误差常数的状态空间描述法

C. F. Chen　R. E. Yates

〔提要〕本文阐述应用状态空间描述和经典理论的对比方法求解有关系统的位置、速度和加速度误差常数。

一、引言

对于一个给定的线性系统

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{1}$$

$$y = C^t x \tag{2}$$

输入输出的传递函数是

$$T(S) = C^t (SI - A)^{-1} b \tag{3}$$

HO和Kalman求出了 T (S) 的罗朗(Laurent)展开式

$$T(S) = C^t (SI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_i}{S^i} \tag{4}$$

此处 $J_i = C^T A^{i-1} b$ (5)

是大家知道的马尔柯夫 (Markov)参数。然后它们组成用H定义的韩柯 (Hankel) 矩阵：

$$H = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & \cdot & \cdot & \cdot & J_q \\ J_2 & J_3 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ J_3 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ J_p & & & & & & \end{pmatrix} \tag{6}$$

求解可实现的答案。

尽管这种结果带有普遍性，然而在实践中对于传递特性来说。它并不是非常有用的。为什么 Ho—Kalman的工作带有普遍性，而并不非常有用呢？本篇论文将通过误差常数的观点解释它。

二、经典的理论观点

对于一个控制系统其

$$T(S) = C_T (SI - A)^{-1} b = \frac{(-1)^l K \prod_{j=1}^{l} (S - Z_j) \prod_{K=1}^{h} (S + Z_K)}{\prod_{i=1}^{n} (S + p_i)} \tag{7}$$

此处 l 和 n 分别是平面右边(RHP)零点和平面左边 (LHP) 零点的数目，n 是极点的数目。鉴于，假定闭环系统是稳定的，所有它的极点必须处于平面左边 (LHP)。所以P_i，，Z_j 和 Z_K都是正实数。然后利用 T (S) 的马克劳林展开式中的递次系数定义稳态误差常数。

$$T(S) = \frac{K_p}{1 + K_p} - \frac{1}{K_v} S - \frac{1}{K_a} S^2 \cdots\cdots \tag{8}$$

并且这些误差常数可以计算如下：

(a)、位置误差常数K_p

$$K_p = \frac{(-1)^l K \prod_{j=1}^{l} (-Z_j) \prod_{K=1}^{h} (Z_K)}{\prod (p_i) - (-1)^l K \prod_{j=1}^{l} (-Z_j) \prod_{K=1}^{h} (Z_K)} \tag{9}$$

接着，如果 $K = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (P_i)}{\prod_{j=1}^{l} (Z_j) \prod_{K=1}^{h} (Z_K)}$ (10)

在方程式 (9) 中，那么$K_p = \infty$和T (o) = 1 这意味着稳态位置误差是零。

(b)、速度误差常数K_v

假若 $K = \infty$，即T (o) = 1，那么

$$\frac{1}{K_v} = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{P_i} + \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{Z_j} - \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{Z_K} \tag{11}$$

(c)、加速度误差常数K_a

假若 T(o) = 1，那么

$$-\frac{2}{K_a} = \frac{1}{K_V^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i^2} - \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{Z_j^2} - \sum_{K=1}^{h}\frac{1}{Z_K^2} \tag{12}$$

可以看出系统的稳态误差常数与在S平面中的极点和零点的位置密切相关。

三、状态空间描述法

不是展成为罗朗（Laurvnt）级数，而是我们把方程式（3）展成为马克劳林(Maclaurin)级数：

$$T(S) = C^T(SI - A)^{-1}b$$

$$= C^T(-A^{-1} - SA^{-2} - S^2A^{-3} - \cdots\cdots)\,b$$

利用矩阵的分配律，我们有

$$T(S) = C^T(-A^{-1})b + C^T(-SA^{-2})b + C^T(-S^2A^{-3})b + \cdots\cdots \tag{13}$$

使方程式（13）和（8）相等，我们得到下述方程式

$$\frac{K_p}{1+K_p} = C^T(-A^{-1})\,b,$$

$$-\frac{1}{K_v} = C^T(-A^{-2})\,b, \tag{14}$$

$$-\frac{1}{K_a} = C^T(-A^{-3})\,b,$$

（14）所表明的方程式是误差常数的状态空间描述法。

我们来考虑下面的说明例题：

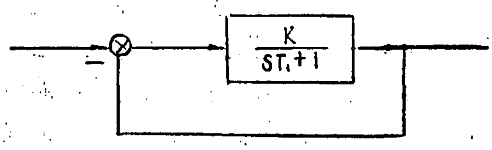

图 1

可以重新把图1写成如图2所示的状态图

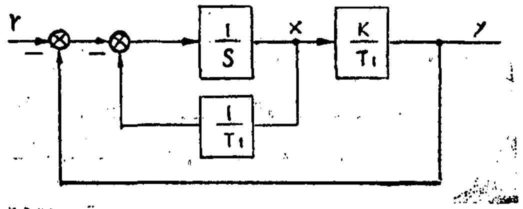

图 2

状态方程的描述方法是：

$$\dot{x} = -\left(\frac{1}{T_1} + \frac{K}{T_1}\right)X + r \tag{15}$$

$$y = \frac{K}{T_1}X \tag{16}$$

我们有 $A = \frac{K+1}{T_1}$，$b = 1$，$C^T = \frac{K}{T_1}$ （17）

把方程式（17）代到（14）中得出

$$\frac{K_p}{1+K_p} = C^T(-A^{-1})\,b$$

$$= \frac{K}{T_1}\left(-\frac{T_1}{-(1+K)}\right)1 = \frac{K}{1+K}$$

所以 $K_p = K$ （18）

相似地我们有

$$\frac{1}{K_v} = C^T(A^{-2})\,B = \frac{SKT_1}{(1+K)^2}$$

所以 $K_V = \frac{(1+K)^2}{SKT_1}$ （19）

并且求得加速度误差常数如下

$$\frac{1}{K^a} = \frac{-T_1^2K}{(1+K)^3}$$

所以 $K_a = -\frac{(1+K)^3}{T_1^2K}$ （20）

结束语

业已求出误差常数的状态空间描述法。在经典观念中的位置。速度和加速度误差常数，无论那一个都可以从状态空间参数A、B和C直接计算出来。这种方法揭示了有关系统性能分析的新见解并且展显出比Ho—Kalman的早期方法有更多的实现方面的物理意义。

王松才、李俊朋译自“1973 SWIEEECO RECORD OF TECHNIBAL PAPERS SESSION I—A：MODERN CONTROL THEORY AND APPLICATIONS” PP 6—7