)$ 是开集.

由于 $M(A)$ 是开集, 且 $M(A) \subset \sigma_W(A)$, $\sigma_W(A)$ 是闭集, 故 $\partial M(A) \subset \sigma_W(A) \setminus M(A) = \sigma_K(A) \setminus M(A) = \sigma_M(A)$. 同理可得 $\partial M(A) = \partial M(B) \subset \sigma_M(B)$, 故 $\partial M(A) \subset \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B)$.

假设点列 $\{t_n\} \subset \tau_1 \cap M(A)$, $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, 由于 τ_1 是闭集 $\sigma_W(A)$ 的闭子集，故 τ_1 是闭集，于是

$$\begin{aligned} t \in \tau_1 \cap (M(A) \cup \partial M(A)) &= (\tau_1 \cap M(A)) \cup (\tau_1 \cap \partial M(A)) \subset (\tau_1 \cap M(A)) \cup (\tau_1 \cap \sigma_M(A) \cap_M (B)) \\ &= \tau_1 \cap M(A), \end{aligned}$$

因此 $\tau_1 \cap M(A)$ 是闭集. 以上证明了 $\tau_1 \cap M(A)$ 是 $\mathbf{C}$ 的开闭子集, 但 $\tau_1 \cap M(A) \neq \emptyset$, $\tau_1 \cap M(A) \neq \mathbf{C}$, 矛盾，所以 $\tau_1 \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B) \neq \emptyset$.

下面证明 $\tau \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B) \neq \emptyset$. 由于 τ 是紧集 $\sigma_W(A)$ 的连通分支，故 τ 等于 $\sigma_W(A)$ 的包含 τ 的所有开闭子集的交，不妨设 $\tau = \cap_{\alpha\in I} \tau_\alpha$($\tau_\alpha$ 是 $\sigma_W(A)$ 的包含 τ 的开闭子集). 由前段证明知闭集族 $\{\tau_\alpha \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B) : \alpha \in I\}$ 具有有限交性质，又 $\sigma_M(A) \cap \sigma_M(B)$ 是紧集，所以 $\tau \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B) = \cap_{\alpha\in I}(\tau_\alpha \cap \sigma_M(A) \cap \sigma_M(B)) \neq \emptyset$.

定理 2.11 设 A,B,$X \in B(H)$,X 为单射，使得 $AX = XB$, 则对于 $\sigma_B(B)$ 的每一个连通分支 τ, 都有 $\tau \cap \sigma_B(A) \neq \emptyset$.

证明 由于 τ 是 $\sigma_B(B)$ 的连通分支, 故 $\partial\tau \subset \partial\sigma_B(B) \subset \sigma_e(B)$. 因为 $\sigma_B(B)$ 是闭集, 所以 τ 是闭集, 于是 $\partial\tau \subset \tau\cap\sigma_e(B)$, 故 $\tau\cap\sigma_e(B) \neq \emptyset$. 假设 $\tau\cap\sigma_B(A) = \emptyset$, 则 $\tau \subset \mathbf{C}\setminus\sigma_B(A) \subset \mathbf{C}\setminus\sigma_e(A)$. 设 V 是 $\mathbf{C} \setminus \sigma_e(A)$ 的包含 τ 的连通分支，则 V 是开集. 因为 τ 是 $\sigma_B(B)$ 的连通分支，故 τ 也是 $\sigma(B)$ 的连通分支，又 $\sigma(B)$ 是紧集，于是 τ 等于 $\sigma(B)$ 的包含 τ 的所有又开又闭子集的交，由于 $\tau \subset V$, 根据有限复盖性质，易推知存在 $\sigma(B)$ 的一个又开又闭子集 D, 使得 $\tau \subset D \subset V$. 又 $D \cap \sigma_e(B) \supset \tau \cap \sigma_e(B) \neq \emptyset$, 因此根据文献 [3] 引理 2.6 知 $V \subset \sigma(A)$. 因为 V 是开集，于是 $V \subset \sigma(A)^\circ \subset \sigma_B(A)$, 这与假设 $\tau \cap \sigma_B(A) = \emptyset$ 矛盾，所以 $\tau \cap \sigma_B(A) \neq \emptyset$.

参考文献：

[1] SZ-NAGY B, FOIAS C. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces* [M]. North-Holland, Amsterdam, 1970.
[2] HOOVER T B. *Quasisimilarity of operators* [J]. Illinois J. Math., 1972, **16**: 672–686.
[3] FIALKOW L A. *A note on the operator $X \to AX - XB$* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **243**: 147–168.
[4] HERRERO D A. *On the essential spectra of quasisimilar operators* [J]. Canad. J. Math., 1988, **40**: 1436–1457.
[5] KATO T. *Perturbation Theory for Linear Operators* [M]. Springer Verlag, New York, 1966.

Quasisimilarity of Operators and Properties of the Essential Spectrum

SU Wei-gang
(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: Let A and B be quasisimilar operators. By means of the analysis of the precise constitution of spectrum of operators, this paper gives the intersection relations between the components of the Wolf essential spectrum, the Kato essential spectrum, the Weyl essential spectrum, the right essential spectrum of operator A and some subsets of the Wolf essential spectrum of operator B, and positively answers the question of L.A.Fialkow in [3].

Key words: bounded linear operator; quasisimilarity; essential spectrum; component.