文章编号: 1000-341X(2006)01-0103-04　　**文献标识码**: A

迭代的斜多项式环的 Baer 和拟 -Baer 性

宋军全
(浙江工业大学应用数学系, 浙江 杭州 310014)
(E-mail: jqsong@zjut.edu.cn)

摘　要: 本文主要讨论了环 R 和迭代的斜多项式环 $T(u)$ 的零化子之间的关系, 从而得出在一定条件下, R 是 Baer 环当且仅当 $T(u)$ 是 Baer 环. 而对于拟 -Baer 性, 只要 R 是拟 Baer 环就行了, 作为推论我们证明了 sl(2) 的包络代数和量子包络代数都是拟 Baer 环.

关键词: 迭代的斜多项式环; (拟)Baer 环; α-rigid.
MSC(2000): 16W60
中图分类: O153

1 引 言

除非特别指出, 本文所讲的环是有单位元的结合环. 由文献 [1], R 是 Baer(Baer $*$-) 环, 如果 R 的任意的非空子集的右零化子 (作为右理想) 由幂等元 (投射) 生成. 此定义是左右对称的. Baer 环的研究有其在泛函分析中的广泛背景 [1], 在文献 [1]Kaplansky 引入 Baer 环用来抽象 Von Neuman 代数和完全 $*$- 正则代数的各种性质. Baer 环包括 Von Neuman 代数 (所有 Hilbert 空间上的有界算子组成的代数), Stonian 空间 T 上的连续复值函数组成的交换 C^*- 代数 $C(T)$, 主右理想是完全格的正则环 (也就是连续或右自内射的正则环), 而且 Sherman-Takeda 定理 [2,3] 证明了任意 C^*- 代数有泛包络 Von Neuman 代数 (因此是 Baer $*$- 环).

在文献 [4] 中, Clark 定义了: 一个环 R 是拟 Baer 环, 如果 R 的任意理想的左零化子 (作为左理想) 由幂等元生成. 此外, 他证明了拟 -Baer 环的定义是左右对称的, 即环 R 是拟 -Baer 环当且仅当 R 的任意右 (左) 理想的右 (左) 零化子 (作为右 (左) 理想) 由幂等元生成的.

一个很自然的问题: 对给定的一类环, 在多项式扩张下是否不变? 文献 [5] 考虑了 Baer 环, Baer$*$- 环, 拟 -Baer 环, 拟 -Baer $*$- 环在多项式扩张下的情况. Armendariz[6] 得到如下的结论: 令 R 是 reduced 环, 那么 $R[x]$ 是 Baer 环当且仅当 R 是 Baer 环 [6, 定理 B]. 所谓 reduced 环就是没有非零幂零元的环. 而且他还给出了一个例子说明条件 reduced 是不可缺少的. 文献 [7] 主要研究了 ore 扩张对 Baer, 拟 -Baer,PP,p.q.-Baer 环的保持性, 而且还研究了斜幂级数环的 Baer 和拟 -Baer 性. 刘仲奎 [8,9] 分别研究了广义幂级数环的 Baer 性和拟 -Baer 性. 本文将研究迭代的斜多项式环的 Baer 性和拟 -Baer 性, 作为推论, 我们得到了 (量子) 包络代数是拟 -Baer 的.

R 是带单位元的结合环, α 是环 R 的自同构, 由文献 [10], $T(u)$ 是迭代的斜多项式环, 它的凭借集合是 $R[x,y]$, 而且满足下列关系式:

$$xy = u, \qquad yx = \alpha(u),$$

收稿日期: 2003-08-20

$$ya=\alpha(a)y, \qquad xa=\alpha^{-1}(a)x.$$

如果 $u=1$, 则 $T(u)$ 就是 $T=R[x,x^{-1},\alpha]$, 这就是斜 Laurent 多项式环. 之所以叫做迭代的斜 Laurent 多项式环, 是因为 $T(u)$ 可以写成 $R[x;\alpha^{-1}][y;\alpha]$. $T(u)$ 的元素形式是:

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0+b_1y+\cdots+b_my^m,$$

其中 n,m 都是非负的整数.

2 主要结果及证明

定义 1[7] 令 α 是环 R 的环同态, 如果满足: 若 $r\alpha(r)=0$, 则 $r=0$, $r\in R$, 那么 α 叫做 rigid 同态; 一个环 R 称为 α-rigid, 如果环 R 存在 rigid 同态 α. 显然, 任意的 rigid 同态是单同态. 而且 α-rigid 环是 reduced 环 (没有非零的幂等元). 当 α 是自同构时, 我们说 R 是 α-rigid 环也就是说 R 是 α^{-1}-rigid 环, 实际上两者是等价的. 这是因为: 若 R 是 α-rigid, 那么 R 是 reduced 环. 如果 $r\alpha^{-1}(r)=0$, $r\in R$ 则 $\alpha(r)r=0$, 所以 $r\alpha(r)=0$, 由 R 是 α-rigid, 那么 $r=0$, 所以 R 是 α^{-1}-rigid. 反之同理可得.

引理 1 令 R 是 α-rigid 环, α 是 R 的自同构, $a,b\in R$, 那么有:

(1) 如果 $ab=0$, 那么 $a\alpha^n(b)=\alpha^n(a)b=0$, 对任意的整数 n;

(2) 如果 $a\alpha^k(b)=0=\alpha^k(a)b$, 对某个整数 k, 那么 $ab=0$;

(3) 若 a 是 R 的中心正则元, 那么 $\alpha^k(a)$ 还是 R 的中心正则元, k 是任意的整数.

证明 (1) 由 [7, 引理 4] 可知, 当 n 是正整数时, 结论成立. 因为 α 是环 R 的自同构而且 R 是 α-rigid 环, 那么 R 是 α^{-1}-rigid, 所以结论对任意的整数 n 都成立.

(2) 由 (1) 和已知条件 $a\alpha^k(b)=0=\alpha^k(a)b$ 可知, $\alpha^k(ab)=\alpha^k(a)\alpha^k(b)=0$, 那么 $ab=0$.

(3) 易证.

引理 2 假设 R 是 α-rigid 环, α 是环 R 的环同态. 令 $p=\sum_{i=n}^m a_ix^i$, $q=\sum_{j=s}^t b_jx^j\in R[x,x^{-1};\alpha]$, n,m,s,t 都是整数, 那么 $pq=0$ 当且仅当 $a_ib_j=0$, 对任意的 $n\le i\le m$, $s\le j\le t$.

证明 若 $pq=0$, 则 $\sum_{k=n+s}^{m+t}\sum_{i+j=k}a_i\alpha^i(b_j)x^{i+j}=0$, 即: $\sum_{i+j=k}a_i\alpha^i(b_j)=0$. 若 $k=n+s$, 则 $a_n\alpha^n(b_s)=0$, 那么由引理 1, $a_nb_s=0$, 现在利用归纳法来证明, 假设当 $i+j<k$ 时, 有 $a_ib_j=0$, 那么, 当 $i+j=k$ 时, $\sum_{i+j=k}a_i\alpha^i(b_j)=0$, 即

$$a_n\alpha^n(b_{k-n})+a_{n+1}\alpha^{n+1}(b_{k-n-1})+\cdots+a_m\alpha^m(b_{k-m})=0 \tag{*}$$

(此时若 $b_j=0$, 当 $j<s$ 或 $j>t$ 时), 以 a_n 右乘以 (*), 则由假设和引理 1 知, $a_n\alpha^n(b_{k-n})a_n=0$, 则 $a_n\alpha^n(b_{k-n})=o$, 所以由引理 1 知 $a_nb_{k-n}=0$, 则 (*) 变为

$$a_{n+1}\alpha^{n+1}(b_{k-n-1})+\cdots+a_m\alpha^m(b_{k-m})=0, \tag{**}$$

(**) 右乘以 a_{n+1}, 同理可得: $a_{n+1}\alpha^{n+1}(b_{k-n-1})=0$, 则 $a_{n+1}b_{k-n-1}=0$, 重复以上的步骤, 可知 $a_ib_j=0$, 当 $i+j=k$ 时, 那么 $a_ib_j=0$, 对任意的 $n\le i\le m$, $s\le j\le t$.

反之, 由引理 1 是显然的.

为了得到关于迭代的斜多项式环类似的命题, 先作如下的说明, 其实把 $T(u)$ 元素中的 x 记为 y^{-1}, y^{-1} 仍继承 x 的运算法则, 即 $y^{-1}y=u$, $yy^{-1}=\alpha(u)$, $y^{-1}a=\alpha^{-1}(a)y^{-1}$, 那么, $T(u)$ 中的元素可以写成 $a_ny^n+a_{n+1}y^{n+1}+\cdots+a_my^m$.

引理 3　假设 R 是 α-rigid 环，α 是 R 的自同构，u 是 R 的中心正则元，$T(u)$ 是迭代的斜多项式环. 令 $p=\sum_{i=n}^{m}a_iy^i,\ q=\sum_{j=s}^{t}b_jy^j\in T(u),\ n,m,s,t$ 都是整数，那么，$pq=0$ 当且仅当 $a_ib_j=0$, 对任意的 $n\le i\le m,\ s\le j\le t$.

证明　完全仿照命题 1 的证明，此处唯一的不同就是 $y^{-1}y=u, yy^{-1}=\alpha(u)$, 但由于 u 是中心正则元，因此还是可以得到相同的结论.

由文献 [7], R 是环，U 是 R 的任一子集，$r_R(U)=\{Ur=0\mid r\in R\}$ 是 R 的子集 U 在 R 中的右零化子，类似地 $l_R(U)=\{rU=0\mid r\in R\}$ 是 U 在 R 中的左零化子. 令 $r\mathrm{Ann}_R(2^R)=\{r_R(U)\mid U\subseteq R\}, l\mathrm{Ann}_R(2^R)=\{l_R(U)\mid U\subseteq R\}$. 如果 V 是 R 的一个子集，那么 $r_{T(u)}(V)=r_R(V)T(u)$. 有了引理 3, 就有 R 和 $T(u)$ 之间零化理想的双射关系.

定理 1　R 是 α-rigid 环，α 是环 R 的自同构，u 是中心正则元，$T(u)$ 是迭代的斜多项式环，那么：

(1)　$\Phi: r\mathrm{Ann}_R(2^R)\longrightarrow r\mathrm{Ann}_{T(u)}(2^{T(u)}),\ \Phi(A)=AT(u)$ 是双射；

(2)　$\Psi: l\mathrm{Ann}_R(2^R)\longrightarrow l\mathrm{Ann}_{T(u)}(2^{T(u)}),\ \Psi(B)=T(u)B$ 是双射.

证明　我们只需证明 (1), (2) 同理可得. 显然 $r_{T(u)}(V)=r_R(V)T(u), V$ 是 R 的任意子集，所以 Φ 是单射，现在只需证明 Φ 是满射. 对任意的 $f\in T(u), C_f$ 是 f 的所有系数的集合，对任意的 $T(u)$ 的子集 $S, C_S=\bigcup_{f\in S}C_f$. 令 S 是 $T(u)$ 的子集，$f\in S$, 由引理 3 可得，$r_{T(u)}(f)=r_{T(u)}(C_f)=r_R(C_f)T(u)$, 因此 $r_{T(u)}(S)=\bigcap_{f\in S}r_{T(u)}(f)=\bigcap_{f\in S}r_R(C_f)=r_R(C_S)T(u)$.

引理 4　R 是 α-rigid 环，α 是 R 的自同构，u 是 R 的中心正则元，$T(u)$ 是迭代的斜多项式环. 若 $e^2=e=a_nx^n+\cdots+a_0+b_1y+\cdots+b_my^m$ 是 $T(u)$ 的幂等元，那么 $e=a_0\in R$.

证明　因为 $e^2=e$, 所以 $e(e-1)=0$, 由引理 3 可知，$a_i^2=0,\ i=1,\cdots,n$, $b_j^2=0,\ j=1,\cdots,m,\ a_0^2=a_0$, 又由于 R 是 reduced 环，所以 $a_i=0,\ i=1,\cdots,n$, $b_j=0,\ j=1,\cdots,m$, 即 $e=a_0\in R$.

这样利用定理 1 和引理 4, 我们就可以得到如下的结论.

定理 2　若 R 是 $\alpha-$rigid 环，α 是 R 的自同构，u 是中心正则元，$T(u)$ 是迭代的斜多项式环，那么 R 是 Baer 环当且尽当 $T(u)$ 是 Baer 环.

对于 $T(u)$ 的拟 -Baer 性质，我们有下面的定理.

定理 3　α 是环 R 的自同构，$T(u)$ 是迭代的斜多项式环，如果 R 是拟 -Baer 环，那么 $T(u)$ 也是.

证明　若 I 是 $T(u)$ 的理想，令 I_0 是 I 中元素的最低项系数 (此时 x 看作 y^{-1}) 的集合和 0 的并集，显然 I_0 是 R 的理想，若 $I=0$, 则 $l_{T(u)}(I)=T(u)1$. 假设 $I\neq 0$, 由于 R 是拟 -Baer 环，则 $l_R(I_0)=Re$, e 是 R 中的幂等元，我们说 $l_{T(u)}(I)=T(u)e$.

首先说明 $T(u)e\subseteq l_{T(u)}(I)$, 令 $p\in I$, 若 $p=0$, 那么 $ep=0$, 若 $p=a_nx^n+\cdots+a_0+b_1y+\cdots+b_my^m\neq 0,\ a_n\neq 0$, 则 $a_n\in I_0$, 所以 $ea_n=0$, 那么 $ep=ea_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0+b_1y+b_my^m\in I$, 如果 $ea_{n-1}\neq 0$, 则 $ea_{n-1}\in I_0$, 但 $0=e(ea_{n-1})=ea_{n-1}$, 矛盾，类似地，$ea_{n-1}=ea_{n-2}=\cdots=ea_0=eb_1=\cdots=eb_m$, 所以 $ep=0$, 因此 $e\in l_{T(u)}(I)$, 所以 $T(u)e\subseteq l_{T(u)}(I)$.

反之说明 $T(u)e\supseteq l_{T(u)}(I)$, 对任意的 $q=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0+b_1y+\cdots+b_my^m\in l_{T(u)}(I)$, $p=c_sx^s+\cdots+c_1x+c_0+d_1y+\cdots+d_ty^t\in I$, n,m,s,t 都是非负整数，$c_s\neq 0,\ c_s\in I_0$, 则 $qp=0$, 那么 $a_n\alpha^n(c_s)=0$, 由于 α 是自同构，所以存在唯一的 $a'_n\in R$, 使得 $a_n=\alpha^n(a'_n)$, 则 $\alpha^n(a'_nc_s)=0$, 所以 $a'_nc_s=0$, 那么 $a'_n\in l_R(I_0)=\mathrm{Re}\subseteq l_{T(u)}(I)$, 所以 $a'_n=a'_ne,\ a'_nc_s=\cdots=a'_nc_0=a'_nd_1=\cdots=a'_nd_t=0$, 然后对 a_{n-1} 重复上述过程可知：$qe=q)$, 因此 $T(u)e\supseteq l_{T(u)}(I)$.

所以 $T(u)e = l_{T(u)}(I)$, $T(u)$ 是拟 -Baer 环.

最后我们说明 $T(u)$ 和量子群的密切关系.

例 1 k 是特征不等于 2 的域, R 是多项式 $k[t]$, α 是 R 的 k- 自同构, $\alpha(t) = t + 2$, $u = -\frac{1}{4}(t-1)^2$, 则 $u - \alpha(u) = t$, $T(u)$ 是由 x, y, t 生成的 $k-$ 代数, 且满足关系式: $yt - ty = 2y$, $tx - xt = 2x$, $xy - yx = t$, 那么如果把 x, y, t 分别写成 X, Y, H, $T(u)$ 就是单李代数 $sl(2, k)$ 的包络代数, 所以我们有:

推论 1 单李代数 $sl(2, k)$ 上的包络代数 $U(sl(2, k))$ 是拟 -Baer 环.

例 2 令 k 是域, $A = k[t, t^{-1}]$, $0 \neq q \in k$, 使得 $q^4 \neq 1$, α 是 A 的 $k-$ 自同构, 使得 $\alpha(t) = q^2 t$, 令 $u = -(q^{-2}t^2 + q^2 t^{-2})/(q^2 - q^{-2})^2$, 则 $u - \alpha(u) = (t^2 - t^{-2}/(q^2 - q^{-2})$, 此时 $T(u)$ 就是量子包络代数 $U_q(sl(2, k))$, 因此有

推论 2 量子包络代数 $U_q(sl(2, k))$ 是拟 -Baer 环.

致谢 本文是作者硕士毕业论文的一部分, 作者衷心感谢导师李方教授的悉心指导. 同时对刘仲奎教授给予的帮助表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] KAPLANSKY I. *Rings of Operators* [C]. Math. Lecture Note Series. Benjamin, New York, 1965.
[2] SHERMAN S. *The second adjoint of a C*-algebra* [J]. Proc. Internat. Congr. Math. Cambridge. 1950, **1**: 470.
[3] TAKEDA Z. *Conjugate spaces of operators algebras* [J]. Proc. Japan Acad., 1954, 30: 90–95.
[4] CLARK W E. *Twisted matrix units semigroup algebras* [J]. Duke Math. J., 1967, **34**: 417–424.
[5] BIRKENMEIER G F, KIM J Y, PARK J K. *Polynomial extensions of Baer and quasi-Baer rings* [J]. Duke Math. J., 1967, **34**: 417–424.
[6] ARMENDARIZ E P. *A note on extension of Baer and PP ring* [J]. J. Austral. Math. Soc., 1974, 18: 470–473.
[7] HONG C Y, KIM N K, KWAK T K. *Ore extensions of Baer and p.p.-rings* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 2000, **151**(3): 215–226.
[8] LIU Zhong-kui. *Baer rings of generalized power series* [J]. Glasg. Math. J., 2002, **44**(3): 463–469
[9] 刘仲奎. 广义幂级数环的拟 -Baer 性 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2002, **23**(5): 579–584.
LIU Zhong-kui. *Quasi-Baer rings of generalized power series* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 2002, **23**(5): 579–584. (in Chinese)
[10] JORDAN D A. *Iterated skew polynomial rings and quantum groups* [J]. J. Algebra, 1993, **156**: 194–218.

Baer and Quasi-Baer Rings of Iterated Skew Polynomial Rings

SONG Jun-quan
(Dept. of Appl. Math., Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: We study the relations between the set of annihilators in R and the set of annihilators in iterated skew polynomial ring $T(u)$, and then we show that R is Baer ring if and only if $T(u)$ is Baer ring under certain conditions. In addition we prove that if R is quasi-Baer ring so is $T(u)$, and as a concequence we show that the (quantum) enveloping algebra of sl(2) is quasi-Baer ring.

Key words: iterated skew ploynomial ring; quasi-Baer ring; α-rigid.