第27卷第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.27, No.4
2007年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0925-08　　　**文献标识码**: A

杨 - 张不等式的推广及其应用

杨定华 [1,2]

(1. 四川师范大学数学与软件科学学院，四川 成都 610066;
2. 中国科学院成都计算机应用研究所，四川 成都 610041)
(E-mail: yangdinghua@yahoo.com.cn)

摘　要: 本文利用杨路和张景中创造的特征根的方法和 Darboux 定理，将著名的杨 - 张不等式推广到 n 维欧氏空间的两个完全同向的有限质点组中，获得了有限质点组的一类几何不等式，作为其应用，给出了一些新的三角形不等式.

关键词: 单形；体积；杨 - 张不等式； Darboux 定理；几何不等式.
MSC(2000): 51K05
中图分类: O184

1 引言及主要结果

首先约定记号：$\Sigma(A)=\{A_i(m_i), i=0,1,\ldots,N\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的质点组，$m_i\geq 0$ 是点 A_i 所赋有的质量. 任取中 $\Sigma(A)$ 的 $(k+1)$ 个点 $A_{i_0},A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$, 将其所支撑的 k 维单形的体积记为 $V_{i_0i_1,\ldots,i_k}$. 令

$$\begin{cases} M_k=\sum\limits_{0\leq i_0\leq i_1\leq\cdots\leq i_k\leq N} m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V^2_{i_0i_1\cdots i_k}(1\leq k\leq n) \\ M_0=m_0+m_1+\cdots+m_N \end{cases} \tag{1}$$

对于上述诸不变量，杨路和张景中在文献 [7] 和 [8] 中获得了关于它们的具有极广泛应用价值的一类几何不等式.

$$\frac{M_k^l}{M_l^k}=\frac{[(n-l)!(l!)^3]^k}{[(n-k)!(k!)^3]^l}(n!M_0)^{l-k}\quad(1\leq k<l\leq n), \tag{2}$$

$$M_k^2\geq(\frac{k+1}{k})\cdot(\frac{n-k+1}{n-k})M_{k-1}M_{k+1}\quad(1\leq k\leq n), \tag{3}$$

其中不等式 (2) 和 (3) 等号当其仅当 $\Sigma(A)$ 的密集椭球为球时成立.

上述不等式 (2) 和 (3) 即为著名的杨路 – 张景中不等式 (简称：杨 - 张不等式), 被誉为形式优美，有重要应用价值的，极少数的，优秀的几何不等式. 同时也是距离几何中最基本的不等式之一，已被 D.S.Mitrinovic 收入专著 [4] 中.

二十多年以来，很多距离几何工作者试图推广杨路 - 张景中不等式，但是其进展甚微，例如，在文献 [6] 中，作者应用控制不等式的方法，直接推广了著名的 Newton 不等式，然后利用推广了的 Newton 不等式给出上述杨 – 张不等式的一个推广. 在本文中，我们在 Darboux 定理

收稿日期: 2005-12-02; **接受日期**: 2006-07-02
基金项目: 国家 973 计划基金 (2004CB318003).

基础上，应用杨路和张景中创造的特征根的方法，给出了杨 – 张不等式的一个较为本质性的推广. 然后再给出它的一点应用. 例如，导出了一个崭新的、有趣的、涉及三个三角形的几何不等式，而由这个不等式可以直接导出著名的 Pedoe 不等式 [5] 等.

设 $\Sigma(A)=\{A_i(m_i),i=0,1,\ldots,N\}$ 和 $\Sigma(A')=\{A'_i(m'_i),i=0,1,\ldots,N\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中具有相同质点数量的两个质点组， $m_i\geq 0$ 和 $m'_i\geq 0$ 分别是点 A_i 和 A'_i 所赋有的质量. 设 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的质心分别为 O 和 O', 现将 $\Sigma(A)$ 作刚体运动使得 O 和 O' 相重合 (显然 $\Sigma(A')$ 的诸不变量在刚体运动变换下是变的，以下我们都约定：质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的质心重合), 令 H 是过 O 的任意一 $(n-1)$ 维定向超平面， $\overline{e}_H$ 是 H 的单位法向量，又令 $\overline{a}_i=\overline{OA}_i$ 和 $\overline{a}'_i=\overline{OA}'_i$ 分别表示点 A_i 和 A'_i 的坐标向量, 设 $\overline{a}_k=(a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn}),\overline{a}'_k=(a'_{k1},a'_{k2},\ldots,a'_{kn})$, $k=0,1,\ldots,N$, 记

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{m_0}a_{01} & \sqrt{m_1}a_{11} & \cdots & \sqrt{m_N}a_{N1}\\ \sqrt{m_0}a_{02} & \sqrt{m_1}a_{12} & \cdots & \sqrt{m_N}a_{N2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sqrt{m_0}a_{0n} & \sqrt{m_1}a_{1n} & \cdots & \sqrt{m_N}a_{Nn}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\sqrt{m'_0}a'_{01} & \sqrt{m'_1}a'_{11} & \cdots & \sqrt{m'_N}a'_{N1}\\ \sqrt{m'_0}a'_{02} & \sqrt{m'_1}a'_{12} & \cdots & \sqrt{m'_N}a'_{N2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sqrt{m'_0}a'_{0n} & \sqrt{m'_1}a'_{1n} & \cdots & \sqrt{m'_N}a'_{Nn}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

为了叙述方便叙述，我们先引入如下的概念.

定义 1.1 如果质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 之间存在线性变换 (在一组正交基下的矩阵记为 $\Lambda\in R^{n\times n}$, 容易知道：除去一个正交相似变换， Λ 是唯一的), 使得 $Q=\Lambda P$, 如果矩阵 Λ 是实对称正定矩阵，则我们称质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是完全同向的，如果矩阵 Λ 是实对称负定矩阵，则我们称质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是完全反向的，如果矩阵 Λ 是实对称正定矩阵或者负定矩阵，则我们称质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是有同向的，如果矩阵 Λ 的所以特征值都是实数的，则我们称质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是实数相关的.

考虑定义 1.2,1.3 和 1.4 中存在的意义我们约定：在定义 1.2,1.3 和 1.4 中，质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是完全同向的，我们先引入如下的一些概念.

定义 1.2 称

$$\begin{aligned}I_H=&\sqrt{m_0m'_0}(\overline{a}_0\cdot\overline{e}_H)(\overline{a}'_0\cdot\overline{e}_H)+\sqrt{m_1m'_1}(\overline{a}_1\cdot\overline{e}_H)(\overline{a}'_1\cdot\overline{e}_H)+\cdots+\\ &\sqrt{m_Nm'_N}(\overline{a}_N\cdot\overline{e}_H)(\overline{a}'_N\cdot\overline{e}_H)\end{aligned} \tag{6}$$

为 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 关于超平面 H 的广义转动惯量.

令

$$\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\overline{e}_H}{\sqrt{I_H}}, \tag{7}$$

所以

$$\overline{e}_H=\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}=\frac{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\|\overline{x}\|}. \tag{8}$$

由 I_H 之定义得到

$$\overline{e}_HPQ^\tau\overline{e}_H{}^\tau=I_H=\frac{1}{\|\overline{x}\|^2}, \tag{9}$$

这里 $\overline{e}_H{}^{\tau}, Q^{\tau}$ 分别表示 $\overline{e}_H, Q$ 的转置，从而得到

$$\overline{x}PQ^{\tau}\overline{x}^{\tau}=1. \tag{10}$$

由于质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的凸包都是 n 维的，并且它们是完全同向的，此时矩阵 (PQ^{τ}) 的非零特征值应与 $(Q^{\tau}P)=(P^{\tau}\Lambda P)$ 的非零特征值一致，显然矩阵 (PQ^{τ}) 的所有特征值为正，因此容易知道：在 (10) 式中，当 H 取遍过 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 共同的质点 O 的 $(n-1)$ 维超平面，点 $\vec{x}$ 的轨迹形成的二次超曲面为一个椭球，因此我们给出

定义 1.3 在 (10) 式中, 我们称当 H 取遍过 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 共同的质点 O 的 $(n-1)$ 维超平面, 点 $\vec{x}$ 的轨迹形成的二次超曲面为一个椭球为 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的广义惯量椭球, 记为 $\aleph(A,A')$.

定义 1.4 如果 $\Im(A,A')$ 是另外一个椭球，它与 $\aleph(A,A')$ 有相同的主轴，并且 $\Im(A,A')$ 的各半轴长是 $\aleph(A,A')$ 的对应半轴长的倒数，我们将 $\Im(A,A')$ 称为 $\aleph(A,A')$ 的广义密集椭球. 显然 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的广义密集椭球为球的充分必要条件是：它们的广义惯量椭球为球.

现在我们分别取 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的 $(k+1)$ 个点 $A_{i_0},A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$ 和 $A'_{i_0},A'_{i_1},\ldots,A'_{i_k}$, 将其所支撑的 k 维单形的有向体积记为 $V_{i_0i_1,\ldots,i_k}$ 和 $V'_{i_0i_1,\ldots,i_k}$. 令

$$\begin{cases} W_k=\sum\limits_{0\le i_0\le i_1\le\cdots\le i_k\le N}\sqrt{m_{i_0}m'_{i_0}m_{i_1}m'_{i_1}\cdots m_{i_k}m'_{i_k}}V_{i_o i_1\cdots i_k}V'_{i_o i_1\cdots i_k} \quad (1\le k\le n)\\ W_0=\sqrt{m_0m'_0}+\sqrt{m_1m'_1}+\cdots+\sqrt{m_Nm'_N}. \end{cases} \tag{11}$$

对于上述 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的诸不变量，本文的主要结果是

定理 1.5 设 $\Sigma(A)=\{A_i(m_i),i=0,1,\ldots,N\}$ 和 $\Sigma(A')=\{A'_i(m'_i),i=0,1,\ldots,N\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中具有相同质点数量的, 并且是完全同向的两个质点组, 对于它们的上述诸不变量，成立不等式

$$\frac{W_k^l}{W_l^k}=\frac{[(n-l)!(l!)^3]^k}{[(n-k)!(k!)^3]^l}(n!W_0)^{l-k} \quad (1\le k<l\le n),$$

$$W_k^2\ge(\frac{k+1}{k})\cdot(\frac{n-k+1}{n-k})W_{k-1}W_{k+1} \quad (1\le k\le n-1),$$

其中不等式 (12) 和 (13) 等号成立的充分必要条件是： $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的广义惯量椭球 $\aleph(A,A')$ 为球.

2 定理 1.5 的证明

为方便定理 1.5 的证明，我们先介绍将用到的一个重要的公式.

引理 2.1 设 $V(A_0,A_1,\ldots,A_n)$ 和 $V(A'_0,A'_1,\ldots,A'_n)$ 分别是 n 维欧氏空间 E^n 中的两个 n 维单形 $\Omega(A)=(A_0,A_1,\ldots,A_n)$ 和 $\Omega(A')=(A'_0,A'_1,\ldots,A'_n)$ 的有向体积. 则有

$$-(n!)^2V(A_0,A_1,\ldots,A_n)\cdot V(A'_0,A'_1,\ldots,A'_n)=D(A_0,A_1,\ldots,A_n;A'_0,A'_1,\ldots,A'_n), \tag{14}$$

这里

$$D(A_0,A_1,\ldots,A_n;A'_0,A'_1,\ldots,A'_n)=\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -\frac{\rho_{00}^2}{2} & -\frac{\rho_{01}^2}{2} & \cdots & -\frac{\rho_{0n}^2}{2}\\ 1 & -\frac{\rho_{10}^2}{2} & -\frac{\rho_{11}^2}{2} & \cdots & -\frac{\rho_{1n}^2}{2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & -\frac{\rho_{n0}^2}{2} & -\frac{\rho_{n1}^2}{2} & \cdots & -\frac{\rho_{nn}^2}{2} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其中 $\rho_{ij}=\overline{A_iA'_j}$ 表示顶点 A_i 与 A'_j 的欧氏距离，行列式 (15) 中的矩阵为两个 n 维单形中著名的 Sylvester-Blumenthal 矩阵 [2], 是 Cayley-Menger 矩阵的一个直接推广，公式 (14) 最早出现在 Darboux 的著作中，我们习惯将它称为 Darboux 定理. 它有很多重要的应用，是距离几何研究中最重要的、最基本的公式之一.

下面利用 Darboux 定理给出定理 1.5 的证明.

定理 1.5 的证明 通过平移, 使质点组 $\Sigma(A)$ 的质心 O 和质点组 $\Sigma(A')$ 的质心 O' 重合并且为坐标原点, 又令 $\bar{a}_i=\overline{OA_i}, \bar{a}'_i=\overline{OA'_i}$ 分别表示 A_i, A'_i 的坐标向量, 设 $\bar{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}), \bar{a}'_i=(a'_{i1},a'_{i2},\dots,a'_{in})$, 这里 $i=0,1,\dots,N$, 由于 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是完全同向的，从而存在唯一 (除去一个正交相似变换， Λ 是唯一的) 一个实对称正定矩阵 Λ, 使得 $Q=\Lambda P$, 令 $\Xi=Q^\tau P=P^\tau\Lambda^\tau P=P^\tau\Lambda P$, 显然 Ξ 是 $(N+1)$ 阶实对称矩阵，其非零特征值与 $PP^\tau\Lambda$ 一致，又容易知道： $PP^\tau\Lambda$ 只有 n 个非零的正特征值. 所以 Ξ 是具有 n 个非零的正特征值的 $(N+1)$ 阶实对称半正定矩阵，现在考虑 Ξ 的特征多项式

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=\det(\Xi-\lambda I)=\det(P^\tau\Lambda P-\lambda I)\\&=\det(Q^\tau P-\lambda I)=\det(\sqrt{m'_im_j}\bar{a}'_i\bar{a}_j^\tau-\lambda\delta_{ij})\\&=\frac{1}{W_0}\det\begin{pmatrix}W_0 & 0 & \cdots & 0\\ \sqrt{m'_0} & & & \\ \vdots & & \sqrt{m'_im_j}\bar{a}'_i\bar{a}_j^\tau-\lambda\delta_{ij} & \\ \sqrt{m'_N} & & & \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{16}$$

我们约定：行列式的行列号由 0 算起. 现在将行列式 (16) 第 k 行乘以 $-\sqrt{m_k}$ 加到第 0 行，由质心的性质： $\sum_{k=0}^N m'_k=\mathbf{0_n}$(其中 $\mathbf{0_n}$ 表示 n 维 0 向量), 因此得到

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=\frac{1}{W_0}\det\begin{pmatrix}0 & \lambda\sqrt{m_0} & \cdots & \lambda\sqrt{m_N}\\ \sqrt{m'_0} & & & \\ \vdots & & \sqrt{m'_im_j}\bar{a}'_i\bar{a}_j^\tau-\lambda\delta_{ij} & \\ \sqrt{m'_N} & & & \end{pmatrix}\\&=\frac{\lambda}{W_0}\det\begin{pmatrix}0 & \sqrt{m_0} & \cdots & \sqrt{m_N}\\ \sqrt{m'_0} & & & \\ \vdots & & \sqrt{m'_im_j}\bar{a}'_i\bar{a}_j^\tau-\lambda\delta_{ij} & \\ \sqrt{m'_N} & & & \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{17}$$

再将行列式 (17) 第 0 列 (或行) 乘以 $-\frac{1}{2}\sqrt{m'_i}\bar{a}'_i\bar{a}'^\tau_i$ (或 $-\frac{1}{2}\sqrt{m_j}\bar{a}_j\bar{a}_j^\tau$) 加到第 i 列 (或 j 行) 得到

$$F(\lambda)=\frac{\lambda}{W_0}\det\begin{pmatrix}0 & \sqrt{m_0} & \cdots & \sqrt{m_N}\\ \sqrt{m'_0} & & & \\ \vdots & & -\frac{\sqrt{m'_im_j}(\bar{a}'_i-\bar{a}_j)^2}{2}-\lambda\delta_{ij} & \\ \sqrt{m'_N} & & & \end{pmatrix}.\tag{18}$$

又令 $\rho_{ij}^2=(\bar{a}'_i-\bar{a}_j)^2=(\bar{a}'_i-\bar{a}_j)(\bar{a}'_i-\bar{a}_j)^\tau$, 从而有

$$F(\lambda)=\frac{\lambda}{W_0}\det\begin{pmatrix}0 & \sqrt{m_0} & \cdots & \sqrt{m_N}\\ \sqrt{m'_0} & & & \\ \vdots & & -\frac{\sqrt{m'_im_j}\rho_{ij}^2}{2}-\lambda\delta_{ij} & \\ \sqrt{m'_N} & & & \end{pmatrix}.\tag{19}$$

再由 Darboux 定理 (14) 知

$$-(k!)^2 V(A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) \cdot V(A'_{i_0}, A'_{i_1}, \ldots, A'_{i_k})$$
$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\frac{\rho^2_{i_0i_0}}{2} & -\frac{\rho^2_{i_0i_1}}{2} & \cdots & -\frac{\rho^2_{i_0i_k}}{2} \\ 1 & -\frac{\rho^2_{i_1i_0}}{2} & -\frac{\rho^2_{i_1i_1}}{2} & \cdots & -\frac{\rho^2_{i_1i_k}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\frac{\rho^2_{i_ki_0}}{2} & -\frac{\rho^2_{i_ki_1}}{2} & \cdots & -\frac{\rho^2_{i_ki_k}}{2} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

所以

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m_{i_0}} & \cdots & \sqrt{m_{i_k}} \\ \sqrt{m'_{i_0}} & & & \\ \vdots & & -\frac{\sqrt{m'_i m_j}\rho^2_{ij}}{2} & \\ \sqrt{m'_{i_k}} & & & \end{pmatrix}$$
$$= -(k!)^2\sqrt{m_{i_0}m'_{i_0}m_{i_1}m'_{i_1}\cdots m_{i_k}m'_{i_k}}V_{i_oi_1\cdots i_k}V'_{i_oi_1\cdots i_k}(1 \leq k \leq n). \tag{21}$$

现将特征方程 $F(\lambda)=0$ 展开．由于它只有 n 个非零正根，故展开后为

$$[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(k!)^2 W_k \lambda^{n-k}]\lambda^{N-n+1} = 0, \tag{22}$$

再由于特征方程 $F(\lambda)=0$ 的 n 个非零正根 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足方程

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(k!)^2 W_k \lambda^{n-k} = 0, \tag{23}$$

从而得到 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 的 k 阶初等对称多项式 σ_k 的表达式为

$$\sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (k!)^2\frac{W_k}{W_0}. \tag{24}$$

由 Maclaurin 不等式 [1,3]

$$[\frac{k!(n-k)!}{n!}\sigma_k]^l \geq [\frac{l!(n-l)!}{n!}\sigma_l]^k \quad (l > k) \tag{25}$$

以及 Newton 不等式 [1,3]

$$[\frac{k!(n-k)!}{n!}\sigma_k]^2 \geq [\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!}\sigma_{k-1}]\cdot[\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!}\sigma_{k+1}] \quad (n > k > 0), \tag{26}$$

将 (24) 式代入 (25) 和 (26) 式，整理即得不等式 (12) 和 (13), 其等号成立的充分必要条件是：$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$. 即： $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 的广义惯量椭球为球．从而定理 1.5 证毕. □

容易看出, 如果 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 不是有限质点组而是两个具有有限质量的区域 (当然这两个区域是完全同向的), 设它们的分布函数分布为 $m(x) \geq 0 (x \in \Sigma(A))$ 和 $m'(x') \geq 0 (x' \in \Sigma(A'))$, 则可以定义

$$W_k = \frac{1}{(k!)^2}\int\int\cdots\int\sqrt{m(x_0)m'(x'_0)m(x_1)m'(x'_1)\cdots m(x_k)m'(x'_k)}$$

$$V(x_0,x_1,\ldots,x_k)V(x_0',x_1',\ldots,x_k')\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_0'\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_1'\cdots\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_k' \tag{27}$$
$$W_0=\int\int\sqrt{m(x)m'(x')}\mathrm{d}x\mathrm{d}x'.$$

通过取极限可以证明，定理 1.5 中的 W_k, W_0 理解为上述的积分值时，两个不等式仍然成立.

事实上，当定理 1.5 中两个质点组 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 部分质点带有负质量时，此时不等式 (13) 仍然成立，即有如下的

定理 2.2 设 $\Sigma(A)=\{A_i(m_i), i=0,1,\ldots,N\}$ 和 $\Sigma(A')=\{A_i'(m_i'), i=0,1,\ldots,N\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中具有质点数量相同和质心重合的两个质点组，如果下列条件之一成立：① $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是有向的，并且 A_i, A_i' 分别所赋有的质量 m_i, m_i' 满足 $m_im_i'\geq 0$; ② $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是实相关的，并且 A_i, A_i' 分别所赋有的质量 m_i, m_i' 非负. 则对于它们的上述诸不变量，成立不等式

$$W_k^2\geq(\frac{k+1}{k})\cdot(\frac{n-k+1}{n-k})W_{k-1}W_{k+1}\quad(1\leq k\leq n-1). \tag{28}$$

注意：当 m_i, m_i' 同时为负时， $\sqrt{m_im_i'}$ 应改理解为 $\sqrt{m_i}\sqrt{m_i'}=-\sqrt{|m_im_i'|}$(下同), 并且约定：

$$\sqrt{m_{i_0}m_{i_0}'m_{i_1}m_{i_1}'\cdots m_{i_k}m_{i_k}'}=\sqrt{m_{i_0}m_{i_0}'}\sqrt{m_{i_1}m_{i_1}'}\cdots\sqrt{m_{i_k}m_{i_k}'}.$$

定理 2.2 的证明 基本上沿用定理 1.5 的证明，我们只需要修改一些地方. 在定理 1.5 的证明过程中，①当 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是有向的时，虽然 m_i, m_i' 可正可负，矩阵 P 和 Q 是复矩阵. 由于 $Q=\Lambda P$, 从而 m_i, m_i' 同号，即： $m_im_i'\geq 0$, 容易得到 PP^τ 仍然是实对称矩阵，因此它的特征值必然是实数的. 又 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是完全同向或完全反向的，而 Λ 为实对称正定或实对称负定矩阵，因此 ΛPP^τ 的 n 个非零特征值都是实数. 因为 ΛPP^τ 的非零特征值应与 $P^\tau\Lambda P$ 的一致，从而 $\Xi=Q^\tau P=P^\tau\Lambda^\tau P=P^\tau\Lambda P$ 的 n 个非零特征值也是实数；②当 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(A')$ 是实相关的时， m_i, m_i' 非负，此时 PP^τ 是实对称正定矩阵，又 Λ 为实对称矩阵，因此 ΛPP^τ 的 n 个非零特征值都是实数，因为 ΛPP^τ 的非零特征值应与 $P^\tau\Lambda P$ 的一致，从而 $\Xi=Q^\tau P=P^\tau\Lambda^\tau P=P^\tau\Lambda P$ 的 n 个非零特征值也是实数. 于是特征方程 $F(\lambda)=0$ 的 n 个非零根仅仅是实数而不一定是正数，所以不能用 Maclaurin 不等式而只能用 Newton 不等式，从而得到不等式 (28). 定理 2.2 证毕.

为了方便，我们不妨称不等式 (12),(13) 和 (28) 为广义杨 - 张不等式.

3 一点应用

众所周知，由于杨 - 张不等式有非常广泛的应用价值，因此我们可以预见本文的定理 1.5 和 2.2 也具有广泛的应用价值，限于篇幅，我们不打算举出更多的例子来说明本文所获得的广义杨 - 张不等式的应用，读者可以自行研究探讨. 下面我们仅举一例来说明定理 2.2 的不等式 (28) 的一点应用.

设 a,b,c 和 a',b',c';Δ 和 Δ' 分别为同一平面上的任意两个 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的边长和有向面积，如果下列条件之一成立：① $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是有向的，对于任意的三个实数 μ,υ,τ; ② $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是实相关的，对于任意的三个非负实数 μ,υ,τ, 有不等式

$$(\mu aa'+\upsilon bb'+\tau cc')^2\geq 16(\mu\upsilon+\upsilon\tau+\tau\mu)\Delta\Delta'. \tag{29}$$

证明 我们只证明①，不失一般性，不妨设 $\mu\upsilon\tau > 0$, 考虑从方程组

$$\sqrt{m_1m_1'}\sqrt{m_2m_2'} = \mu, \quad \sqrt{m_2m_2'}\sqrt{m_0m_0'} = \upsilon, \quad \sqrt{m_0m_0'}\sqrt{m_1m_1'} = \tau, \tag{30}$$

否则， $\mu\upsilon\tau < 0$, 考虑从方程组

$$\sqrt{m_1m_1'}\sqrt{m_2m_2'} = -\mu, \quad \sqrt{m_2m_2'}\sqrt{m_0m_0'} = -\upsilon, \quad \sqrt{m_0m_0'}\sqrt{m_1m_1'} = -\tau \tag{31}$$

等，一方面解出三个方程组 (30) 实数 $m_0m_0', m_1m_1', m_2m_2'$ 得到

$$m_0m_0' = \frac{\upsilon\tau}{\mu}, \quad m_1m_1' = \frac{\tau\mu}{\upsilon}, \quad m_2m_2' = \frac{\mu\upsilon}{\tau}; \tag{32}$$

另一方面，在不等式 (28) 中取 $n = 2, k = 1$ 有

$$W_1 \geq 16W_0W_2, \tag{33}$$

将解出三个实数 $m_0m_0', m_1m_1', m_2m_2'$ 代入 (33) 式即得不等式 (29), 不等式 (29) 证毕. □

下面应用不等式 (29) 导出一个涉及三个三角形的有趣的几何不等式. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是同一平面上的任意两个有向的三角形, 另外有一个 $\triangle A''B''C''$ 的三边边长和面积分别为 a'', b'', c'' 和 Δ''. 在不等式 (29) 中，令

$$\mu = b''^2 + c''^2 - a''^2, \quad \upsilon = c''^2 + a''^2 - b''^2, \quad \tau = a''^2 + b''^2 - c''^2, \tag{34}$$

便得到一个涉及三个三角形的有趣的几何不等式

$$aa'(b''^2 + c''^2 - a''^2) + bb'(c''^2 + a''^2 - b''^2) + cc'(a''^2 + b''^2 - c''^2) \geq 16\sqrt{\Delta\Delta'}\Delta''. \tag{35}$$

显然在不等式 (35) 中取 ΔABC 与 $\Delta A'B'C'$ 全等时，即得著名 Pedoe 不等式 [5]

$$a^2(b''^2 + c''^2 - a''^2) + b^2(c''^2 + a''^2 - b''^2) + c^2(a''^2 + b''^2 - c''^2) \geq 16\Delta\Delta''. \tag{36}$$

这说明不等式 (35) 是崭新的、有趣的、涉及三个三角形的几何不等式，由它可以导出包括著名 Pedoe 不等式等一系列几何不等式.

致谢 对于杨路教授多年来的关心、帮助和悉心指导，作者表示衷心的感谢！同时感谢褚小光先生的宝贵意见和建议！

参考文献：

[1] BECHENBACH E F, BELLMAN R. *Inequalities* [M]. Springer-Verlag, 2nd ed, 1980.
[2] BLUMENTHAL L M. *Theory and Applications of Distance Geometry* [M]. New York, 2nd ed, 1970.
[3] HARDY G H, LITTEWOOD J E, POLYA J. *Inequalities* [M]. Cambridge Univ. Press, 2nd ed, 1952.
[4] MITRINOVIC D S. *Recent Advances in Geometric Inequalities* [M]. Peking Univ. Press, 1994.
[5] PEDOE D. *An Inequality for two Triangles* [J]. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1942, **38**: 397–398.
[6] 杨定华. 关于离散 Karamata 不等式及其应用 [J]. 应用数学学报， 2002, **25**(4): 681–685.
YANG Ding-hua. *On the discrete Karamata's inequality and applications* [J]. Acta Math. Appl. Sin., 2002, **25**(4): 681–685. (in Chinese)
[7] 杨路，张景中. 关于有限点集的一类几何不等式 [J]. 数学学报， 1980, **23**(5): 740–749.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *A class of geometric inequalities on finite points* [J]. Acta Math. Sinica, 1980, **23**(5): 740–749. (in Chinese)

[8] 张景中，杨路．关于质点组的一类几何不等式 [J]. 中国科学技术大学学报， 1981, **11**(4): 1–8.
ZHANG Jing-zhong, YANG Lu. *A class of geometric inequalities concerning systems of mass points* [J]. J. China Univ. Sci. Tech., 1981, **11**(2): 1–8. (in Chinese)

[9] 杨路，张景中． Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及其应用 [J]. 数学学报， 1981, **24**(3): 401–408.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *A high-dimensional extension of the Neuberg-Pedoe inequality and its application* [J]. Acta Math. Sinica, 1981, **24**(3): 401–408. (in Chinese)

[10] 杨路，张景中．度量和与 Alexander 对称化 [J]. 数学年刊 (A 辑), 1987, **8**(2): 242–253.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *Metric sum and Alexander symmetrization* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1987, **8**(2): 242–253. (in Chinese)

Generalization of Yang-Zhang's Inequalities and Applications

YANG Ding-hua[1,2]

(1. College of Mathematics and Software Sciences, Sichuan Normal University, Sichuan 610066, China;
2. Chengdu Institute of Computer Applications, Academia Sinica, Sichuan 610041, China)

Abstract: In this paper, making use of Darboux's theorem and the eigenvalue method, the famous Yang-Zhang's inequalities are generalized to two completely directional mass-point system in Euclidean space E^n. A class of geometric inequalities are established, as its applications, some new triangular inequalities are given.

Key words: simplex; volume; Yang-Zhang's inequalities; Darboux theorem; geometric inequality.