

不确定二阶振动控制系统动力响应的区间方法

陈塑寰,裴春艳

(吉林大学 机械科学与工程学院,长春 130022)

摘要:采用区间方法,对二阶振动控制系统的响应进行了分析。将不确定控制问题用确定性问题来近似,并将不确定参数表示为区间变量。根据控制系统的确定性部分,应用独立模态控制的极点配置方法推导出反馈矩阵,并把这种反馈控制应用于实际的不确定性系统。用区间参数导出了区间刚度矩阵和质量矩阵,应用矩阵摄动和区间扩张理论,提出了估计二阶系统响应值上下界的计算方法,并给出了一个数值算例。

关键词:固体力学;震动与波;二阶不确定系统;主动振动控制;区间方法;独立模态控制;响应上下界

中图分类号:O327 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5497(2008)01-0094-05

Dynamic response of second-order uncertain vibration control systems with interval method

Chen Su-huan, Pei Chun-yan

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: Using interval analysis, the method of dynamic response of the second-order uncertain systems was investigated. The uncertain control problem was approximated as deterministic one, and the uncertain parameters were described by interval variables. The independent modal space control (IMSC) was used to obtain the modal gains, which were applied into the uncertain system. The expressions of the interval stiffness and interval mass matrices were developed directly with the interval physical parameters. With matrix perturbation and interval extension theory, the algorithm for estimating the upper and lower bounds of responses was developed. The present method was applied to a vibration system to illustrate the application.

Key words: solid mechanics; vibration and wave; second order uncertain systems; vibration active control; interval method; independent modal space control (IMSC); upper and lower bounds of responses

20 世纪 60 年代以来,Moore^[1]提出的区间方法逐渐成为分析不确定问题的重要工具。工程中的不确定问题,通常都是把结构参数作为一个随机向量来处理^[2,3]。建立随机向量的概率密度函

数往往需要足够的实验数据,但区间方法对结构信息的要求少,只需要知道结构参数的上下界即可,因而引起了不少学者的注意^[4-8],并将其用于不确定结构的区间特征值的分析讨论。作者把

收稿日期:2007-01-28.

基金项目:国家自然科学基金项目(10202006);吉林大学“985 工程”项目.

作者简介:陈塑寰(1934-),男,教授,博士生导师.研究方向:结构动态设计理论. E-mail:chensh@jlu.edu.cn

区间分析理论应用于不确定参数的控制问题,通过独立模态控制得到闭环系统,并提出了估计响应上下界的计算方法。在采用独立模态控制时可保持系统固有频率不变,从而使开环和闭环控制系统具有相同的模态矩阵,给闭环控制系统的响应分析带来极大的方便。

1 问题定义

系统的二阶控制方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}_0(t) \quad (1)$$

不确定系统的质量矩阵,阻尼矩阵和刚度矩阵可以表达为

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \Delta\mathbf{M} \\ \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{C} \\ \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K} \end{cases} \quad (2)$$

式中: \mathbf{M}_0 、 \mathbf{C}_0 和 \mathbf{K}_0 分别为质量、阻尼和刚度矩阵的确定部分; $\Delta\mathbf{M}$ 、 $\Delta\mathbf{C}$ 和 $\Delta\mathbf{K}$ 分别为相应的不确定部分。

对于位移向量 \mathbf{q} ,控制力 \mathbf{z} 和输入系数矩阵 \mathbf{B} 存在同样的表达式

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q} \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{z} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B} \end{cases} \quad (3)$$

将式(2)、(3)代入式(1),忽略其中的高阶项,取等式左右侧的同阶项,可得

$$\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}_0\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{K}_0\mathbf{q}_0 = \mathbf{B}_0\mathbf{z}_0 + \mathbf{P}_0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{M}_0\ddot{\Delta\mathbf{q}} + \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}_0\dot{\Delta\mathbf{q}} + \\ \Delta\mathbf{K}\mathbf{q}_0 + \mathbf{K}_0\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{B}\mathbf{z}_0 + \mathbf{B}_0\Delta\mathbf{z} \end{aligned} \quad (5)$$

由此,不确定系统(1)可以分离为确定部分(4)和不确定部分(5)。

2 独立模态控制

首先略去激励力 $\mathbf{P}_0(t)$,将式(4)转化为模态坐标下的方程。设对于确定系统, \mathbf{M}_0 和 \mathbf{K}_0 的模态矩阵 $\Phi_0 = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_f}]$ 和特征值对角阵 $\Lambda_0 = \text{diag}(\omega_{01}^2, \omega_{02}^2, \dots, \omega_{0n_f}^2)$ 已经求得, n_f 为模态数。

利用模态坐标变换

$$\mathbf{q}_0(t) = \Phi_0 \boldsymbol{\eta}(t) \quad (6)$$

设 $\mathbf{B}_c = \Phi_0^T \mathbf{B}_0$ (\mathbf{B}_c 是 $n_f \times n_a$ 模态控制矩阵),方程(4)变为

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + 2\Xi \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \Lambda_0 \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{B}_c \mathbf{z}_0(t) \quad (7)$$

式中: $\Xi = \text{diag}(\xi_{01} \omega_{01}, \xi_{02} \omega_{02}, \dots, \xi_{0n_f} \omega_{0n_f})$, ξ_{0i} ($i = 1, 2, \dots, n_f$) 为第 i 阶模态阻尼比。

如果

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}_c \mathbf{z}_0(t) \quad (8)$$

假设

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(t) = -h_i \dot{\boldsymbol{\eta}}_{0i}(t) - g_i \boldsymbol{\eta}_{0i}(t) \\ i = 1, 2, \dots, n_f \end{aligned} \quad (9)$$

那么闭环系统的振动方程(7)变为相互独立的方程

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{0i}(t) + (2\xi_{0i} \omega_{0i} + h_i) \dot{\boldsymbol{\eta}}_{0i}(t) + \\ (\omega_{0i}^2 + g_i) \boldsymbol{\eta}_{0i}(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n_f \end{aligned} \quad (10)$$

下面讨论如何确定 g_i 和 h_i 。

运用极点配置法,指定第 i 阶模态的闭环特征值为 $-a_i + jb_i$,则式(10)变为

$$\boldsymbol{\eta}_{0i}(t) = c_i e^{(-a_i + jb_i)t}, i = 1, 2, \dots, n_f \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)中,并将其实部和虚部分为两部分,得到

$$\begin{cases} g_i = a_i^2 + b_i^2 - \omega_{0i}^2 \\ h_i = 2(a_i - \xi_{0i} \omega_{0i}) \end{cases} \quad (12)$$

为保证渐近稳定性,设

$$b_i = \sqrt{\lambda_i} = \omega_i, i = 1, 2, \dots, n_f \quad (13)$$

式中: ω_i 为闭环系统第 i 阶圆频率。

先考虑无阻尼系统的控制,如果保持频率不变,其反馈增益值为

$$g_i = a_i^2, h_i = 2a_i, i = 1, 2, \dots, n_f \quad (14)$$

将上式代入到式(9)中,并假设

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_{n_f}) \\ \mathbf{D}_2 = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_{n_f}) \end{cases} \quad (15)$$

则有

$$\mathbf{F}(t) = -\mathbf{D}_1 \dot{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\eta} \quad (16)$$

考虑式(16)与式(8)

$$\mathbf{B}_c \mathbf{z}_0(t) = -\mathbf{D}_1 \dot{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\eta} \quad (17)$$

若 $n_f = n_a$, \mathbf{B}_c 是 $n_f \times n_f$ 矩阵,那么

$$\mathbf{z}_0(t) = -\mathbf{B}_c^{-1} (\mathbf{D}_1 \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\eta}) \quad (18)$$

则可唯一决定控制力。

由式(6)可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_0 = \Phi_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{q}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \Phi_0^T \mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (19)$$

式(18)表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0(t) = -\mathbf{B}_c^{-1} (\mathbf{D}_1 \Phi_0^T \mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_2 \Phi_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{q}) = \\ -\mathbf{H}_0 \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}_0 \mathbf{q} \end{aligned} \quad (20)$$

其中速度反馈增益矩阵 \mathbf{H}_0 和位移反馈增益矩阵 \mathbf{G}_0 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_c^{-1} \mathbf{D}_1 \Phi_0^T \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{G}_0 = \mathbf{B}_c^{-1} \mathbf{D}_2 \Phi_0^T \mathbf{M}_0 \end{cases} \quad (21)$$

3 区间刚度、质量和阻尼矩阵

设 \mathbf{b}^l 是结构的区间结构参数,可表示为^[1]

$$\begin{cases} \mathbf{b}^l = (b_1^l, b_2^l, \dots, b_m^l)^T = \mathbf{b}^c + \Delta \mathbf{b}^l \\ \mathbf{b}^c = (b_1^c, b_2^c, \dots, b_m^c)^T \\ \Delta \mathbf{b}^l = (\Delta b_1^l, \Delta b_2^l, \dots, \Delta b_m^l)^T \end{cases} \quad (22)$$

式中: m 为区间参数的个数,且

$$\begin{cases} b_j^l = [\underline{b}_j, \bar{b}_j] = b_j^c + \Delta b_j e_j \\ \Delta b_j = (\underline{b}_j - \bar{b}_j)/2, e_j = [-1, 1] \end{cases} \quad (23)$$

将不确定结构的刚度矩阵在 \mathbf{b}^c 附近展开

$$\mathbf{K}_i^e(\mathbf{b}) = \mathbf{K}_i^e(\mathbf{b}^c) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}_i^e(\mathbf{b}^c)}{\partial b_j} (b_j - b_j^c) \quad (24)$$

应用自然区间扩张定理,结构的总体刚度矩阵可以表示为

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}^l) = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^e(\mathbf{b}^l) = \mathbf{K}(\mathbf{b}^c) + \Delta \mathbf{K}(\mathbf{b}^l) \quad (25)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{b}^l)$ 和 $\mathbf{C}(\mathbf{b}^l)$ 存在同样的表达式,其中 $\mathbf{K}(\mathbf{b}^c)$ 、 $\mathbf{M}(\mathbf{b}^c)$ 和 $\mathbf{C}(\mathbf{b}^c)$ 分别为结构的中值刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵; $\Delta \mathbf{K}(\mathbf{b}^l)$ 、 $\Delta \mathbf{M}(\mathbf{b}^l)$ 和 $\Delta \mathbf{C}(\mathbf{b}^l)$ 分别为相应的区间增量矩阵

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{K}(\mathbf{b}^l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\Delta \mathbf{K}_{ij}^e}{\Delta B_j} \Delta b_j e_j \\ \Delta \mathbf{M}(\mathbf{b}^l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\Delta \mathbf{M}_{ij}^e}{\Delta B_j} \Delta b_j e_j \\ \Delta \mathbf{C}(\mathbf{b}^l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\Delta \mathbf{C}_{ij}^e}{\Delta B_j} \Delta b_j e_j \end{cases} \quad (26)$$

4 动力响应分析

4.1 摄动系统的响应

由系统确定性部分即式(4)得到

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}_i(t) + (2\xi_i \omega_{0i} + h_i) \dot{\boldsymbol{\eta}}_i(t) + (\omega_{0i}^2 + g_i) \boldsymbol{\eta}_i(t) = \Phi_{0i}^T \mathbf{P}_0, i = 1, 2, \dots, n_f \quad (27)$$

解以上微分方程,求出 $\boldsymbol{\eta}_i(t)$ 、 $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i(t)$ 和 $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_i(t)$ 。

由式(6)可得

$$\begin{cases} \mathbf{q}_0(t) = \Phi_0 \boldsymbol{\eta}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_0(t) = \Phi_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_0(t) = \Phi_0 \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) \end{cases} \quad (28)$$

将 $\mathbf{q}_0(t)$ 、 $\dot{\mathbf{q}}_0(t)$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_0(t)$ 代入式(5)

$$\mathbf{M}_0 \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{q} =$$

$$-\Delta \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}}_0 - \Delta \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}}_0 - \Delta \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_0 \quad (29)$$

假设 $\Delta \mathbf{B}$ 、 $\Delta \mathbf{z}$ 为零。如果结构参数变化较小,可将 $\Delta \mathbf{M}$ 、 $\Delta \mathbf{C}$ 、 $\Delta \mathbf{K}$ 、 $\Delta \mathbf{q}$ 、 $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ 和 $\Delta \ddot{\mathbf{q}}$ 在其中值附近展开

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{M} = \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_{0,j} (b_j - b_j^c), \Delta \mathbf{q} = \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_{0,j} (b_j - b_j^c) \\ \Delta \mathbf{C} = \sum_{j=1}^m \mathbf{C}_{0,j} (b_j - b_j^c), \Delta \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^m \dot{\mathbf{q}}_{0,j} (b_j - b_j^c) \\ \Delta \mathbf{K} = \sum_{j=1}^m \mathbf{K}_{0,j} (b_j - b_j^c), \Delta \ddot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^m \ddot{\mathbf{q}}_{0,j} (b_j - b_j^c) \end{cases} \quad (30)$$

式中:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{0,j} = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{b}^c)}{\partial b_j}, \mathbf{q}_{0,j} = \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial b_j} \\ \mathbf{C}_{0,j} = \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{b}^c)}{\partial b_j}, \dot{\mathbf{q}}_{0,j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_0}{\partial b_j} \\ \mathbf{K}_{0,j} = \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b}^c)}{\partial b_j}, \ddot{\mathbf{q}}_{0,j} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}_0}{\partial b_j} \end{cases} \quad (31)$$

将式(30)代入式(29),有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m (\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}}_{0,j} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}}_{0,j} + \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_{0,j}) \Delta b_j = \\ & - \sum_{j=1}^m (\mathbf{M}_{0,j} \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}_{0,j} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{K}_{0,j} \mathbf{q}_0) \Delta b_j \end{aligned} \quad (32)$$

式(32)可变换为

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}}_{0,j} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}}_{0,j} + \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_{0,j} = \\ & - (\mathbf{M}_{0,j} \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}_{0,j} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{K}_{0,j} \mathbf{q}_0) \end{aligned} \quad (33)$$

用 Newmark 或 Willson- θ 等方法解上述方程,得到 $\mathbf{q}_{0,j}$ 摄动系统的响应^[9]

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q} \quad (34)$$

4.2 用区间有限元法估计控制系统响应区间

将式(21)代入式(1),有

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{H}) \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{G}) \mathbf{q}(t) = \mathbf{P}_0(t) \quad (35)$$

将区间扩张理论应用到上式

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(\mathbf{b}^l) \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{C}(\mathbf{b}^l) + \mathbf{B}\mathbf{H}] \dot{\mathbf{q}}(t) + \\ & [\mathbf{K}(\mathbf{b}^l) + \mathbf{B}\mathbf{G}] \mathbf{q}(t) = \mathbf{P}_0(t) \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{b}^l) = \{\mathbf{M}(\mathbf{b}) \mid \underline{\mathbf{b}} \leq \mathbf{b} \leq \bar{\mathbf{b}}\} \\ \mathbf{C}(\mathbf{b}^l) = \{\mathbf{C}(\mathbf{b}) \mid \underline{\mathbf{b}} \leq \mathbf{b} \leq \bar{\mathbf{b}}\} \\ \mathbf{K}(\mathbf{b}^l) = \{\mathbf{K}(\mathbf{b}) \mid \underline{\mathbf{b}} \leq \mathbf{b} \leq \bar{\mathbf{b}}\} \end{cases} \quad (37)$$

对给定的区间矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{b}^l)$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{b}^l)$ 和 $\mathbf{K}(\mathbf{b}^l)$, 找到所有满足式(36)的 \mathbf{q} , 即 $\mathbf{q} \in \mathbf{q}^l = [\underline{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}]$, 其中

$$\underline{\mathbf{q}} = \min\{\mathbf{q} \mid \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{H}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{G}) \mathbf{q} = \mathbf{P}_0, \mathbf{M} \in \mathbf{M}(\mathbf{b}^l), \mathbf{C} \in \mathbf{C}(\mathbf{b}^l), \mathbf{K} \in \mathbf{K}(\mathbf{b}^l)\}$$

$$\bar{q} = \max\{q \mid M\ddot{q} + (C + BH)\dot{q} + (K + BG)q = P_0, M \in M(b^l), C \in C(b^l), K \in K(b^l)\}$$

由式(25)可知,区间刚度 $K(b^l)$ 可表示为两部分,一部分为中值矩阵,另一部分为增量矩阵, $M(b^l)$ 和 $C(b^l)$ 也可以同样表示。则式(36)变换为

$$[M(b^c) + \Delta M(b^l)]\ddot{q} + [C(b^c) + \Delta C(b^l) + BH]\dot{q} + [K(b^c) + \Delta K(b^l) + BG]q = P_0 \quad (38)$$

对任意 $b \in b^l$,存在一簇 $\delta M, \delta C$ 和 δK 满足

$$\begin{cases} \Delta M \leq \delta M \leq \Delta \bar{M} \\ \Delta C \leq \delta C \leq \Delta \bar{C} \\ \Delta K \leq \delta K \leq \Delta \bar{K} \end{cases} \quad (39)$$

的振动控制方程为

$$[M(b^c) + \delta M]\ddot{q} + [C(b^c) + \delta C + BH]\dot{q} + [K(b^c) + \delta K + BG]q = P_0 \quad (40)$$

忽略高阶小量,上式中的 q 为

$$q = q_0 + \delta q \quad (41)$$

$$\delta q = \sum_{j=1}^m q_{0,j}(b_j - b^c) \quad (42)$$

q_0 由式(28)得到, $q_{0,j}$ 由式(33)得到。

式(38)、式(40)在式(39)的条件下是等效的,式(41)和式(42)应用区间扩张理论有

$$q^l = q_0 + \Delta q^l \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Delta q^l &= \sum_{j=1}^m q_{0,j}(b_j^l - b^c) = \sum_{j=1}^m q_{0,j} \Delta b_j e_j = \\ &\sum_{j=1}^m |q_{0,j} \Delta b_j| [-1, 1] = \Delta q [-1, 1] \end{aligned} \quad (44)$$

式中: $\Delta q = \sum_{j=1}^m |q_{0,j} \Delta b_j|$, 那么动力响应的上下界为

$$\begin{cases} \bar{q} = q_0 + \Delta q \\ \underline{q} = q_0 - \Delta q \end{cases} \quad (45)$$

5 算 例

右端被约束的矩形板,长度 $l=0.8$ m,宽度 $b=0.2$ m,厚度 $t=0.002$ m,弹性模量 $E=2.068 \times 10^{11}$ Pa,密度 $\rho=7820$ kg/m³。将其划分成 400 个单元,451 个节点,2640 个自由度,激振力 $p(t)=100\sin(10\pi t)$ 。板结构如图 1 所示。

无阻尼开环系统,其前 20 阶特征值为 $16.540j, 103.44j, 132.14j, 290.31j, 407.69j, \dots, 2562.8j, 2667.5j, j = \sqrt{-1}$ 。为了保证系

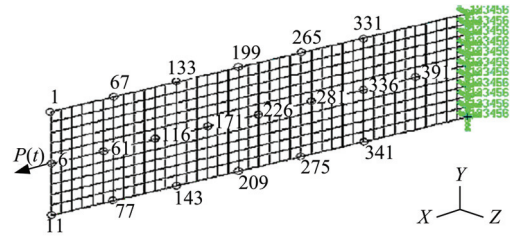


图 1 板结构

Fig. 1 Plate structure

统的稳定性,指定阻尼 $\xi=0.6$,保持频率不变,将特征值配置在 $-9.9238 + 16.540j, -62.066 + 103.44j, -79.285 + 132.14j, -174.19 + 290.31j, -244.61 + 407.69j, \dots, -1537.7 + 2562.8j, -1600.5 + 2667.5j$ 。控制点分别设置在节点 6, 61, 116, 171, 281, $\dots, 331, 341$ 上,控制矩阵 B 中的元素 $B_0(i, k)$ 在 $i=33, 363, 693, 1023, 1353, 1683, 2013, 2343, \dots, 1984, 2044$, 且 $k=1, 2, \dots, 20$ 的元素为 1,其余元素皆为零。从而得到反馈增益 H_0, G_0 。将其代入到系统中,取厚度作为区间变量,得到了不确定控制系统响应的上下界。节点 6 沿 Z 方向的响应情况如表 1、表 2 和图 2、图 3 所示。

表 1 未控制与控制后的稳态动力响应

Table 1 Dynamic steady-state response of controlled and uncontrolled plate

t/s	q_0/m (uncontrolled)	q/m (controlled)	$ q_0 - q /q_0$
2.055	0.0261	0.0316	21.238%
2.065	0.1008	0.0550	45.377%
2.075	0.1656	0.0731	55.873%
2.085	0.2142	0.0839	60.811%
2.095	0.2418	0.0866	64.192%

表 2 稳态响应的上下界

Table 2 Upper and lower bounds of dynamic steady-state response

t/s	q/m (lower)	q/m	\bar{q}/m (upper)	$\Delta q/q^c$
2.055	0.0334	0.0316	0.0298	5.6578%
2.065	0.0590	0.0550	0.0511	7.1554%
2.075	0.0788	0.0731	0.0674	7.8037%
2.085	0.0908	0.0839	0.0770	8.2288%
2.095	0.0940	0.0866	0.0792	8.5875%

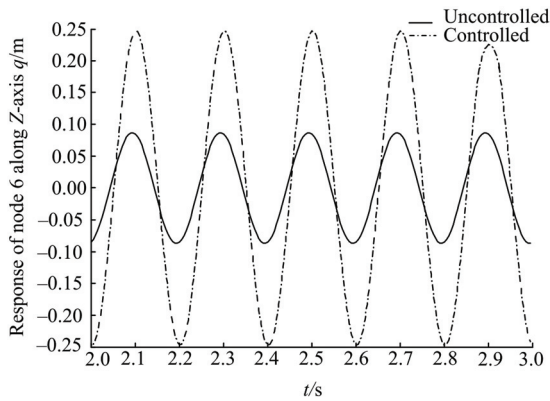


图 2 未控制与控制后的稳态响应曲线

Fig. 2 Steady-state response curve of controlled and uncontrolled plate

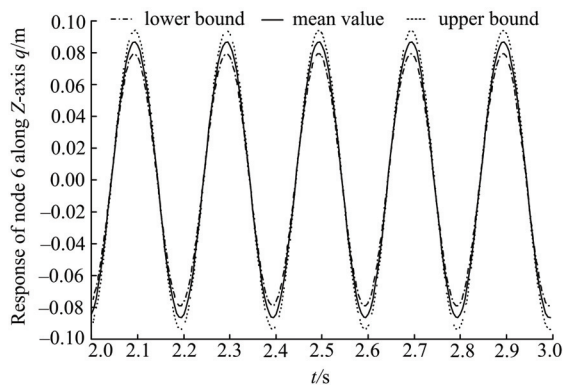


图 3 稳态响应上下界曲线($\Delta t=5\%t$)

Fig. 3 Upper and lower bounds curve of steady-state response ($\Delta t=5\%t$)

6 结束语

作者将区间分析方法应用于不确定振动控制问题,并通过独立模态控制得到闭环系统。由悬臂板的振动控制的数值分析结果可以看出,用本文方法可得到比较合理的不确定控制系统响应上下界估计值。在采用独立模态控制时可保持系统固有频率不变,从而使开环和闭环控制系统具有相同的模态矩阵,给闭环控制系统的响应分析带来极大的方便。

参考文献:

[1] Moore R E. Interval Analysis[M]. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.

[2] Papadimitrou C, Katafygiotis L S, Beck J L. Approximate analysis of response variability of uncertain linear systems[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1995, 10:251-264.

[3] Thomos G C, Trezos C G. Examination of the probabilistic response of reinforced concrete structures under static non-linear analysis[J]. Engineering Structures, 2006, 28:120-133.

[4] Liu Z S, Chen S H, Han W Z. Solving the extremum of static response for structural systems with uncertain unknown-but-bound parameters[J]. Computers and Structures, 1994, 50(4):557-561.

[5] Chen S H, Lian H D, Yang X W. Dynamic response analysis for structures with interval parameters[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2002, 13(3):299-312.

[6] Chen S H, Lian H D, Yang X W. Interval eigenvalue analysis for structures with interval parameters[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(5/6):419-431.

[7] Chen S H, Qiu Z P. A new method for computing the upper and lower bounds on frequencies of structures with interval parameters[J]. Mechanics Research Communications, 1994, 2:583-592.

[8] 宋敏,陈宇东,陈塑寰. 不确定参数闭环振动控制系统的稳定性与鲁棒性区间分析[J]. 吉林大学学报:工学版,2006,36(1):5-9.
Song Min, Chen Yu-dong, Chen Su-huan. Stability robustness of closed-loop system with uncertain parameters using interval analysis[J]. Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition), 2006, 36(1):5-9.

[9] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论[M]. 北京:科学出版社, 1999.