第26卷第4期 数学研究与评论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0811-08 **文献标识码**: **A**

一类具复杂偏差变元的中立型微分方程的周期解

刘锡平， 贾 梅
(上海理工大学理学院，上海 200093)
(E-mail: xipingliu@163.com)

摘 要: 本文研究了一类具复杂偏差变元的中立型泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=\theta\dot{x}(t-\tau)+\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t)$$

的周期解的存在性，得到了周期解存在的充分条件，并给出了所得结论的几个简单应用.

关键词: 复杂偏差变元；泛函微分方程；周期解；拓扑度.
MSC(2000): 34K20
中图分类: O175.7

1 引 言

众所周知, 在大量的自然和社会活动中, 时滞现象几乎都是不可避免的. 所以对时滞微分方程的研究备受关注 [1−3]． 在实际问题中，有时滞量不仅与时间 t 有关，而且常常与当前状态 x 有关, 这便产生了复杂偏差变元. 近年来, 人们对于这类偏差变元依赖状态自身的泛函微分方程进行了大量研究 [4−7]. 但是对具复杂偏差变元的中立型泛函微分方程周期解的研究目前尚不多见. 本文利用拓扑度理论，研究了一类具复杂偏差变元的非线性中立型泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=\theta\dot{x}(t-\tau)+\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t) \tag{E}$$

的周期解的存在性，得到了周期解存在的充分条件，并给出了所得结论的几个简单应用.

这里我们假设：θ,τ 为常实数, 且 $\tau>0$, 函数 $\alpha,\beta,f,g,p\in C(R,R)$, 并且存在常数 $T>0$, 使得任意 $t\in R$, 有 $\alpha(t+T)=\alpha(t),\beta(t+T)=\beta(t),p(t+T)=p(t)$.

2 主要结论及其应用

对于方程 (E) 的定常解的存在性，显然有

命题 若存在常数 $x_0\in R$, 使得对任意 $t\in R$ 有 $\alpha(t)f(x_0)+\beta(t)g(x_0)+p(t)=0$ 成立，则 $x\equiv x_0$ 为方程 (E) 的平凡周期解.

下面研究方程 (E) 的一般 T 周期解的存在性.

首先讨论当函数 f,g 中一个有界，一个无界时的情况. 当 f 有界， g 无界时有

定理 1 设下列条件成立

(I) 对任意 $t\in R$, $\beta(t)\neq 0$;

收稿日期: 2004-09-17
基金项目: 上海市教委科研基金 (05EZ52)

(II) 存在常数 $M>0$, 使得任意 $x\in R$, 有 $|f(x)|\leq M$;

(III) $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\pm r$(其中 $0<r<+\infty$).

若 $1-2|\theta|-r\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t>0$. 则方程 (E) 至少存在一个 T 周期解.

证明 在此只讨论 $\theta\geq 0$ 时的情况. 当 $\theta<0$ 时, 讨论中只须用 $|\theta|$ 代替 θ 即可, 在此不再赘述.

设 $X=\{x\in C^1(R,R)|x(t+T)=x(t)\}, Y=\{y\in C(R,R)|y(t+T)=y(t)\}$. 在 X 中取范数 $\|x\|=\max\{|x|_\infty,|\dot{x}|_\infty\}$, 其中 $|x|_\infty=\max_{t\in[0,T]}\{|x(t)|\}$, $|\dot{x}|_\infty=\max_{t\in[0,T]}\{|\dot{x}(t)|\}$. 在 Y 中取范数 $\|y\|=|y|_\infty=\max_{t\in[0,T]}\{|y(t)|\}$. 那么 X,Y 均构成 Banach 空间.

设 $L:\mathrm{Dom}(L)\cap X\longrightarrow Y: x\longrightarrow Lx=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)-\theta x(t-\tau)]$.

下面讨论 L 的性质, 先考虑核 $\mathrm{Ker}(L)$: 设 $x\in \mathrm{Ker}L$, 即 $Lx=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)-\theta x(t-\tau)]=0$, 那么 $x(t)-\theta x(t-\tau)=c$ 为常数, 故对任意 $t\in R$ 都有

$$\begin{aligned}x(t)&=c+\theta x(t-\tau)=c+\theta[c+\theta x(t-\tau-\tau)]=c(1+\theta)+\theta^2x(t-2\tau)\\&=\cdots=c(1+\theta+\theta^2+...+\theta^{n-1})+\theta^nx(t-n\tau)=c\frac{1-\theta^{n-1}}{1-\theta}+\theta^nx(t-n\tau).\end{aligned}$$

由于 $1-2\theta-r\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t>0$, $0\leq\theta<1$, 且 $x\in X$. 故当 $n\to\infty$ 时, 有 $x(t)=\frac{c}{1-\theta}\in R$. 另一方面, 任意 $x\in R$ 为常值函数, 则 $Lx=0$, 即 $x\in\mathrm{Ker}(L)$, 那么 $\mathrm{Ker}(L)=R$, $\dim(\mathrm{Ker}(L))=1$. 再讨论象集 $\mathrm{Im}L$: 设 $y(t)\in\mathrm{Im}L$, 即存在 $x\in\mathrm{Dom}L\cap X$, 使得 $\mathrm{L}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)-\theta x(-\tau))=y(t)$, 则 $\int_0^Ty(t)\mathrm{d}t=0$, 那么 $\mathrm{Im}L=\{y\in Y|\int_0^Ty(t)\mathrm{d}t=0\}$ 是 Y 中的闭集, 且 $\dim(Y/\mathrm{Im}L)=1$, 因此 L 是指标为 0 的线性 Fredholm 算子.

定义投影算子:

$$P:X\longrightarrow\mathrm{Ker}(L):x\longrightarrow Px=\frac{1}{T}\int_0^Tx(t)\mathrm{d}t;\quad Q:Y\longrightarrow Y/\mathrm{Im}(L):y\longrightarrow Qy=\frac{1}{T}\int_0^Ty(t)\mathrm{d}t.$$

显然 P,Q 为连续算子, $\mathrm{Im}(P)=R=\mathrm{Ker}(L)$, 且 $\mathrm{Ker}(Q)=\mathrm{Im}(L)$. 由于 $\mathrm{Im}(Q)=\mathrm{Im}(P)$, 故作 $\Psi=J:\mathrm{Im}(Q)\to\mathrm{Im}(P)$ 为恒同映射, 则 Ψ 是 $\mathrm{Im}(Q)\to\mathrm{Im}(P)$ 的线性同胚映射.

下面讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)-\theta x(t-\tau)]=\lambda[\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t)],\quad\lambda\in(0,1)\tag{1}$$

的 T 周期解的先验界.

设 $x(t+T)=x(t)$ 为方程 (1) 的任一 T 周期解, 将 $x(t)$ 代入方程 (1) 并对其两端在区间 $[0,T]$ 上积分, 经整理易得:

$$\int_0^T\alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t+\int_0^T\beta(t)g(x(x(t)))\mathrm{d}t+\int_0^Tp(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$\int_0^T\beta(t)g(x(x(t)))\mathrm{d}t=-[\int_0^T\alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t+\int_0^Tp(t)\mathrm{d}t].$$

因为 $g(x(x(t))),\beta(t)$ 连续, $\beta(t)\neq0$, 则 $\beta(t)$ 在 $[0,T]$ 上不变号. 故 $|\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t|=\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t\neq 0$, 则存在 $\xi\in[0,T]$ 使得

$$g(x(x(\xi)))\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t=\int_0^T\beta(t)g(x(x(t)))\mathrm{d}t=-[\int_0^T\alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t+\int_0^Tp(t)\mathrm{d}t].$$

那么

$$|g(x(x(\xi)))||\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t|\le \int_0^T [|\alpha(t)||f(x(t))|+|p(t)|]\mathrm{d}t \le \int_0^T (M|\alpha(t)|+|p(t)|)\mathrm{d}t.$$

因此

$$|g(x(x(\xi)))|\le \frac{\int_0^T (M|\alpha(t)|+|p(t)|)\mathrm{d}t}{\int_0^T |\beta(t)|\mathrm{d}t}.$$

又由于 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\pm r\neq 0$, 故 $\lim_{|x|\to\infty}|\frac{g(x)}{x}|=r>0$, 那么 $\lim_{|x|\to\infty}|g(x)|=+\infty$. 所以存在 $A>0$, 使得 $|x(x(\xi))|<A$. 显然存在整数 n 及 $t_0\in[0,T]$, 使得 $x(\xi)=nT+t_0$, 那么 $|x(t_0)|<A$.

由于 $\lim_{|x|\to\infty}|\frac{g(x)}{x}|=r>0$, 且 $1-2\theta-r\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t>0$, 故对任意 ε: $0<\varepsilon<\frac{1-2\theta-r\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t}{\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t}$, 存在常数 $x_0>0$, 使得 $|x|>x_0$ 时有 $||\frac{g(x)}{x}|-r|<\varepsilon$, 即 $|g(x)|<(r+\varepsilon)|x|$, 记 $r+\varepsilon=r_0$. 则有 $1-2\theta-r_0\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t>0$, 且 $|g(x)|<r_0|x|$.

现令集合 $E_1=\{t\in[0,T]||x(x(t))|\le x_0\}, E_2=\{t\in[0,T]||x(x(t))|>x_0\}$.

由 g 的连续性可得，存在 $M_0>0$, 使得任意 $z\in[-x_0,x_0]$ 有 $|g(z)|\le M_0$. 那么对 $t\in E_1$ 有 $|g(x(x(t)))|\le M_0$, 而 $t\in E_2$ 有 $|g(x(x(t)))|<r_0|x(x(t))|$.

由方程 (1) 可得： $\dot{x}(t)=\theta\dot{x}(t-\tau)+\lambda[\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t)]$, 那么对任意 $t\in[0,T]$ 有

$$\begin{aligned}
x(t)&=x(t_0)+\int_{t_0}^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s\\
&=x(t_0)+\int_{t_0}^t[\theta\dot{x}(s-\tau)+\lambda\alpha(s)f(x(s))+\lambda\beta(s)g(x(x(s)))+\lambda p(s)]\mathrm{d}s\\
&=x(t_0)+\theta[x(t-\tau)-x(t_0-\tau)]+\lambda\int_{t_0}^t[\alpha(s)f(x(s))+\beta(s)g(x(x(s)))+p(s)]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&|x(t)|\le|x(t_0)|+\theta[|x(t-\tau)|+|x(t_0-\tau)|]+|\int_{t_0}^t[\alpha(s)f(x(s))+\beta(s)g(x(x(s)))+p(s)]\mathrm{d}s|\\
&\le A+2\theta|x|_\infty+\int_0^T|\alpha(t)||f(x(t))|\mathrm{d}t+\int_0^T|\beta(t)||g(x(x(t)))|\mathrm{d}t+\int_0^T|p(t)|\mathrm{d}t\\
&\le A+2\theta|x|_\infty+M\int_0^T|\alpha(t)|\mathrm{d}t+\int_{E_1}|\beta(t)||g(x(x(t)))|\mathrm{d}t+\\
&\quad\int_{E_2}|\beta(t)||g(x(x(t)))|\mathrm{d}t+\int_0^T|p(t)|\mathrm{d}t\\
&< A+2\theta|x|_\infty+M\int_0^T|\alpha(t)|\mathrm{d}t+M_0\int_{E_1}|\beta(t)|\mathrm{d}t+\\
&\quad\int_{E_2}|\beta(t)|r_0|x(x(t))|\mathrm{d}t+\int_0^T|p(t)|\mathrm{d}t\\
&\le A+2\theta|x|_\infty+M\int_0^T|\alpha(t)|\mathrm{d}t+M_0\int_0^T|\beta(t)|\mathrm{d}t+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&r_0 \mid x \mid_\infty \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t\\ =& A + (2\theta + r_0 \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t) \mid x \mid_\infty + \int_0^T [M \mid \alpha(t) \mid + M_0 \mid \beta(t) \mid + \mid p(t) \mid]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以

$$\mid x \mid_\infty < A + (2\theta + r_0 \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t) \mid x \mid_\infty + \int_0^T [M \mid \alpha(t) \mid + M_0 \mid \beta(t) \mid + \mid p(t) \mid]\mathrm{d}t.$$

$$(1 - 2\theta - r_0 \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t) \mid x \mid_\infty < A + \int_0^T [M \mid \alpha(t) \mid + M_0 \mid \beta(t) \mid + \mid p(t) \mid]\mathrm{d}t.$$

而 $1 - 2\theta - r_0 \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t > 0$, 所以

$$\mid x \mid_\infty < \frac{A + \int_0^T [M \mid \alpha(t) \mid + M_0 \mid \beta(t) \mid + \mid p(t) \mid]\mathrm{d}t}{1 - 2\theta - r_0 \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t}.$$

由于上式中 A, M, M_0, 及 r_0 均为与 x 无关的常数，故令常数

$$\frac{A + \int_0^T [M \mid \alpha(t) \mid + M_0 \mid \beta(t) \mid + \mid p(t) \mid]\mathrm{d}t}{1 - 2\theta - r_0 \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t} := \omega_0.$$

那么任意 $t \in R$, 有 $\mid x(t) \mid < \mid x \mid_\infty < \omega_0$.

因为 $g \in C(R, R)$, 所以存在 $C_0 > 0$, 使得对任意 $t \in R$, $\mid g(x(x(t))) \mid \le C_0$. 对方程 (1) 两端取绝对值可得

$$\mid \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t) - \theta x(t-\tau)) \mid \le \mid \alpha(t) \mid \mid f(x(t)) \mid + \mid \beta(t) \mid \mid g(x(x(t))) \mid + \mid p(t) \mid.$$

$$\mid \dot{x}(t) \mid \le \mid \theta \dot{x}(t-\tau) \mid + \mid \alpha(t) \mid \mid f(x(t)) \mid + \mid \beta(t) \mid \mid g(x(x(t))) \mid + \mid p(t) \mid.$$

则

$$\mid \dot{x}(t) \mid < \theta \mid \dot{x} \mid_\infty + M \mid \alpha \mid_\infty + C_0 \mid \beta \mid_\infty + \mid p \mid_\infty,$$

$$(1-\theta) \mid \dot{x} \mid_\infty < M \mid \alpha \mid_\infty + C_0 \mid \beta \mid_\infty + \mid p \mid_\infty.$$

由定理条件知 $1 - \theta > 0$, 故

$$\mid \dot{x} \mid_\infty < \frac{1}{1-\theta}(M \mid \alpha \mid_\infty + C_0 \mid \beta \mid_\infty + \mid p \mid_\infty) := \omega_1.$$

因此，方程 (1) 的任一 T 周期解 $x = x(t)$ 一致有界.

为建立后面的同伦关系，需讨论 $f(x)\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t + g(x)\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)\mathrm{d}t$ 的符号. 为书写方便，记

$$G(x) = f(x)\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t + g(x)\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $f(x), \alpha(t), p(t)$ 均为有界函数， $\beta(t) \neq 0$, 不变号.

当 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=r>0$ 时， $\lim_{|x|\to\infty}g(x)\mathrm{sgn}(x)=+\infty$. 那么总存在常数 $x_1>0$, 使得当 $|x|\geq x_1$ 时 $G(x)\neq 0$, 且若 $\beta(t)>0$, $G(x)$ 且与 $g(x)$ 同号，那么 $xG(x)>0$; 若 $\beta(t)<0$, $G(x)$ 与 $g(x)$ 异号，那么 $xG(x)<0$.

当 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=-r<0$ 时， $\lim_{|x|\to\infty}g(x)\mathrm{sgn}(-x)=+\infty$. 那么总存在常数仍记作 $x_1>0$, 使得当 $|x|\geq x_1$ 时 $G(x)\neq 0$, 且若 $\beta(t)>0$, $G(x)$ 与 $g(x)$ 同号，但 $xG(x)<0$; 若 $\beta(t)<0$, $G(x)$ 与 $g(x)$ 异号，但 $xG(x)>0$.

现取 $\omega=\max\{\omega_0,\omega_1,x_1\},\Omega=\{x\in X|\ \|x\|<\omega\}$. 则 Ω 为 X 中的有界开集. 显然 $\mathrm{Ker}(L)\cap\Omega\neq\Phi$.

定义非线性映射

$$F:\overline{\Omega}\longrightarrow Y:x\longrightarrow Fx=\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t).$$

由函数 f,g 及 α,β 的性质不难证明 F 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的. 由上面的讨论可得算子方程 $Lx=\lambda Fx$ 在 $\mathrm{Dom}(L)\cap\partial\Omega$ 上对任意 $\lambda\in(0,1)$ 无解.

对任意 $x\in\mathrm{Ker}(L)\cap\partial\Omega,\|x\|=\omega$,

$$\begin{aligned}QFx&=\frac{1}{T}\int_0^T[\alpha(t)f(x)+\beta(t)g(x)+p(t)]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}f(x)\int_0^T\alpha(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t+\int_0^T p(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}G(x)\neq 0.\end{aligned}$$

下面讨论 QF 在 $\mathrm{Ker}(L)\cap\partial\Omega$ 上的 Brouwer 度：

首先，当 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=r>0$, 且 $\beta(t)>0$ 时，或 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=-r>0$, 且 $\beta(t)<0$ 时. 定义映射 $H_1:I\times\overline{\Omega}\longrightarrow X$,(其中 $I=[0,1]$.) 任意 $(\mu,x)\in I\times\overline{\Omega}$,

$$H_1(\mu,x)=\mu x+(1-\mu)QFx=\mu x+\frac{1-\mu}{T}\int_0^T[\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t)]\mathrm{d}t.$$

由于当 $x\in\mathrm{Ker}(L)\cap\partial\Omega$ 时， x 与 $G(x)$ 同号. 所以 $x\in\mathrm{Ker}(L)\cap\partial\Omega$ 时，

$$H_1(\mu,x)=\mu x+\frac{1-\mu}{T}[f(x)\int_0^T\alpha(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t+\int_0^T p(t)\mathrm{d}t]=\mu x+\frac{1-\mu}{T}G(x)\neq 0;$$

其次，当 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=r>0$, 且 $\beta(t)<0$ 时，或 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{x}=-r<0$, 且 $\beta(t)>0$ 时. 定义映射 $H_2:I\times\overline{\Omega}\longrightarrow X$, 任意 $(\mu,x)\in I\times\overline{\Omega}$,

$$H_2(\mu,x)=-\mu x+(1-\mu)QFx=-\mu x+\frac{1-\mu}{T}\int_0^T[\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t)]\mathrm{d}t.$$

而当 $x\in\mathrm{Ker}(L)\cap\partial\Omega$ 时， x 与 $G(x)$ 异号，所以此时

$$H_2(\mu,x)=-\mu x+\frac{1-\mu}{T}[f(x)\int_0^T\alpha(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t+\int_0^T p(t)\mathrm{d}t]=-\mu x+\frac{1-\mu}{T}G(x)\neq 0.$$

那么 QF 与恒同映射 $J: X \longrightarrow X: x \longrightarrow J(x) = x$(或 $-J$) 同伦. 由 Brouwer 度的同伦不变性可得

$$\begin{aligned}&\deg(\Psi QF|_{\overline{\mathrm{Ker}(L)\cap\Omega}}, \mathrm{Ker}(L)\cap\Omega, 0) = \deg(QF, \Omega\cap\mathrm{Ker}(L), 0) = \deg(H_1(0,x), \Omega\cap\mathrm{Ker}(L), 0)\\ &= \deg(H_1(1,x), \Omega\cap\mathrm{Ker}(L), 0) = \deg(H_2(0,x), \Omega\cap\mathrm{Ker}(L), 0) = \deg(H_2(1,x), \Omega\cap\mathrm{Ker}(L), 0)\\ &= \deg(\pm J, \Omega\cap\mathrm{Ker}(L), 0) \neq 0.\end{aligned}$$

根据 Mawhin 连续定理 [8], 算子方程 $Lx = Fx$ 在 Ω 内有解, 因此方程 (E) 至少存在一个周期解. □

当 g 有界, f 无界时, 与定理 1 类似的, 方程 (E) 周期解存在性的另外一个定理是:

定理 2 设下列条件成立

(I′) 对任意 $t \in R, \alpha(t), \beta(t)$ 不变号, 且 $\alpha(t) \neq 0$;

(II′) 存在常数 $M' > 0$, 使得对任意 $x \in R$, 有 $|g(x)| < M'$;

(III′) $\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm r', (0 < r' < +\infty)$.

那么, 当 $1 - 2|\theta| - r'\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t > 0$ 时, 方程 (E) 至少存在一个 T 周期解.

本定理的证明方法与定理 1 基本相同, 证明从略.

当函数 f, g 都无界时, 我们假设函数 f 是非负的, 此时有

定理 3 设常数 $|\theta| < 1$, 并且下列条件成立

(III) $\lim_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \pm r$(其中 $0 < r < +\infty$);

(IV) 存在常数 $M_1 > 0$, 使得对任意 $x \in R$ 有 $f(x) \geq M_1|x|$.

若对任意 $t \in [0, T]$, 有 $\alpha(t) > \frac{r}{M_1}|\beta(t)| > 0$, 则方程 (E) 至少存在一个 T 周期解.

证明 与定理 1 相同地定义 Banach 空间 X, Y, 及映射 L, P, Q.

由于 $\lim_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \pm r$, $\lim_{|x|\to\infty} |\frac{g(x)}{x}| = r > 0$. 由于 $\alpha(t) > \frac{r}{M_1}|\beta(t)|$, 故 $M_1\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t > r\int_0^T |\beta(t)|\mathrm{d}t$. 那么对任意 ε: $0 < \varepsilon < \frac{M_1\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t - r\int_0^T |\beta(t)|\mathrm{d}t}{\int_0^T |\beta(t)|\mathrm{d}t}$, 存在 $x_2 > 0$, 使当 $|x| > x_2$ 时, $||\frac{g(x)}{x}| - r| < \varepsilon$. 与定理 1 类似地易证, 存在常数 $r_1 > 0$, 使当 $|x| > x_2$ 时, $|g(x)| < r_1|x|$, 并且 $M_1\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t - r_1\int_0^T |\beta(t)|\mathrm{d}t > 0$. 同时存在常数 $C_1 > 0$, 使当 $|x| \leq x_2$ 时, $|g(x)| < C_1$.

定义集合 $E_3 = \{t \in [0, T] \mid |x(x(t))| \leq x_2\}$, $E_4 = \{t \in [0, T] \mid |x(x(t))| > x_2\}$. 则当 $t \in E_3$ 时, $|g(x(x(t)))| < C_1$; 当 $t \in E_4$ 时, $|g(x(x(t)))| < r_1|x(x(t))|$.

下面讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t) - \theta x(t-\tau)] = \lambda[\alpha(t)f(x(t)) + \beta(t)g(x(x(t))) + p(t)], \quad \lambda \in (0, 1)$$

的 T 周期解的情况.

与定理 1 类似地, 设 $x(t+T) = x(t)$ 为方程的任一周期解, 则

$$\int_0^T \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t + \int_0^T \beta(t)g(x(x(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)\mathrm{d}t = 0,$$

$$\int_0^T \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t = -[\int_0^T \beta(t)g(x(x(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)\mathrm{d}t].$$

两边取绝对值，并注意到 f 与 $\alpha(t)$ 的符号，可得

$$\int_0^T \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t \le \int_0^T \mid \beta(t)g(x(x(t))) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}
M_1\int_0^T \alpha(t) \mid x(t) \mid \mathrm{d}t &\le \int_{E_3} \mid \beta(t)g(x(x(t))) \mid \mathrm{d}t + \int_{E_4} \mid \beta(t)g(x(x(t))) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t \\
&< \int_{E_3} \mid \beta(t) \mid C_1\mathrm{d}t + \int_{E_4} \mid \beta(t) \mid r_1 \mid x(x(t)) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t \\
&\le C_1\int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + r_1\int_0^T \mid \beta(t) \mid\mid x(x(t)) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t \\
&\le C_1\int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + r_1 \mid x \mid_\infty \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

则

$$M_1 \mid x \mid_\infty \int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t \le C_1\int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + r_1 \mid x \mid_\infty \int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t.$$

$$\mid x \mid_\infty \int_0^T (M_1\alpha(t) - r_1 \mid \beta(t) \mid)\mathrm{d}t \le C_1\int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t.$$

那么

$$\mid x \mid_\infty \le \frac{C_1\int_0^T \mid \beta(t) \mid \mathrm{d}t + \int_0^T \mid p(t) \mid \mathrm{d}t}{\int_0^T (M_1\alpha(t) - r_1 \mid \beta(t) \mid)\mathrm{d}t} := \omega_3.$$

由于 $\mid \theta \mid < 1, \mid x \mid_\infty$ 有界，与定理 1 类似地存在常数 $\omega_4 > 0$, 使得 $\mid \dot{x} \mid_\infty < \omega_4$. 取 $\varpi = \max\{\omega_3, \omega_4, x_1\}$, 注意这里 x_1 的取法与定理 1 中的 x_1 相同. 设 $\Omega_1 = \{x \in X \mid \parallel x \parallel < \varpi\}$. 并定义非线性映射

$$F : \overline{\Omega}_1 \longrightarrow Y : x \longrightarrow Fx = \alpha(t)f(x(t)) + \beta(t)g(x(x(t))) + p(t).$$

与定理 1 同理可证方程 $Lx = Fx$ 在 X 内有解. 故方程 (E) 存在 T 周期解. □

下面讨论几个简单应用，考虑方程

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{4}\dot{x}(t-\tau) + Ae^{\frac{\sin x}{x}}\cos t + (1 + \frac{1}{2}\sin t)\cdot\frac{1}{6\pi}x(x(t)) + p(t). \tag{2}$$

这里设 $\theta = \frac{1}{4}, f(x) = Ae^{\frac{\sin x}{x}}, \beta(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin t, g(x) = \frac{1}{6\pi}x$. 则 $r = \frac{1}{6\pi}$, 于是 $1 - 2|\theta| - r\int_0^{2\pi}|\beta(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{6} > 0$. 根据定理 1, 方程 (2) 至少有一个 2π 周期解，其中 A, τ 为任意常数, $p(t)$ 是以 2π 为周期解的任意连续函数.

由于定理 1 只要求 g 在远离原点时满足一定的条件，因此在方程 (2) 中的 g 上可任意加上一项有界连续函数，如方程

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{4}\dot{x}(t-\tau) + Ae^{\frac{\sin x}{x}}\cos t + (1 + \frac{1}{2}\sin t)\cdot\frac{1}{6\pi}[x(x(t)) + \arctan x(x(t))] + p(t) \tag{3}$$

同样具有 2π 周期解. 类似地利用定理 2 我们很容易证明方程

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{4}\dot{x}(t-\tau)+\frac{1}{12\pi}e^{\sin t}x+B(1+\cos t)\sin x(x(t))+p(t) \tag{4}$$

的 2π 周期解的存在性. 以上几个方程都是实际应用和理论研究不可回避的问题.

参考文献:

[1] HALE J. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. Springer-Verlag, New York, 1977.

[2] 郑祖庥. 泛函微分方程理论 [M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1994.
ZHENG Zu-xiu. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. Hefei: Educational Publishing House, 1994. (in Chinese)

[3] 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程 [M]. 北京大学出版社, 北京, 2000.
LIU Shi-kuo, LIU Shi-da. *Nonliear Equations in Physics* [M]. Beijing: Peking University Press, 2000. (in Chinese)

[4] WANG Ke. *On the Equations* $x'(t)=f(x(x(t)))$ [J]. Funk. Ekv., 1990, **33**(3): 405–425.

[5] EDER E. *The Function-Differential equations* $x'(t)=x(x(t))$ [J], J. Differential Equations, 1984, **54**(3): 390–400.

[6] 葛渭高. n- 维 Liénard 型方程的调和解 [J]. 数学年刊 (A 辑), 1990, **11**: 297–307.
GE Wei-gao. *Harmonic solutions of n-dimensional Liénard equations* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1990, **11**(3): 297–307. (in Chinese)

[7] LU Shi-ping, GE Wei-gao. *On the existence of periodic solutions for neutral functional differential equation* [J]. Nonlinear Anal., 2003, **54**: 1285–1306.

[8] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1984, 172–183 .

Existence of Periodic Solutions to a Type of First Order Neutral Functional Differential Equation with Complex Deviating Argumen

LIU Xi-ping, JIA Mei
(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The paper studies the existence of periodic solutions to a type of the first order neutral functional differential equations with complex deviating argument $\dot{x}(t)=\theta\dot{x}(t-\tau)+\alpha(t)f(x(t))+\beta(t)g(x(x(t)))+p(t)$, obtains sufficient conditions for existence of the periodic solutions, and gives a few simple applications of the theory.

Key words: functional differential-iterative equation; periodic solution; topological degree.