第26卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0764-05 **文献标识码**: **A**

一类连分数的有理逼近

王 莉[1], 于秀源[1,2]
(1. 杭州师范学院数学系, 浙江 杭州 310012; 2. 衢州学院数学系, 浙江 衢州 324000)
(E-mail: liwangchina@hotmail.com)

摘 要: 设 $f(n)$ 是非负函数, $\kappa, b, s_i, t_i (i=1,2,\cdots)$ 是正常数, 研究形如

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots] = [\overline{\kappa n + b}]_{n=0}^{\infty} \text{ 和 } [\overline{s_n, f(n), t_n}]_{n=1}^{\infty}$$

的连分数有理逼近的下界.

关键词: 有理逼近; 连分数; 下界估计.
MSC(2000): 11A55, 11J70, 11J72
中图分类: O156.7

1 引 言

设 $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ 是连分数, p_n/q_n 是它的第 n 个渐近分数, 1995 年, T.Okano 利用 $\tan(1/k)$ (k 是正整数) 的连分数展开式:

$$\tan\frac{1}{k} = [a_0, a_1, a_2, \ldots] = [0, \overline{(2n-1)k}]_{n=1}^{\infty}$$

证明下面的定理.

定理[1] 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $q' = q'(k, \varepsilon)$, 使得对所有整数 $p, q (\geq q')$ 都有

$$|\tan\frac{1}{k} - \frac{p}{q}| > (\frac{1}{2k} - \varepsilon)\frac{\log\log q}{q^2 \log q}.$$

本文对形如

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots] = [\overline{\kappa n + b}]_{n=0}^{\infty} \text{ 和 } [\overline{s_n, f(n), t_n}]_{n=1}^{\infty}$$

的连分数的有理逼近进行研究, 其中 $f(n)$ 是非负函数, $\kappa, b, s_i, t_i (i=1,2,\cdots)$ 是正常数.

2 主要结果

引理[2] 设 α 是一实数, 若有理数 p/q 适合

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}, \tag{1}$$

则 p/q 必为 α 的一个渐近分数.

收稿日期: 2004-10-27
基金项目: 国家自然科学基金 (10271037), 浙江省自然科学基金 (M103060)

设 N 是正整数， $0<\delta<\min\{1,\kappa/e\}$, 记

$$\eta_N=(\kappa+\frac{\kappa+b+2}{N})\frac{\log(N+1+\frac{b+1}{\kappa})+\log\log\frac{\kappa N+\kappa+b+1}{e}}{\log\delta(N+1+\frac{b+1}{\kappa})},$$

$$\delta_n=\frac{(\kappa n+\kappa+b+2)\log\log q_n}{\log q_n},\eta_N^*=\max\{\delta_n|1\le n<N\},\eta>\max\{2,\eta_N,\eta_N^*\}.$$

定理 1 设 $\gamma=[\overline{\kappa n+b}]_{n=0}^{\infty}$, $\kappa,b\in Z_+$, 则对所有整数 p 和 $q(\ge 2)$,

$$|\gamma-\frac{p}{q}|>\frac{\log\log q}{\eta q^2\log q}.$$

证明 若有理数 p/q 不是 γ 的渐近分数，则由引理，

$$|\gamma-\frac{p}{q}|>\frac{1}{2q^2}.$$

若 $p/q=p_n/q_n$ 是 γ 的第 n 个渐近分数，则

$$q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}=f(n+1)q_n+q_{n-1}<(\kappa n+\kappa+b+1)q_n,$$

$$|\gamma-\frac{p_n}{q_n}|>\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}>\frac{1}{(\kappa n+\kappa+b+2)q_n^2}. \tag{2}$$

一方面，由 $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}=f(n)q_{n-1}+q_{n-2}$ 知，

$$q_n\ge f(n)q_{n-1}\ge\cdots\ge\prod_{i=1}^{n}f(i)=\prod_{i=1}^{n}(\kappa i+b),$$

$$\log q_n\ge\sum_{i=1}^{n}\log(\kappa i+b)\ge\int_0^n\log(\kappa x+b)\mathrm{d}x=(n+\frac{b}{\kappa})\log\frac{\kappa n+b}{e}+\frac{b}{\kappa}(1-\log b)$$

$$\ge\begin{cases}(n+\frac{b}{\kappa})\log\frac{\kappa n+b}{e}, & b=1,2\\ (n+\frac{b}{\kappa}-\varepsilon)\log\frac{\kappa n+b}{e}, & 0<\varepsilon<\frac{b}{\kappa},n\ge N_0,b\ge 3\end{cases}, \tag{3}$$

其中 $N_0=[\frac{e^{\frac{b(\log b-1)}{\varepsilon\kappa}+1}-b}{\kappa}]+1$.

另一方面，由 $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}=f(n)q_{n-1}+q_{n-2}$ 知

$$q_n\le(f(n)+1)q_{n-1}\le\cdots\le\prod_{i=1}^{n}(f(i)+1)=\prod_{i=1}^{n}(\kappa i+b+1),$$

$$\log q_n\le\sum_{i=1}^{n}\log(\kappa i+b+1)\le\int_1^{n+1}\log(\kappa x+b+1)\mathrm{d}x\le(n+1+\frac{b+1}{\kappa})\log\frac{\kappa n+\kappa+b+1}{e},$$

$$\log\log q_n\le\log(n+1+\frac{b+1}{\kappa})+\log\log\frac{\kappa n+\kappa+b+1}{e}, \tag{4}$$

因为

$$f_1(x)=\frac{\log\log\frac{\kappa x+\kappa+b+1}{e}}{\log(x+1+\frac{b+1}{\kappa})}\quad(x\ge N_1,N_1\in Z_+), \tag{5}$$

$$f_2(x)=\frac{\log(x+1+\frac{b+1}{\kappa})}{\log\delta(x+1+\frac{b+1}{\kappa})}\quad(0<\delta<\min\{1,\kappa/e\})\tag{6}$$

是严格单调减函数，所以对取定的 δ, 由 $\delta(n+1+\frac{b+1}{\kappa})<\frac{\kappa n+b}{e}$ 知，存在正整数 N_2, 当 $n\geq N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$ 时，由 (3)–(6) 式，得

$$\frac{\log\log q_n}{\log q_n}\leq\frac{1}{\kappa n+\kappa+b+2}(\kappa+\frac{\kappa+b+2}{N})f_2(N)(1+f_1(N))=\frac{1}{\kappa n+\kappa+b+2}\eta_N.\tag{7}$$

另外，对于 $q_n<q_N$,

$$|\gamma-\frac{p_n}{q_n}|>\frac{1}{(\kappa n+\kappa+b+2)q_n^2}=\frac{\log\log q_n}{\delta_n q_n^2\log q_n}\geq\frac{\log\log q_n}{\eta_N^* q_n^2\log q_n}.\tag{8}$$

综合 (1),(2),(7) 和 (8) 式，定理得证.

对于 $\coth(2k)=\frac{e^{2k}+1}{e^{2k}-1}$, 它的连分数展开式 [3] 为：

$$\coth(2k)=[a_0,a_1,a_2,\cdots]=[1/k,3/k,5/k,\cdots],\tag{9}$$

根据定理 1，有下面的推论.

推论 对所有整数 p 和 $q(q\geq 2)$, 都有

$$|\coth 2-\frac{p}{q}|>\frac{\log\log q}{4q^2\log q}.$$

证明 由 (9) 式得， $\coth 2=[1,3,5,\ldots]$. 在定理 1, 令 $\kappa=2,b=1$, 经直接计算得 $N=N_1=26,\eta_N=3.2168696\cdots$.

对于 $1\leq n\leq 25,\delta_1=0.5992\cdots,\delta_2=3.3103\cdots,\delta_3=3.6097\cdots,\delta_4=3.6245\cdots,\delta_5=3.5829\cdots,\delta_6=3.5313\cdots,\delta_7=3.4814\cdots,\delta_8=3.4362\cdots,\delta_9=3.3959\cdots,\delta_{10}=3.3603\cdots,\delta_{11}=3.3286\cdots,\cdots$, 得 $\eta_N^*=\delta_4=3.6245\cdots$, 故 $\eta=4$.

注 通过类似证明，容易得到 $\coth 1,\coth 2/3,\coth 1/2$ 等无理数有理逼近的下界.

设 $c_1\leq s_n\leq c_2,d_1\leq t_n\leq d_2,\vartheta_1 n\leq f_n\leq\vartheta_2 n(n=1,2,\ldots),c_1,c_2,d_1,d_2,\vartheta_1,\vartheta_2$ 是正常数，且 $c_2d_2\vartheta_2>e/2,c_2d_2>1,0<\delta<\min\{1,\frac{c_1d_1\vartheta_1}{e}\}$, M 是正整数，记

$$\tau_M=(\vartheta_2+\frac{\vartheta_2+2}{M-1})\frac{\log M+\log\log\frac{2c_2d_2\vartheta_2M}{e}}{\log\delta M},\theta_m=\frac{(f(m)+2)\log\log q_{3m-3}}{\log q_{3m-3}},$$

$$\tau_M^*=\max\{\theta_m|1\leq m<M\},\tau\geq\max\{c_2+2,d_2+2,\tau_M,\tau_M^*\}.$$

定理 2 设 $\lambda=[\overline{s_n,f(n),t_n}]_{n=1}^{\infty}$, 则对所有整数 p 和 $q(\geq 2)$,

$$|\lambda-\frac{p}{q}|>\frac{\log\log q}{\tau q^2\log q}.$$

证明 若有理数 p/q 不是 λ 的渐近分数，则由引理，

$$|\lambda-\frac{p}{q}|>\frac{1}{2q^2}.$$

若 $p/q=p_n/q_n$ 是 λ 的第 n 个渐近分数，令 $a_{3m-3}=s_m, a_{3m-2}=f(m), a_{3m-1}=t_m(m=1,2,\cdots)$, 则

当 $n=3m-1$ 时， $q_{3m}=a_{3m}q_{3m-1}+q_{3m-2}=s_{m+1}q_{3m-1}+q_{3m-2}<(c_2+1)q_{3m-1}$,

$$|\lambda-\frac{p_{3m-1}}{q_{3m-1}}|>\frac{1}{q_{3m-1}(q_{3m-1}+q_{3m})}>\frac{1}{(c_2+2)q_{3m-1}^2}; \tag{10}$$

当 $n=3m-2$ 时， $q_{3m-1}=a_{3m-1}q_{3m-2}+q_{3m-3}=t_mq_{3m-2}+q_{3m-3}<(d_2+1)q_{3m-2}$,

$$|\lambda-\frac{p_{3m-2}}{q_{3m-2}}|>\frac{1}{q_{3m-2}(q_{3m-2}+q_{3m-1})}>\frac{1}{(d_2+2)q_{3m-2}^2}; \tag{11}$$

当 $n=3m-3$ 时，$q_{3m-2}=a_{3m-2}q_{3m-3}+q_{3m-4}=f(m)q_{3m-3}+q_{3m-4}<(f(m)+1)q_{3m-3}$,

$$|\lambda-\frac{p_{3m-3}}{q_{3m-3}}|>\frac{1}{q_{3m-3}(q_{3m-3}+q_{3m-2})}>\frac{1}{(f(m)+2)q_{3m-3}^2}; \tag{12}$$

一方面，由 $q_{3m-3}\geq(c_1d_1\vartheta_1)^{m-1}(m-1)!$ 得

$$\log q_{3m-3}\geq(m-1)\log(c_1d_1\vartheta_1)+\int_1^{m-1}\log x\mathrm{d}x\geq(m-1)\log\frac{c_1d_1\vartheta_1(m-1)}{e}. \tag{13}$$

另一方面，存在正整数 $M_0>\frac{c_2d_2+2}{\vartheta_2(c_2d_2-1)}+1(c_2d_2>1)$, 使得 $m\geq M_0$ 时,

$$q_{3m-3}\leq(2c_2d_2\vartheta_2)^{m-1}(m-1)!,$$

$$\log q_{3m-3}\leq(m-1)\log(2c_2d_2\vartheta_2)+\int_1^m\log x\mathrm{d}x\leq m\log\frac{2c_2d_2\vartheta_2m}{e}\quad(c_2d_2\vartheta_2>e/2),$$

$$\log\log q_{3m-3}\leq\log m+\log\log\frac{2c_2d_2\vartheta_2m}{e},\quad(c_2d_2\vartheta_2>e/2), \tag{14}$$

令 $g_1(x)=\frac{\log\log\frac{2c_2d_2\vartheta_2x}{e}}{\log x}, g_2(x)=\frac{\log x}{\log\delta x},(0<\delta<\min\{1,\frac{c_1d_1\vartheta_1}{e}\})$, 则存在正整数 M_1, 当 $x\geq M_1$ 时， $g_1(x),g_2(x)$ 是严格单调减函数．取定 δ, 由 $\delta x<\frac{c_1d_1\vartheta_1(x-1)}{e}$, 存在正整数 M_2, 当 $m\geq M=\max\{M_0,M_1,M_2\}$ 时，式 (14) 变成

$$\log\log q_{3m-3}\leq g_2(m)(1+g_1(m))\log\delta m\leq g_2(M)(1+g_1(M))\log\frac{c_1d_1\vartheta_1(m-1)}{e}, \tag{15}$$

再由 (13) 式， (15) 式及 $\vartheta_1n\leq f(n)\leq\vartheta_2n$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{\log\log q_{3m-3}}{\log q_{3m-3}}&\leq\frac{1}{m-1}g_2(M)(1+g_1(M))\leq\frac{1}{f(m)+2}(\vartheta_2+\frac{\vartheta_2+2}{M-1})g_2(M)(1+g_1(M))\\&=\frac{1}{f(m)+2}\tau_M.\end{aligned} \tag{16}$$

另外，对于 $q_n<q_{3m-3}$ $(m<M)$, 有

$$|\lambda-\frac{p_n}{q_n}|>\frac{1}{(f(m)+2)q_n^2}=\frac{\log\log q_n}{\theta_mq_n^2\log q_n}\geq\frac{\log\log q_n}{\tau_M^*q_n^2\log q_n}. \tag{17}$$

综合 (1), (10), (11), (12), (16) 和 (17) 式，定理得证.

参考文献：

[1] OKANO T. *A note on the rational approximation to tan1/k* [J]. Tokyo J. Math., 1995, **18**: 75–80.

[2] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京：科学出版社， 1986.
HUA Luo-geng. *An Introduction to Number Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1986. (in Chinese)

[3] A.J.van der Poorten. *Continued fraction expansions of values of the exponential function and related fun with continued fraction* [EB/OL]. Available at http://www-centre.ics.mq.edu.au/alfpapers/a117.pdf

Rational Approximation to a Class of Continued Fractions

WANG Li[1], *YU Xiu-yuan*[1,2]
(1. Dept. of Math., Hangzhou Teachers College, Zhejiang 310012, China;
2. Dept. of Math., Quzhou College, Zhejiang 324000, China)

Abstract: Let $f(n)$ be a nonnegative function, and κ, b, s_i and $t_i (i=1,2,\cdots)$ positive constants. We discuss the lower bound of rational approximations to two kinds of continued fractions such as

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots] = [\overline{\kappa n + b}]_{n=0}^{\infty} \text{ and } [\overline{s_n, f(n), t_n}]_{n=1}^{\infty}.$$

Key words: rational approximation; continued fraction; evaluation of lower bound.