

# 大系统的分散控制方法综述 (上)

N. R. Sandell P. Varaiya

M. Athans M. G. Safonov

**摘要** 本文综述了分散控制和多级递阶控制以及大系统分析方法方面的控制理论的文献。

## 一 引言

在过去25年中,工程师们已经发明了许许多多分析系统和设计控制策略的方法。这些方法可以分为三种类型:

- 1) 建立动态系统模型的方法(状态空间方法,输入——输出传递函数描述等等);
- 2) 描述系统行为的定性性质的方法(能控性、稳定性、能观测性等等);
- 3) 控制系统行为的方法(反馈镇定、最优控制等等)。

所有这些方法均建立在集中性(Centrality)这个前提之下:所有关于系统的信息以及基于这一信息的计算都是集中化的,即是发生在单一的地方的。我们必须区别两类信息:

- 1) 关于系统模型的信息(可称之为“脱机的”或先验的信息);
- 2) 关于系统响应的,即每次到当时为止对系统所作的所有测量集合的传感器信息。

我们强调指出,从理论的观点,集中性的概念不论对古典伺服系统方法还是近代的估计和控制理论方法都是通用的。不论我们用Nichols图设计一个简单的超前——滞后网络,还是用动态规划设计一个随机调节器,我们都用了预先假定了集中性的理论工具。

在考虑大系统时,集中性的前提已不再成立,这可能由于缺乏集中化的信息,也可能由于缺乏集中化的计算能力。有许多例子表明,大系统给系统分析专家和控制系统设计人员都提出了新的问题。我们列出这些问题的一部分作为典型例子:

- a) 电力网络;
- b) 城区交通网络;
- c) 数字通讯网络;
- d) 可变更的机加工网络;
- e) 生态系统;
- f) 经济系统。

这些物理系统往往具有地域上分离的特征,这就要求考虑通讯联系的经济费用和可

可靠性等因素，从而产生了分散化方案的想法。微处理机的技术进步和不断降低的成本则给予分布式计算以另一个技术推动力。不论在民用的或是军用的指挥和控制系统中，分布式数据库（不论有没有为提高可靠性而采用的重复手段）都提出了新的分散决策问题。

因此，由于经济的或可能还有可靠性的原因，已经形成了一种分散决策，分布式计算以及多级递阶控制的趋势。但是，此种以建立大系统的分布式信息和决策为基本概念的期望目标，不能和古典及现代控制理论中现有的集中化研究方法和步骤相衔接，现有的设计工具也无法直接使用。本文综述了控制理论文献中针对集中性的不足而发展起来的各种技术（至少我们认为如此）。本综述分为三个自然部份。第二节我们介绍旨在简化模型描述的各种技术；第三节讨论检验稳定性的各种手法；而在第四节和第五节分别研究分散控制问题和多级递阶控制问题。

这样的综述总是会受到作者们的知识范围和偏见的局限的。尤其因为大系统理论究竟是由哪些内容组成的还没有明确界限，这个问题就更加突出了。有些应列入的文章可能被忽略，有些则作了不恰当的强调，为此我们将表示歉意。

## 二 模 型 简 化

### A 引 言

在工程实际中通常使用的是比较简单，但不那么精确的数学模型，而不是对该给定的物理过程所能得到的最好的模型。这种实际做法来源于二个完全不同的主张。一种是为了减少模拟、分析和控制系统设计中的计算量；另一种是由于简化的模型实际上总导致比较简单的控制系统的结构。为了说明它们确实是两个不同的主张，我们把降阶的Kalman滤波器设计问题<sup>(1)</sup>作为例子考虑一下。为了确定基于降阶模型设计的Kalman滤波器的误差协方差矩阵，我们需要解一个 $(n+n_r)^2$ 阶的协方差方程，其中 $n$ 为完全阶数模型的状态数， $n_r$ 为降阶模型的状态数。由于最优Kalman滤波器的协方差是由 $n^2$ 阶的协方差方程来确定的，因此如果只是为了减少脱机计算量，那么在Kalman滤波器设计中降阶模型就没有什么意义。当然，基于降阶模型的滤波器具有比较简单的（降阶的）结构，它可使以实时算术运算次数来衡量的联机计算量得到减少，从而我们看到简单的计算和简化的结构是我们期望的两个不同的目标，而它们并不一定是相容的。

计算量的减少和结构的简化在大系统的分散控制中是特别关心的问题，但它们在几乎所有控制理论及其应用的领域中也都是十分关心的问题。

下面介绍的工作可以分为两类。第一类称为集结（Aggregation）方法，它假定给定系统的数学模型可通过采用一个较粗糙的状态空间描述而得到简化。这种描述当然应保存着系统的某些主要的定性性质，第二类称为摄动（Perturbation）方法，也就是忽略掉系统中某些动态相互作用的一些方法。下面可以看出，这两类模型简化方法是互相联系的。我们将简述这两类方法所依据的原理，同时考察它们在大系统分散控制应用上的作用。

### B 集结方法

产生集结概念的直觉观念是十分简单的。假定 $S_i$ 为使用一给定的变量集合对一物理

系统的数学描述； $S_2$ 为使用一较小的变量集合对同一个系统的一种相容的描述。这时 $S_2$ 就称为 $S_1$ 的一个集结的模型，系统 $S_2$ 的变量就称为集结变量。

有趣的是，与“集结”等价的一些概念已经显然是独立地出现于系统理论的至少三个领域之中。在自动机理论里， $S_2$ 和 $S_1$ 的关系称为自动机同态<sup>(3)</sup>，这种说明使上述直观概念变得精确了。在Markov决策过程理论中，称 $S_2$ 是由 $S_1$ 通过合并其状态而得到的<sup>(4)</sup>。此外，“ $S_2$ 是 $S_1$ 的一个集结的模型”这一说法已被Aoki<sup>(1)</sup>引入控制理论的文献中，并在线性系统方面得到了精确化<sup>(注1)</sup>。在“合并”和“集结”的想法间有着特别紧密的联系<sup>(6)</sup>。但我们将只限于线性系统方面。

现在假定未集结的系统 $S_1$ 由状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

来描述，而集结后的系统 $S_2$ 由状态方程

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Cu(t) \quad (2.2)$$

本描述，为了使 $S_2$ 成为 $S_1$ 的一个集结模型，我们要求对所有 $t$ 均有：

$$z(t) = Cx(t) \quad (2.3)$$

这个要求就称为动态精确性。不难看出，当而且仅当满足矩阵方程

$$FC = CA \quad (2.4)$$

$$G = CB \quad (2.5)$$

时，才能达到动态精确性的要求。分析这些条件就可看到，只有当集结状态向量 $z(t)$ 为 $x(t)$ 的一些振型的线性组合时才可能达到动态精确性的要求。这时， $F$ 的特征值就是 $A$ 的一部份特征值，它们对应于 $x(t)$ 的保留于 $z(t)$ 之中的那些模型。这样，对于线性系统集结的概念在事实上就是大家所熟知的通过保留主振型来简化线性系统的想法的一种推广，这就限制了可作为集结矩阵的 $C$ 类矩阵。

如果认识到对线性系统所提出的这种集结问题实际上是最小实现的问题，就等于对可以取得动态准确性的性质有了更进一步的了解。应该看到(2.1)和(2.3)确定了 $u(t)$ 和 $z(t)$ 之间的动态关系，它可由下列传递函数矩阵来描述。

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.6)$$

为了满足动态精确性条件，还需有：

$$H(s) = (sI - F)^{-1}G \quad (2.7)$$

这就是说传递函数矩阵必须既可用(2.1)和(2.3)，也可用(2.2)来加以实现。因此如果 $z(t)$ 的维数低于 $x(t)$ ，那么由(2.1)和(2.3)确定的状态描述不是最小的。但这种情况只是在出现极零相消时才可能发生。这就是说，类集结矩阵限定为一类在 $u(t)$ 和 $z(t)$ 之间的输入—输出关系中能产生一些与极点相消零点的矩阵。这些被零点抵消掉的极点恰恰就是 $A$ 的那些不保留在 $F$ 中的特征值。

到此为止我们强调的集结模型的作用是，它可作为系统 $S_1$ 的状态变量的某些线性组合，对输入向量 $u(t)$ 的响应的一种精确的表示。但是，集结状态变量 $z_i(t)$ 一般并不

(注1)在经济学文献中集结概念的研究已有一较长的历史；Chipman<sup>(5)</sup>给出了一个很好的最近情况的综述。

精确地对应于物理变量。这样，实际上可能更有用的另一种观点是把 $z(t)$ 作为物理变量的一种近似。换句话说，除(2.2)以外我们还希望：

$$z(t) \approx y(t) \triangleq Hx(t) \quad (2.8)$$

其中矩阵 $H$ 挑出 $x(t)$ 分量的某些线性组合，以作为近似的目标。(这相当于对 $y(t)$ 的一个振型近似)。自然，集结矩阵 $C$ 的选择可在很大程度影响式(2.8)的近似的性质。

虽然动态精确性限制了对(2.1)形式的给定系统的可能集结矩阵的类型，但选择矩阵 $C$ 仍然有许多途径。某些作者提出的各种模型简化技术可以看成是具体选择隐含着 $C$ 的集结方法。例如，一种自然方法<sup>(7)</sup>就是要求 $S_1$ 的保存在 $S_2$ 中的一个给定的振型，在 $z(t)$ 中的表示和在 $y(t)$ 中的表示具有同样的比重，或者说振型的形状是保持着的。另一曾由若干作者讨论<sup>(8)(9)</sup>的准则则是，在阶跃输入下 $z(t)$ 应当和 $y(t)$ 具有同样的稳态响应。再有另一方法则是对一类给定输入使差 $z(t) - y(t)$ 的某一量度达到最小<sup>(10-12)</sup>，按照集结模型的特点用途，上述技术的任一个都可能有用。

对某些可能的应用，上述方法的一个困难在于，即使各集结变量都由(2.8)得到了一个物理解释，但在 $F$ 矩阵中仍可能有一些非物理的耦合系数。例如对电力系统动态模型的模型简化的一种研究<sup>(13)</sup>归结为系统的电压调节器和机组的控制器之间的非物理的直接耦合(除了通过传输系统的物理耦合以外)。这表明除了动态精确性条件外，在集结的观念中还应加入一些结构保存的条件。这种想法在一篇自动机理论的文章<sup>(3)</sup>和联机性系统理论<sup>(13)</sup>中都分别出现过。当然，简化模型只能保存较复杂模型的一部份特征，而结构的保存只有在牺牲其他人们希望保存的性质时才可能达到。例如一般说，对于结构上受限制的集结来说，往往不可能保存振型的形状<sup>(13)</sup>。

如本节引言中所说的那样，只有在可由集结模型得到成功的分析和设计时，集结技术对于大系统的分析和设计才是有意义的。我们将区别两种情形。第一种情形是直接考虑集结状态；第二种情形时只有当集结状态近似于某一组物理量时，才予以考虑。

如果是直接考虑集结状态，必可由(2.2)精确地算出，从而可以用较少的计算量来进行仿真(包括协方差仿真)。由于对 $z(t)$ 的最优估值器或观测器的阶数就等于它的维数，我们就可以使用具较简单的降阶结构的状态重构器。同样地也就可得到线性—二次型最优化或其它方法确定的简化反馈控制结构。注意，如果反馈系由 $z(t)$ 引出，那么未保存于集结模型中的振型虽由反馈回路所激发，却不会破坏系统的稳定性，因为他们并不会影响 $z(t)$ 。

如果集结状态只是作为某一组物理变量的一种近似时才作考虑的话，那么想作出明确的断言就要困难得多。虽然可以对集结模型以较少的计算量进行分析，但结果的正确性还要依赖于近似式(2.8)的精确性。而这一近似的正确性又进一步依赖于系统及其输入，以及所用的集结技术。例如，对于高度地集中于集结模型中被略去的某个振型中的初始值扰动，使用集结模型就无法正确予测系统的响应。因此在选择集结模型时就应当考虑到系统期望的输入(扰动或其他)的性状。

如果是用集结模型来确定简化的反馈结构，情况甚至更为复杂。集结模型中未表示的振型可能与反馈回路互相作用而使系统失稳。如果集结模型是由忽略快速运动模式而

得,而且控制结构的反馈回路具有高通频带,或者是在采样控制系统中采样速度过慢时,这就成了需具体解决的问题。

在线性——二次型状态变量反馈最优控制的具体情形下,对集结模型设计的调节器以及将它用于原始系统的效果已做过研究。人们探索的一个办法是由集结的 Riccati 方程的解来推导最优品质的界限<sup>(2)(4)</sup>。另一个由参考文献<sup>(15)</sup>提出的值得注意的想法是:选择集结矩阵的方式是使按集结模型对未集结系统设计的调节器的品质尽可能地好。

从实用的观点看来,不应以纯粹抽象的方式来研究集结问题。对系统的集结方式是和目标有关的。即使大家都用  $m$  阶系统来近似一个  $n$  阶系统 ( $m < n$ ),对用于控制目的或是用于预测和估计目的来说,最好的  $m$  阶集结系统也会是不同的。当考虑既包括估计又包括控制的随机控制问题时,问题就更不明确了。

在我们看来,真正有用的可能是努力发展一种集结理论,它除了主动地运用系统动力学的阶数外,还要考虑:

- a) 必须进行最优化的品质指标,如果有的话;
- b) 所用的执行元件和敏感元件的特性;
- c) 扰动的性质。

这样的理论目前还没有。更糟的是,控制系统的复杂性的概念(它可由反馈回路的数目,算术运算的数目等来衡量)现在必须考虑到大规模集成电子元件的进展,因为它们的内在结构和可靠性会使一些传统的复杂性概念失去意义。

### C 摄动方法。

在处理一个可以用较简单结构的系统来近似的系统时,摄动方法<sup>(注2)</sup>是有用的。在数学上,真实系统和近似系统的响应之差别是用加在近似系统上的一个摄动项来加以模拟的。摄动方法可以看成是一种近似的集结技术。虽然原则上对线性系统或非线性系统都是适用的,但为简单起见我们只限于讨论线性情形。我们把摄动方法进而又分为两类,即弱耦合和强耦合方法,当然这两个术语都还不是标准的。

#### 1) 弱耦合

弱耦合方法的基础是非奇异摄动的概念,这是一种加在微分方程右端的摄动项。一种典型的方法就是研究动态系统:

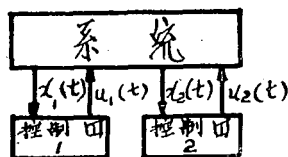
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \epsilon A_{12} \\ \epsilon A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

其中  $\epsilon$  为一正值的小参数。显然,当  $\epsilon = 0$  时,系统解耦为二个完全独立的子系统;就是说,我们对两个子系统都各得到一个近似的集结模型。由于我们现在考虑的是两个独立的低维问题,而当维数增加时计算量一般总是以高于线性的速度增加,所以在仿真、控制系统设计等工作中计算量可得以减少。(当子系统多于两个时,这一效果更为显著。)此外,对解耦后问题的控制系统设计则给出原问题的一个完全分散的控制结

注2 关于应用数学中摄动方法的文献是十分丰富的。但和本文其它节一样,我们将集中注意在控制理论文献中有影响的那些论题。文献16是另外一种方法的讨论。

构, 如图 1 所示。

现有属于弱耦合范围的研究又沿着两种不同的途径进行。一种途径是令 (2.9) 中的  $\epsilon = 0$ , 而在实际系统中当  $\epsilon \neq 0$  时, 估量其近似程度。例如, 我们考虑一个线性二次最优控制问题, 其权矩阵分块是对角化的且与 (2.9) 中的划分互不矛盾。文献 [17] 和 [18] 得到了当在实际系统中采用解耦解法时, 所带来的品质损失限度。这些文章还求出了为保证该近似解能使系统稳定所必须的, 明确的弱耦合条件。当  $\epsilon$  很小时这个条件总是满足的, 但对适当类型的耦合当  $\epsilon$  较大时它仍然可以满足。文献 [19] 和 [20] 对随机的情形得到了类似的结果。



第二种研究途径则致力于在算法上利用弱耦合结构。例如, 仍考虑前述的线性二维最优控制问题。可以证明<sup>(21)</sup>, 问题的 Riccati 方程可以按  $\epsilon$  的幂次来展开, 当在展开中保留  $n$  项时, 就可得到最优损耗的  $2n$  阶的近似。(这一结果还可以推广到随机的情形<sup>(22)</sup>)。第零阶项可由在 (2.9) 中令  $\epsilon = 0$  得到的、解耦的 Riccati 方程来计算, 而高阶项可由解耦的线性方程求解来计算。这种方法的一个缺点是由于其本性是非递推的, 因而难以实现。这一问题可由直接利用弱耦合结构一迭代算法而加以解决, 参看<sup>(23)</sup>和<sup>(24)</sup>。其第二个缺点是, 若在展开式中保存了一阶和高阶项, 那么就存在有由一子系统到另一子系统的反馈, 这样就得不到一个分散的解。我们在关于分散控制的一节中将讨论解决这一问题的办法。

## 2) 强耦合

强耦合方法的基础是奇异摄动的概念, 这是一种加在微分方法左端的摄动。我们考虑下面形式的动态系统。

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) \text{ (慢变系统)} \quad (2.10)$$

$$\epsilon \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) \text{ (快变系统)} \quad (2.11)$$

其中  $\epsilon$  为一正值的小参数而  $A_{22}$  是稳定的矩阵。在 (2.11) 中令  $\epsilon = 0$  可得:

$$x_1(t) = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1(t) \quad (2.12)$$

$$x_2(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1(t) \quad (2.13)$$

注意由于微分方程 (2.11) 已变成代数方程 (2.13), 系统的阶数已经降低。在奇异摄动理论中, 方程 (2.12) 和 (2.13) 的解就称为 (2.10) 和 (2.11) 的零阶近似。奇异摄动理论研究形如 (2.10) 和 (2.11) 的系统的零阶和高阶近似的性质。我们把 (2.11) 用代数关系 (2.13) 来代换称为强耦合近似。

方程 (2.12) 为对 (2.10) 或由 (2.10) 和 (2.11) 描述的系统的一个近似的集结模型<sup>(25)</sup>。可以证明 (参看 [26]、[27] (注 3)), (2.10)、(2.11) 的特征值中的  $n \times 1$  ( $x_1(t)$  的维数) 可用  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  的特征值来近似, 而其余  $n \times 2$  ( $x_2(t)$  的维数) 个特征值可由  $A_{22}/\epsilon$  的特征值来近似。而后面这些快速运动模式在奇异摄动

(注 3) [26] 中用的是弱耦合这一叫法, 但它研究的是用 (2.12)、(2.13) 来近似 (2.10) - (2.11) 的问题。

方法中则被抛弃了。许多研究者已经采用了由 (2.10) 至 (2.11) 所表达的基本想法。我们在这里所讨论的只是与大系统分散控制有关的部分成果。之所以对奇异摄动方法感兴趣,其原因之一当然在于在运用降阶模型可以减少计算量。例如在 [2]、[28]、[29] 中解决了对奇异摄动系统的最优线性二次调节器问题。[29] 阐明了零阶解可以用匹配渐近展开的方法来加以改进。

另一个例子是考虑下列形式的线性系统  $S_{\epsilon\mu}$ :

$$S_{\epsilon\mu} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \epsilon \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \mu \dot{\mathbf{z}}(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{1H} & \mathbf{A}_{1L} \\ \mathbf{A}_{H1} & \mathbf{A}_{HH} & \mathbf{A}_{HL} \\ \mathbf{A}_{L1} & \mathbf{A}_{LH} & \mathbf{A}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

状态  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{y}(t)$  和  $\mathbf{z}(t)$  分别对应于系统  $S_{\epsilon\mu}$  的正常频率、高频和低频部分。我们定义  $S_{\epsilon\mu}$  的中频近似为:

$$S_{0\infty} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{1H} \mathbf{y}(t) \\ 0 = \mathbf{A}_H \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{HH} \mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

高频近似为:

$$S_H: \epsilon \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_{HH} \mathbf{y}(t) \quad (2.16)$$

而低频近似为:

$$S_L \begin{cases} 0 = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{1H} \mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{1L} \mathbf{z}(t) \\ 0 = \mathbf{A}_{H1} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{HH} \mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{HL} \mathbf{z}(t) \\ \mu \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{L1} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{LH} \mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{LL} \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

根据不同的应用考虑,这些近似的每一种对系统分析者都可能是有用的。

在 [30] 中证明了若线性系统  $S_{0\infty}$ 、 $S_H$  和  $S_L$  均为稳定的,那么一定存在使得对任何  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$  和  $\mu \in [\mu_0, \infty]$ , 系统  $S_{\epsilon\mu}$  都是渐近稳定的  $\epsilon_0 > 0$  和  $\mu_0 > 0$  的情况。这一结果使我们可通过一系列降阶模型来检验稳定性。

考虑奇异摄动理论的更重要的原因可能还在于它能得到简化的控制器结构<sup>[31-35]</sup>。为说明这一点,我们将文献 [31] 的分析作为多级滤波的一个结果重新解释一下。该系统形式为:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{A}_{13} \mathbf{x}_3(t) + \xi_1(t) \quad (2.18)$$

$$\epsilon \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(t) + \xi_2(t) \quad (2.19)$$

$$\epsilon \dot{\mathbf{x}}_3(t) = \mathbf{A}_{31} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{33} \mathbf{x}_3(t) + \xi_3(t) \quad (2.20)$$

其量测值为其中,

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{C}_{21} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2(t) + \theta_2(t) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{y}_3(t) = \mathbf{C}_{31} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_3 \mathbf{x}_3(t) + \theta_3(t) \quad (2.22)$$

其中  $\xi_1(t)$ 、 $\xi_2(t)$ 、 $\xi_3(t)$  和  $\theta_2(t)$ 、 $\theta_3(t)$  均为独立的白噪声过程。进而假

定, 矩阵、 $A_{22}$ 、 $A_{33}$ 均稳定, 而且 $A_{22}/\epsilon$ 和  $A_{33}/\epsilon$ 的特征值负实部分远大于 $A_{11}$ 的特征值的幅度。

令 $\epsilon = 0$ 可得低阶近似:

$$\hat{x}_1(t) = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{31})x_1(t) + \xi_1(t) - A_{22}^{-1}\xi_2(t) - A_{33}^{-1}\xi_3(t) \quad (2.23)$$

$$y_2(t) = (C_{21} - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1(t) - A_{22}^{-1}\zeta_2(t) + \theta_2(t) \quad (2.24)$$

$$y_3(t) = (C_{31} - C_3A_{33}^{-1}A_{31})x_1(t) - A_{33}^{-1}\zeta_3(t) + \theta_3(t) \quad (2.25)$$

设 $\hat{x}_1(t)$ 为对应于(2.23)~(2.25)的,  $x_1(t)$ 的滤波器估计值, 这时由于 $x_1(t)$ 相对于 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 来说变化是十分慢的, 可以在设计子系统2和3的滤波器时把(2.19)~(2.22)中的 $x_1(t)$ 看成常数, 而估计值为 $\hat{x}_1$ 。这样, 滤波器就具有形式:

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}\hat{x}_1(t) + \hat{\eta}_2(t) \quad (2.26)$$

$$\epsilon \dot{\hat{\eta}}_2(t) = A_{22}\hat{\eta}_2(t) + K_2 [C_2\hat{\eta}_2(t) + C_{21}\hat{x}_1(t) - y_2(t)] \quad (2.27)$$

$$\dot{\hat{x}}_3(t) = -A_{33}^{-1}A_{31}\hat{x}_1(t) + \hat{\eta}_3(t) \quad (2.28)$$

$$\epsilon \dot{\hat{\eta}}_3(t) = A_{33}\hat{\eta}_3(t) + K_3 [C_3\hat{\eta}_3(t) + C_{31}\hat{x}_1 - y_3(t)] \quad (2.29)$$

这一滤波的结构如图2所示。

注意这是一种多级递阶结构。进而由于子系统1比较子系统2,3具有较慢的动态过程, 其估计值的更新可以远低于子系统2,3的频率来进行(就是说可以使用具较大步长的数值积分算法)。

可以证明<sup>[31]</sup>, 这种直观的滤波器设计具有性质: 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时在均方意义下有

$$\hat{x}_1 \rightarrow \hat{x}_1, \hat{x}_2 \rightarrow \hat{x}_2, \hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_3$$

其中 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ 表示最优的估计。

我们感到这一结果是十分重要的。特别是在一开始时我们并没有作任何关于多级递阶结构的假定, 我们只假定受控系统具有比较自然的双重时间尺度的结构。数学分析指出, 多级递阶滤波器是接近于最优滤波器的, 这里最优性只由均方估计误差来度量。当然, 采用把实现时所需的费用在内的更精细的最优性概念, 同样也可以体现出双重时间尺度滤波器的优越性。

如前所述, 奇异摄动方法很有希望应用在模型简化, 以及得到多级递阶结构的滤波器和控制器方面。但从实用的观点来看, 这种方法的主要问题在于难使物理系统的模型具有其快、慢变量是分离的而且参数 $\epsilon$ 是在方程左边的(2.10)和(2.11)的形式。按照理论所要求的规格建立一个具有快慢模式的物理系统的模型, 这要求更深入的物理洞察而远不是一件简单的事情。对于了解得很差的大系统来说, 这个问题自然更为严重。

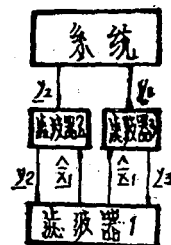


图2 多阶滤波器结构



如何发展出一种系统化的方法，恰当地建立具有快、慢两种动态过程的大系统模型，这在目前尚未得到应有的重视，这方面的情况读者可参看[36]。

据我们所知，还有一个完全没有得到注意的领域就是对离散系统如何建立奇异摄动型的结果。在经济模型中出现许多自然的离散时间系统，而经济系统的特性确实是具有快、慢两种动态过程的，所以也存在有应用奇异摄动技术的可能。

另一个理论上尚未得到注意的有关领域是对由快、慢模式描述的连续时间系统使用采样数据控制的问题。从直观上看，为估计和控制慢变系统，可以采用较低的采样速度，当然这是与快变系统相对而言的。这就自然地导致在许多物理系统中使用多种速度的采样。运用奇异摄动思想从理论方面以及与多级控制的关系方面来阐明这种多速度的采样数据设计是很有好处的。

### 三、互连系统的稳定性

#### A 引言

关于大系统定性性质的文献几乎只限于稳定性研究方面。关于能控性的一些重要的工作将在第四部分予以介绍。与之有关的还有零散的一些讨论互连系统的微分方程表示（及其解的唯一性）的文章，它们从各个组成的小系统的这种表示出发，讨论了整个互连系统的阶数，极小性等问题（参看[37—38]，[39]）。文献[40]讨论了串级连接，而[41]也讨论了反馈连接的情形。

这里我们只介绍关于稳定性的文献，这些研究几乎都是无例外地按下列方式进行：

第一步：假定系统是由一些互相连接的子系统构成。假定这种分解或“撕裂”已经有规定，而且各子系统的描述以及互连性状的描述均已求得。

第二步：假定各子系统孤立地考虑时是稳定的，此外，可以得到这一稳定性的某种定量的测度（例如李亚普诺夫函数衰减速度的下界）。

第三步：由上述定量测定以及关于互连幅度的某种定量测度来规定一些条件，而后证明当满足该条件时互连系统是稳定的。

由第二步我们可知当子系统间没有任何耦合时，各孤立子系统的集合是稳定的。由连接性我们可以期望当耦合作用充分小或充分弱时，互连系统仍将稳定。这样就有两个推论。第一在许多不同结果中，重要的准则总是指出耦合的允许幅值可以有多大。第二虽然在许多重要的互连系统的实际例子中，稳定性恰恰由于强耦合而存在，但具有这种性质的系统通常是不用本文中介绍的技术来进行研究的。

下面进行具体的技术讨论。有两种稳定性分析的途径：李亚普诺夫方法和输入—输出方法（43）。

#### B 李亚普诺夫方法

第一步 整体的系统方程为：

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (3.1)$$

假定它由下列孤立的子系统所组成：

$$\dot{z}_i = f_i(z_i, t) + g_i(v, t) \quad i=1, \dots, K, \quad (3.2)$$

它们由下列约束而互相连接

$$u(t) = x(t) \quad (3.3)$$

这里  $x \in R^n$ ,  $z_i \in R^{n_i}$ , 且在 (3.1) ~ (3.3) 条件之下:

$$x'(t) = (z_1'(t) \cdots z_k'(t)) \quad (3.4)$$

通常假定 (3.2) 中的相互作用项  $g_i$  是可分的 (图 3)。

$$g_i(x, t) = \sum_j g_{ij}(z_j, t) \quad 3.5$$

最后假定“0”是一个平衡状态, 即

$$f_i(0, t) \equiv 0, g_i(0, t) \equiv 0, F(j, t) \equiv 0 \quad (3.6)$$

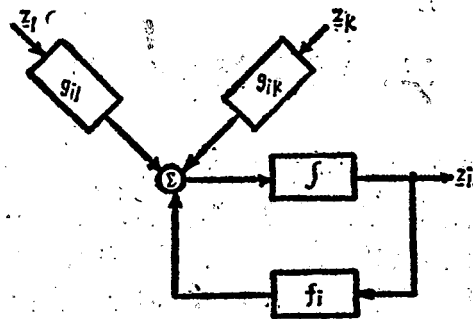


图 3 可分的相互作用项

第二步 设函数  $V_i, d_i$  和  $w_i$ , 沿 (3.2) 的轨线为

$$\dot{V}_i(z_i(t), t) \leq -d_i(z_i(t), t) + w_i(z_i(t), u(t), t), \quad (3.7)$$

其中  $V_i$  为正定, 渐降和径向无界(下称PDU)的(注4)。如果  $V_i$  是连续可微的, 那么令

$$d_i(z_i, t) = -\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}(z_i, t) + \frac{\partial V_i}{\partial z_i}(z_i, t) f_i(z_i, t)\right);$$

$$w_i(z_j, u, t) = \frac{\partial V_i}{\partial z_i}(z_i, t) g_i(u, t), \quad (3.8)$$

就可得到带有等号的 (3.7) 式。

现假定 (3.7) 的右边可以被限制为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(z_i(t), t) &\leq -d_i(z_i(t), t) + w_i(z_i(t), u(t), t) \\ &\leq h_i(\gamma_1(z_1(t), t), \dots, \gamma_k(z_k(t), t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中  $\gamma_i$  也是PDU的。需注意的是为了使这一方法有实用价值, 我们必须能以  $V_i$  来表示  $\gamma_i$ , 能以交叉作用信号的  $w_i$  幅度来表示  $h_i$ 。

第三步现在需对  $h_i, \gamma_i$  加一些条件使当  $t \rightarrow \infty$  时  $V_i(z_i(t), t) \rightarrow 0$ 。这有两种不同的方法: 李亚普诺夫向量方法和加权求和方法。

注4  $V_i$  为PDU的, 当且仅当  $\phi(\|z_i\|) \leq V_i(z_i, t) \leq \psi_2(\|z_i\|)$ , 其中  $\phi_i$  满足  $\phi_i(0) = 0$ ,  $\phi_i$  连续且严格单调上升, 而且  $\phi_i(\infty) = \infty$ 。

文献 [44] 很好地讨论了李亚普诺夫向量方法。例如, [44] 中的结果之一是, 如果  $\gamma_i(\mathbf{z}_i, t) = V_i(\mathbf{z}_i, t)$  以及在  $j \neq i$  的情况下  $h_i(\gamma_1, \dots, \gamma_k, t)$  中  $\gamma_i$  不增加, 或 (3.9) 成立并且原点是  $K$  维系统的渐近平衡点:

$$v_i = h_i(v_1, \dots, v_k, t) \quad i=1, \dots, k \quad (3.10)$$

则整个系统 (3.1) 是渐近稳定的。  $K$  维向量  $\mathbf{V}'(\mathbf{x}, t) = (V_1(\mathbf{z}_1, t), \dots, V_k(\mathbf{z}_k, t))$  就称为李亚普诺夫向量函数。就目前我们所知的所有应用这一结果的例子 [包括原始工作 [45] 和其后的 [46]—[53]] 式 (3.9) 均采取下列不等式的形式:

$$\dot{V}_i(\mathbf{z}_i(t), t) \leq -\sum_j \alpha_{ij} \phi_i(\|\mathbf{z}_j(t)\|) \leq -\sum_j \tilde{\alpha}_{ij} V_j(\mathbf{z}_j, t) \quad (3.11)$$

其中  $\phi_i$  是 PDU 的, 而矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\tilde{\mathbf{A}}$  的对角线元素是正的, 非对角线元素是非正的, 这样,  $\alpha_{ij}$  或  $\tilde{\alpha}_{ij}$ ,  $j \neq i$ , 给出了子系统相互作用幅度的一个界限。加上由于  $\alpha_{ii} > 0$ ,  $\tilde{\alpha}_{ii} > 0$ , 可知在孤立的情形下 ( $\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}_{ij} = 0, i \neq j$ ) 各子系统是稳定的。从 (3.11) 可知这时 (3.10) 具有线性微分方程的特殊形式:

$$\dot{\mathbf{V}} = -\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V} \quad (3.12)$$

大家知道 (3.12) 稳定的必要条件为  $\tilde{\mathbf{A}}$  是一个  $M$ -矩阵 [注 5]。这样只要在  $\tilde{\mathbf{A}}$  矩阵上规定一些条件以保证它是  $M$ -矩阵, 这第三步就算是完全了。例如若  $\tilde{\mathbf{A}}$  为对角线优势的, 即若,  $\tilde{\alpha}_{ii} > \sum_{j \neq i} |\tilde{\alpha}_{ij}|$  那么它就是  $M$ -矩阵。

上述所引的应用李亚普诺夫向量方法的文章中只有当  $\mathbf{A}$  是  $M$ -矩阵时,  $\tilde{\mathbf{A}}$  才是  $M$ -矩阵。而后面我们将看到, (3.1) 的稳定性也可以用加权求和方法来证明。因而从应用的角度看来似乎加数求和的李亚普诺夫函数方法至少不次于李亚普诺夫向量方法。

在加权求和方法中我们应用以下结果来进行。假设对 (3.9) 存在正数  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , 从而对  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  来说,  $-\sum \alpha_i h_i(\gamma_1, \dots, \gamma_k, t)$  是 PDU。令  $V(\mathbf{x}, t) = \sum \alpha_i V_i(\mathbf{z}_i, t)$ , 那么沿着 (3.1) 的轨线  $\dot{V}(\mathbf{x}(t), t) < 0$  (当  $\mathbf{x}(t) \neq 0$ ), 因而 (0.1) 是渐近稳定的。

在下列特殊情形已得到这一方法的独特的应用: 当存在 PDU 函数  $\phi_i$  而且下式成立时:

$$\gamma_i(\mathbf{z}_i, t) = \phi_i(\|\mathbf{z}_i\|) \quad (3.13)$$

为得到 (3.13) 中的  $\phi_i$ , 通常的办法是将各孤立系统的行为 (3.9) 限制为

$$\phi_i(\|\mathbf{z}_i\|) \leq d_i(\mathbf{z}_i(t), t) \quad (3.14)$$

从而我们有

$$\dot{V}_i(\mathbf{z}_i(t), t) \leq -\phi_i(\|\mathbf{z}_i\|) + w_i(\mathbf{z}_i, t) \quad (3.15)$$

这就是在 [54]—[59] 中所用的方法。例如在 [57], [59] 中我们有以下结果 [注 6]。

[注 5] 称对角线元素均正、非对角线元素非正的矩阵  $\mathbf{T}$  为  $M$ -矩阵或 Metzler 矩阵; 它需满足以下等价的条件: i)  $\mathbf{T}^{-1}$  存在且其所有元素非负; ii)  $\mathbf{T}$  的各领头的主子行列式均为正的; iii)  $\mathbf{T}$  的特征值均具正实部。文献 [54] 中有简明的讨论。

设在 (3.10) 中我们有  $h_i(\phi_1, \dots, \phi_k, t) = -\sum \alpha_{ij} \phi_j$ , 其中  $A$  为常值矩阵。如果  $A$  为  $M$ -矩阵, 那么一定存在正值的  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  使  $-\sum \alpha_{ij} h_i$  为 PDU, 从而 (3.1) 渐近稳定。

加数求和方法的另一个适用于二次李亚普诺夫函数情形的应用归结为要求存在正常数  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , 使得:

$$-\sum \alpha_i h_i(\phi_1, \dots, \phi_k, t) = -\phi' B \phi \quad (3.16)$$

其中  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$  而  $B$  是正定的 (59)。

虽然涉及使用加权求和的李亚普诺夫方法的文献十分之多, 文献 (59) 对此作了相当广泛而明了地介绍, 并对由常微分方程, 差分方程, 采样数据系统以及泛函微分方程等描述的系统建立了各种具体办法。从中可以看出, 大部分结果都是保证互连的稳定性的 (51), 就是说即使 (3.5) 中一个或多个  $g_{ij}$  为零时稳定性还能保证 (注 7)。

上述各文章已经使李亚普诺夫稳定性的检验得到了简化。这样检验方法的潜在重要优点在于它们均可分解为两个步骤:

1) 各孤立子系统的行为均由其自己的李亚普诺夫函数来刻画, 而且这种刻画并不需要了解其他子系统模型的情况。

2) 互连系统的稳定性检验 (在“更高的”一级进行) 是通过各个李亚普诺夫函数以及各互连项的界限来进行的。因此它并不需要系统结构的详细知识而只需要 (从某种意义上说的) 集结的知识就可以了 (61)。

然而还是有一些严重的缺点:

1) 只有当各子系统间的耦合很弱时才能进行成功的检验。这以两种方式出现: 第一, 假定各孤立子系统是稳定的而且在整个系统的平衡点处所有的相互作用均不存在 (见 (3.6)); 第二, 对几乎所有检验来说, 互相作用越弱其效果就越好 (注 8)。

2) 整个系统是通过将其分割为子系统来进行分析的。在许多有关的问题中更自然的则是考虑“互相覆盖”的子系统。(至于这种想法如何具体进行可参看 (62)。)

### C 输入—输出方法

第一步 整个系统 (图 4) 假定是由许多互相连接的子系统所组成, 它们的输入和输出存在着以下关系:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= f_i - \sum_{j=1}^k H_{ij} e_j \\ v_i &= -\sum_{j=1}^k B_{ij} f_j + e_i \end{aligned} \right\} i=1, \dots, k \quad (3.17)$$

其中  $u_i, e_i, f_i$  均可为具有向量值的函数。(3.17) 的输入为  $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k)$

(注 6) 应当指出 (57) 的作者们把他们的方法称为李亚普诺夫向量函数而他们实际上应用的是加权求和的李亚普诺夫函数方法。

(注 7) 但由于可以隐含的假定为: 当各孤立系统互相连接时平衡状态保持不变 (见 (3.6)), 已经在相当程度上失去了这一优点。

(注 8) 这实际上已包含在程序之中。从而例如, 在 (3.11) 中相互作用的效果只是用其幅度来加以限制。至于这些相互作用是增稳的还是失稳的, 它并不加以区别。因而这种检验必然是十分保守的。

而输出为  $(e_1, \dots, e_K, f_1, \dots, f_k)$ ;  $H_{ij}$  和  $B_{ij}$  为  $L_{pe} [0, \infty]$  上的非线性、因果性的算子〔注9〕。注意这里输出是隐含地给定为输入的函数。在这种描述下一个恰当的稳定性概念就是有界性的概念。〔注10〕。

第二步 假定每个算子  $H_{ij}$ 、 $B_{ij}$  均有有界的增益  $g[H_{ij}]$ 、 $g[B_{ij}]$ 〔注11〕, 同时我们以  $G(H)$ 、 $G(B)$  表示以这些增益为元素  $K \times K$  的维矩阵。注意  $G(H)$ 、 $G(B)$

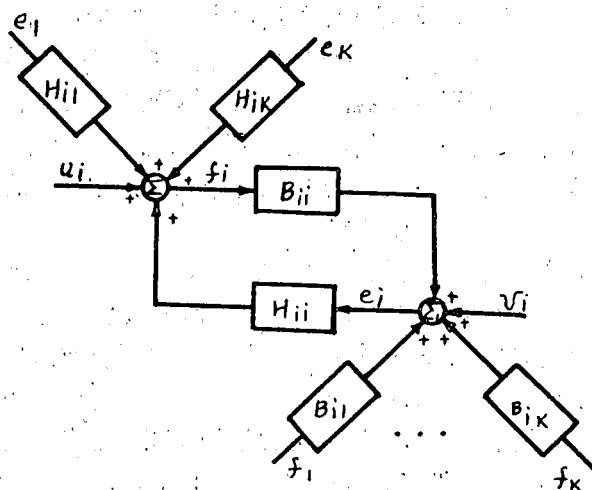


图4 第 i 个子系统的输入输出关系

的非对角线元素就规定了相互作用的幅度的界限〔注12〕。在应用上很重要的情形是, 如果孤立的子系统中  $H_{ij}$ 、 $B_{ij}$  是无记忆的或时定的算子, 那么这些增益可以由非线性系统的Nyquist图来进行计算 (参看〔63〕及〔43〕的第五章)。

第三步 现在需要在  $G(H)$ 、 $G(B)$  上施加一些条件从而使整个系统 (3.17) 具有有界的增益。〔64〕中所证明的这样一个结果是: 若  $I - G(B)G(H)$  为  $M$ -矩阵, 则 (3.17) 具有有限增益。

为了保证有限的增量增益和连续性, 也可以得到类似的条件。〔65〕和〔66〕中给出了

〔注9〕对任一一定义于  $[0, \infty]$  上的函数  $x(t)$  和  $T < \infty$ , 定义  $P_T X$  为函数  $(P_T X)(t) = x(t)$ ,  $t \leq T$  及  $(P_T X)(t) = 0$ ,  $t > T$ 。  $L_{pe} [0, \infty]$  由所有满足

$$\|P_T x\|_P = \int_0^{\infty} |(P_T x)(t)|^p dt < \infty \quad (\text{对任意的 } T < \infty) \text{ 的函数 } x \text{ 所组成。}$$

$L_{pe} [0, \infty]$  上的算子  $F$  称为因果的是指所有  $T$ ,  $P_T F P_T = P_T F$ 。

〔注10〕  $L_{pe} [0, \infty]$  上的算子  $F$  称为有界的, 若对每一  $\gamma_1 < \infty$  均存在  $\gamma_2 < \infty$  使得只要

$$\|x\|_P < \gamma_1 \text{ 就有 } \|F x\|_P < \gamma_2$$

〔注11〕  $F$  的增益定义为:

$$g(F) = \text{Snp} \left\{ \frac{\|P_T F x\|_P}{\|P_T x\|_P} \mid T < \infty, x \in L_{pe} \text{ 且 } \|P_T x\|_P \neq 0 \right\}$$

〔注12〕 再次注意这里由于只考虑幅度而导致保守的偏向。

这一结果的比较简单的表述。与李亚普诺夫方法中一样,由此结果结出的保守的检验保证了联结的稳定性;亦即若  $I - G(B)G(H)$  是  $M$ -矩阵,则  $I - G(B')G(H')$  也是,其中  $g(B'_{ij}) \leq g(B_{ij})$ , 且  $g(H'_{ij}) \leq g(H_{ij})$ 。

对于当  $i \neq j$  时,  $H_{ij} = 0$  的特殊情形,还可作进一步的改进。Lasley 和 Michel<sup>(64)</sup> 对各孤立子系统加以更多的条件而得到 Popov 型的稳定性条件; Araki<sup>(67)</sup> 得到一个圆板稳定准则,这是 [65]—[66] 及 [69]、[70] 中的工作的推广。

上述结果使人回想起 Zames<sup>(63)</sup> 的“回路增益小于 1”的准则。在  $L_{p,e}$  变为  $L_{2,e}$  的特殊情形下,还可以如 Zames 所作的那样利用正性算子的一些性质。这样,例如将  $H = \{H_{ij}\}$  和  $B = \{B_{ij}\}$  看成是  $L_{2,e}$  的算子,由 Zames 关于正性算子的结果我们可以断言:只要  $H$  是正性的、 $-B$  是强正的,  $g(B_{ij})$  是有限的,那么 (3.17) 就具有有限的  $L_{2,e}$  增益。为得到类似结果,还必须由加在各子系统上的条件来保证  $H$  和  $-B$  的正性。[71] 中研究了  $H$  是对角线形的,  $B$  为常增益阵这种特殊情形。

在评价互连系统的李亚普诺夫稳定性的工作时,我们已经注意到稳定性检验方法的保守性质;同样原因,互连系统的输入—输出稳定性检验也是偏于保守的。在比较这两类检验方法时,我们觉得输入—输出稳定性检验在三个方面是比较优越的。第一,输入输出方法常常不那么保守而且比李亚普诺夫方法易于应用, [65] 令人信服地说明了这一点;第二由于各种增益和设计参数间的关系较李亚普诺夫函数更为直接,输入—输出检验可以比较简单地指导设计(参看 [64] 和 [69]);第三,如我们前面看到的,李亚普诺夫方法要受到下列条件的限制:假定平衡位置是已知的,或者要求各孤立子系统的平衡点符合于整个互连系统的平衡点;然而输入—输出结果的增量增益表述形式是不受平衡点变化的影响的。

#### D 其他结果

尽管 Willems<sup>(72)</sup> 曾提出一些重要看法,关于稳定性的两类主要的结果仍然是互不相关的。Safonov 的一些十分近期的工作<sup>(73)</sup> 阐明了李亚普诺夫方法和输入—输出方法之间的关系,但对于互连系统,他的想法尚未完全展开。

Callier, Chan 和 Desoer 基于系统互连的图形给出了一种算法,它将子系统重新编号从而使输入—输出稳定性条件的计算得到简化。[75]、[76] 得到了受有随机扰动的互连系统的李亚普诺夫稳定条件。[47] 和 [59] 给出了局部的李亚普诺夫稳定条件。[77] 和 [78] 给出了轨线的边界。我们曾经指出一个奇异摄动系统可以看成是由一快变系统和慢变系统紧密耦合而成,所以整个系统的稳定性可由蜕化系统和边界层系统这两方面条件来保证。Grujic<sup>(79)</sup> 考虑了若干互连的奇异摄动系统。

最后我们指出, Michel 和 Miller 在他们最新出版的专著<sup>(80)</sup> 中也谈到了本节所讨论的一些论题。(待续)

中国科学院北京自动化研究所 郑应平 译自《IEEE Trans. on Automatic Control》

1978年23卷2期 薛明校