讲　座

模糊数学及其应用(一)

上海铁道学院　楼世博　金晓龙

本讲座共分五讲，第一讲介绍模糊数学的基本概念，第二讲介绍模糊语言和模糊逻辑，第三讲介绍模糊数学在自动控制中的应用，第四讲介绍模糊数学在图象识别中的应用，第五讲介绍模糊数学及其应用的展望。

模糊集合和模糊关系

一　集合及其运算

在数学中，把具有某种属性的东西的全体叫做集合，把集合里的每一个成员叫做这个集合的元素。

通常我们用大写字母来表示集合，用小写字母表示元素，如元素a属于集合A，可以记作

$$a\in A$$

如元素b不属于集合A，则记作

$$b\notin A$$

表示一个集合，可以采用下面的方法：

1．列举法：把集合所包含的元素，逐一写在一个花括弧｛｝里。例如10到20之间的素数11、13、17、19所组成的集合，可以记作

$$\{11,13,17,19\}$$

2．描述法：把集合所包含的一般形式和它所满足的条件写在花括弧｛｝里，中间用短线"｜"分开。例如全体偶数所成的集合，可以记作

$\{2n\mid n\in N\}$、或者$\{2n\mid n$为整数$\}$。

当我们讨论一般的集合时，可以只写出它所包含的一般形式。例如用x来表示的一些元素组成的集合E可用$E=\{x\}$来表示。

如果集合B的每一个元素，也都是集合A的元素。我们就说集合A包含集合B，记作

$$A\supseteq B\quad 或者\quad B\subseteq A$$

读作"A包含B"或者"B包含在A内"。

如果$A\supseteq B$，则称B是A的子集。

如果$A\supseteq B$，而且$B\supseteq A$，那末，这两个集合的元素是完全一致的，这时我们就说集合A与B相等，记作

$$A=B$$

如果B是A的子集（即B⊆A），而且A中至少有一个元素不属于B，那末就称B是A的真子集，记作

$$A \supset B，或者 B \subset A$$

例如所有整数组成的整数集N就是所有有理数组成的有理数集R的真子集，图1是这个关系的示意图。

一个集合的子集，可以用这个集合上的一个特征函数来表示。如集合为$E=\{x\}$，E中某子集A的特征函数用$\mu_A(x)$来表示，则

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & 当 x\in A\\ 0 & 当 x\notin A\end{cases}$$

例如偶数集$A=\{2n\}$为整数集$N=\{n\}$的子集，它的特征函数

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & 当 x=2n 且 x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

若A和B是集合$E=\{x\}$的子集

我们把集合$E-A$称为A的补集，记为$\bar{A}$。$\bar{A}$的特征函数

$$\mu_{\bar{A}}(x)=\begin{cases}0 & 如 x\in A\\ 1 & 如 x\notin A\end{cases}$$

$\bar{A}$的示意图如2所示。

我们把由两个集合A和B的全体元素并起来所组成的集合，叫做A和B的并集，记为$A\cup B$。$A\cup B$的特征函数

$$\mu_{A\cup B}=\begin{cases}1 & 如 x\in A 或 x\in B\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$A\cup B$的示意如图3所示。

我们把由两个集合A和B的公共元素所组成的集合，叫做A和B的交集，记作$A\cap B$。$A\cap B$的特征函数

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1 & 如 x\in A 及 x\in B\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$A\cap B$的示意图如图4所示。

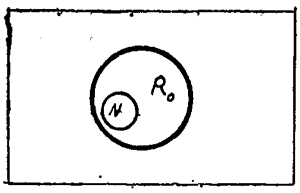

图 1

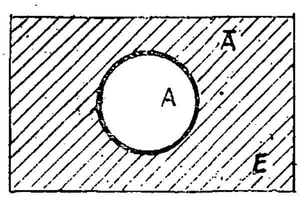

图 2

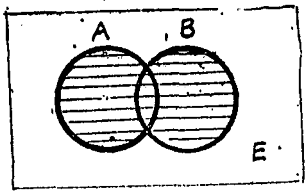

图 3

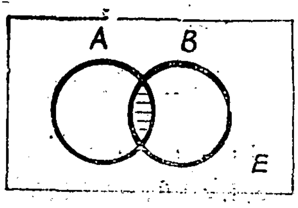

图 4

二 模糊集合

我们如果讨论一个戏院中看戏的人们，其中男人构成一个子集，我们能够判别每一个看戏的人是否是男人。可是看戏人中的青年却是一个模糊的子集，因为对有些在戏院中的人来说，他（她）是否青年不是一个只用“是”抑或“非”来回答的问题。对于每一个戏院中看戏的人，我们可以用一个从属函数$\mu_{青年}$来刻划它从属于青年这个模糊子集的程度。根据“青年”这个词的涵义，例如可以认为25岁的人从属于“青年”的程度为1，即肯定属于青年；30岁的人从属于青年的程度为0.5，即是否属于青年已在两可之间，35岁的人从属于青年的程度为0.2，即很难说是属于青年，50岁的人从属于青年的程度为0，即肯定不属于青年。

这样，我们就得到了模糊子集的概念。

定义：设$E=\{x\}$是一个集合，$\mu_A(x)$是定义在E上在闭区间〔0，1〕中取值的一个函数，则$\mu_A(x)$刻划了E中一个模糊子集A。我们称E为论域，称A为E的模糊子集，称$\mu_A(x)$为A的从属函数。在不易混淆的场合，模糊子集简称为模糊集。

A的台是E中能使$\mu_A(x)>0$的元素集合。

一个模糊独点集是它的台只含一个元素的模糊集合。如A是一个模糊独点集，它的台只含元素x_1，而$\mu(x_1)=\mu_1$，则我们记

$$A=\mu_1/x_1 \tag{1}$$

如A有一个有限的台$\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$，而$\mu(x_i)=\mu_i$，则可改用下式表示

$$A=\mu_1/x_1+\mu_2/x_2+\cdots+\mu_n/x_n=\sum_{i=1}\mu_i/x_i \tag{2}$$

如A的台有无限个元素，则A可表为

$$A=\int_E \mu_A(x)/x \tag{3}$$

在这里式（2）中的“+”和式（3）中的“$\int$”并非表示经典数学中的加法与积分，而是表示模糊集合的并运算。（并的定义见下文（7）式）

设A为$E=\{x\}$中的模糊集，集合

$$A_\alpha=\{x\mid \mu_A(x)\geqslant\alpha\}$$

称为模糊集A的α水平集。

一个模糊集可利用其水平集来分解，在A有有限台时

$$A=\sum_{\alpha}\alpha/A_{\alpha}$$

在A的台有无限点时

$$A=\int_{1}^{0}\alpha/A_{\alpha}$$

如E＝{2，1，4，5，8，9}，E中模糊集

$$A=0.1/2+0.3/1+0.5/7+0.9/6+1/9,$$

则A可分解为

$$\begin{aligned}A=&0.1/2+0.1/1+0.1/7+0.1/6+0.1/9\\&+0.3/1+0.3/7+0.3/6+0.3/9\\&+0.5/7+0.5/6+0.5/9\\&+0.9/6+0.9/9\\&+1/9\\=&0.1(1/2+1/1+1/7+1/6+1/9)+0.3(1/1+1/7+1/6+1/9)\\&+0.5(1/7+1/6+1/9)+0.9(1/6+1/9)+1(1/9)\end{aligned}$$

其中

$$A_{0.1}=\{2,1,7,6.9\},\ A_{0.3}=\{1,7,6,9\},$$

$$A_{0.5}=\{7,6,9\},\ A_{0.7}=\{6,9\},\ A_{1}=\{9\}。$$

设E＝{x}为实轴或实轴的一部分，A为E中的模糊集，如对所有$x\in E$，$\lambda\in$〔0，1〕，有

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\min(\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)),$$

则称A为E中的凸模糊集。

三 模糊集的运算

A和B均为E＝{x}中的模糊集。

A的补集记为$\overline{A}$，

$$\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x),\qquad(4)$$

A与B的交集记为$A\cap B$，

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x).\qquad(5)$$

其中“$\wedge$”表示求最小值运算。

A与B的并集记为$A\cup B$，

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)\qquad(6)$$

其中“$\vee$”号表示求最大值运算。

A与B的差集记为$A-B$，

$$A-B=A\cap\overline{B},\qquad(7)$$

A与B 的析和集记为$A\oplus B$

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A),\qquad(8)$$

A与B的代数积集记为$A\cdot B$，

$$\mu_{A\cdot B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x).\qquad(9)$$

A与B的代数积集记为$A\hat{+}B$，

$$\mu_{A\hat{+}B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x). \quad (10)$$

在同论域中的模糊集间，还可定义别的运算。

例1

$A=0.3/x_1+0.6/x_2+1/x_3+0/x_4+0.5/x_5$，

$B=0.4/x_1+0.8/x_2+0/x_3+0.6/x_4+1/x_5$，

则

$$\overline{A}=0.7/x_1+0.4/x_2+0/x_3+1/x_4+0.5/x_5,$$

$$\overline{B}=0.6/x_1+0.2/x_2+1/x_3+0.4/x_4+0/x_5,$$

$A\cap B=0.3/x_1+0.6/x_2+0/x_3+0/x_4+0.5/x_5$，

$A\cup B=0.4/x_1+0.8/x_2+1/x_3+0.6/x_4+1/x_5$，

$A-B=0.3/x_1+0.2/x_2+1/x_3+0/x_5$，

$A\oplus B=0.4/x_1+0.4/x_2+0/x_3+0.6/x_4+0.5/x_5$，

$A\cdot B=0.12/x_1+0.48/x_2+0/x_3+0/x_4+0.5/x_5$，

$A\hat{+}B=0.58/x_1+0.92/x_2+1/x_3+0.6/x_4+0.5/x_5$，

四　两类模糊集的顺序和距离、模糊度

设A和E均为论域E中的模糊集，如对E中所有的x，均有

$$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x) \quad (11)$$

则称B包含A，记为

$$A\subseteq B$$

若（11）式改为

$$\mu_A(x)<\mu_B(x),$$

则称B严格包含A，记为

$$A\subset B,$$

若我们把$A\subset B$看作A小于B，就给出了一种顺序，但是，并非任意两个模糊集都能比较大小。

A和B均为论域E中的模糊集，如对E中所有的x，均有

$$\mu_A(x)=\mu_B(x),$$

则称A等于B，记为

$$A=B.$$

若A和B均为论域$E=\{x\}$中的模糊集，E中共有n了元，则A和B的线性距离由下式定义：

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|,$$

欧氏距离$R(A,B)$由下式定义：

$$R(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}\text{。}$$

用$\underset{\sim}{A}$表示与模糊A集有最小欧氏距离的普通集合，显然

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)=\begin{cases}0 & \text{如}\mu_A(x_i)<0.5\\ 1 & \text{如}\mu_A(x_i)\geqslant 0.5\end{cases}$$

$\underset{\sim}{A}$也是与A有最小线性距离的普通集合。

A与$\underset{\sim}{A}$的距离称为A的模糊度，我们把

$$L(A)=d(A,\ \underset{\sim}{A})$$

称为线性模糊度，把

$$R(A)=R(A,\ \underset{\sim}{A})$$

称为欧氏模糊度。

A和$\bar{A}$的模糊度相同，但交、并运算并不能保证增加或减少模糊度。但这样定义的模糊度尚有缺陷。

例2　A和B均为$E=\{x_1x_2,\ x_3\}$上的模糊集，

$A=0.2/x_1+0.6/x_2+0.1/x_3$，　　$B=0.6/x_1+0.3/x_2+0.8/x_3$，

则　　$A\cap B=0.2/x_1+0.3/x_2+0.1/x_3$，

且有

$L(A)=0.46$，　　$L(B)=0.60$，　　$L(A\cap B)=0.40$.

例3　A和B均为$E=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$上的模糊集，

$A=0.8/x_1+0.6/x_2+0.8/x_3$，　　$B=0.4/x_1+0.7/x_2+0.2/x_3$，

则

$A\cap B=0.4/x_1+0.6/x_2+0.2/x_3$，

$L(A)=0.46$，　　$L(B)=0.60$，　　$L(A\cap B)=0.40$.

例4　A．B．C均为$E=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$中的模糊集，

$A=0.9/x_1+0.9/x_2+0.9/x_3$，　　$B=0.1/x_1+0.1/x_2+0.1/x_3$

$C=0.3/x_1+0/x_2+0/x_3$，

则有

$L(A)=0.1$，　　$L(B)=0.1$，　　$L(C)=0.1$.

在例2中，$L(A\cap B)$比$L(A)$和$L(B)$均小。在例3中，$L(A\cap B)$比$L(A)$和$L(B)$均大。在例4中，A、B和C的从属函数有相当大的差别，却有相同的糊 模度。

五　模糊关系

$E_1=\{x\}$和$E_2=\{y\}$均为有限集，E_1和E_2的笛卡儿积集中由序对$(x,\ y)$形成的子集，称为$E_1\times E_2$中的关系。可以用矩阵来表示关系的特征函数，关系还可以用图来表示。

例5　设$E_1=\{x\}=\{1,2,3,4,5,6\}$，$E_2=\{y\}=\{1,2,3,4,5,6\}$；$E_1\times$

E_2中的关系 $x>y$ 是下列序对形成的子集：

(6,5)，(6,4)，(6,3)，(6,2)，(6,1)；(5,4)，(5,3)，(5,2)，(5,1)，(4,3)，(4,2)，(4,1)，(3,2)，(3,1)，(2,1)

$E_1\times E_2$中的关系 $x>y$ 可以用有向图表示，如图5所示。

$x>y$ 的特征函数

$$\mu_{x>y}(x,y)=\begin{array}{c}\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

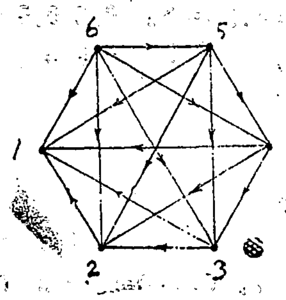

图 5

我们可以将关系和图推广为模糊关系和模糊图。

$E_1=\{x\}$和$E_2=\{y\}$均为有限集，E_1和E_2的笛卡儿积集中，由序对(x,y)形成的模糊子集，称为$E_1\times E_2$中的模糊关系。模糊关系的从属函数可以用矩阵来表示。模糊关系还可以用图来表示。

例6，设$E_1=\{x\}=\{1,2,3,4,5,6\}$，$E_2=\{y\}=\{1,2,3,4,5,6\}$，$E_1\times E_2$中的关系$x\gg y$是笛卡儿积集$E_1\times E_2$中模糊子集，如果我们把x较y多5的序对从属于该模糊子集的程度看作是1，把X较Y多4的序对从属于该模糊子集的程度看做是0.7，把x较y多3的序对从属于该模糊子集的程度看作是0.3，则该模糊子集的从属函数可以用下列矩阵表示：

$$\mu_{x\gg y}(x,y)=\begin{array}{c}\\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0.3&0&0&0&0&0\\0.7&0.3&0&0&0&0\\1&0.7&0.3&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

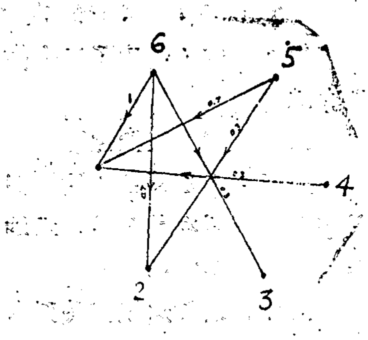

图 6

$x\gg y$还可以用模糊图来表示，如图6所示

诸如“大大大于”、“相关”、“接近”、“类似”，“相像”等均为适当乘积空间的模糊关系。

设模糊关系$R_1\subset X\times Y$、模糊关系$R_2\subset Y\times Z$，我们用$R_1\circ R_2$表示R_1和R_2的最大一最小合成关系，$R_1\circ R_2$的定义由下式给出

$$\mu_{R_1\circ R_2}(x,z)=\bigvee_y[\mu_{R_1}(x\cdot y)\mu_{R_2}(y\cdot z)] \tag{12}$$

其中$x\in X$，$y\in Y$，$z\in Z$。$\wedge$表示求最小值，$\bigvee\limits_{y}$表示对不同的y求最大值。

例7　$R_1\subset X\times Y$，$R_2\subset Y\times Z$，若

$$\mu_{R_1}(x,y)=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.7\\ 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 1\\ 0.8 & 0 & 1 & 0.4 & 0.3\end{pmatrix}\end{array}\quad 和\quad \mu_{R_2}(y,z)=\begin{array}{c} \\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}0.9 & 0 & 0.3 & 0.4\\ 0.2 & 1 & 0.8 & 0\\ 0.8 & 0 & 0.7 & 1\\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0.8\end{pmatrix}\end{array}$$

则

$$\mu_{R_1\circ R_2}(x,z)=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.7\\ 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 1\\ 0.8 & 0 & 1 & 0.4 & 0.3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.9 & 0 & 0.3 & 0.4\\ 0.2 & 1 & 0.8 & 0\\ 0.8 & 0 & 0.7 & 1\\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.4 & 0.7 & 0.3 & 0.7\\ 0.3 & 1 & 0.5 & 0.8\\ 0.8 & 0.3 & 0.7 & 1\end{pmatrix}$$

在这里我们仿照矩阵的乘法进行，只是将各元素的相乘改用求最小值，相加改用求最大值。例如，我们将第一个矩阵的第二行和第二个矩阵的第三列中的对应元素“相乘”（求最小值）再相加（求最大值），即得所求矩阵的第二行第三列的元素。

$(0.3\wedge 0.3)\vee(0.5\wedge 0.8)\vee(0\wedge 0.7)\vee(0.2\wedge 0.3)\vee(1\wedge 0)$

$=0.3\vee 0.5\vee 0\vee 0.2\vee 0=0.5$

例8　图7给出了三个关系合成的例子。

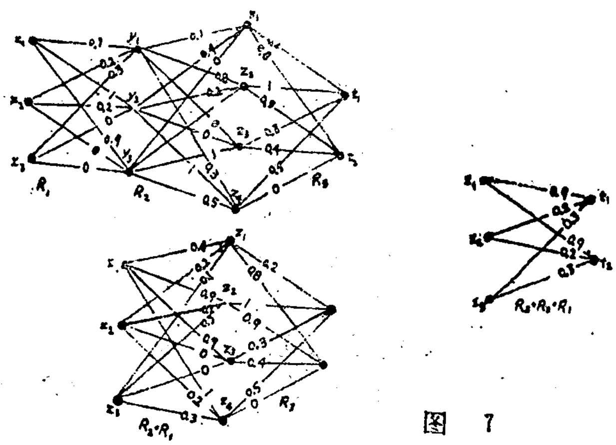

图　7

六　模糊关系的性质

对于一个$E\times E$中的模糊关系R，对所有$x\in E$，若均有

$$\mu_R(x,x)=1$$

成立，则称这模糊关系R具有自反性；若均有

$$\mu_R(x,x)=0$$

成立，则称这模糊关系R具有反自反性。

对于一个$E\times E$中的模糊关系R，对所有$E\times E$中的序偶(x,y)，(y,z)，(z,x)若均有

$$\mu_R(x,z)\geqslant\bigvee_{y}(\mu_R(x,z)\wedge\mu_R(y,z))$$

成立，则称这模糊关系R具有最大一最小传递性；若均有

$$\mu_R(x,z) \geqslant \bigvee_y \{\mu_R(x\cdot z) \vee \mu_R(y,z)\}$$

成立，则称模糊关系R具有最小一最大传递性。

对于一个E×E中的模糊关系R，对所有$(x,y)\in E\times E$，若均有

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$$

成立，则称模糊关系R具有对称性；若$\mu_R(x,y)=0$时，$\mu_R(y,x)=0$，在其它情况均有

$$\mu_R(x,y)\neq\mu_R(y,x)$$

成立，则称模糊关系具有反对称性。

我们把具有自反性、对称性和最大一最小传递性的模糊关系称为类同关系。

我们把具有反自反性、对称性和最小一最大传递性的模糊关系称为反类同关系。

我们把具有自反性和对称性的模糊关系称为类似关系。

我们把具有反自反性和对称性的模糊关系称为反类似关系。

一个E×E中的模糊关系R，如在矩阵$\mu_R(x,y)$中的对角线元素均为1，则R具有自反性；如对角线元素均为0，则R具有反自反性；若对于主对角线对称的元素均相等，则R具有对称性，若对于主对角线对称的元素均不相等(除两者都为0以外)，则R具有反对称性。要判断一个关系是否具有传递律，只需求$\mu_R^2(x,y)$，若用最大一最小乘法，有

$$\mu_R^2(x,y)\leqslant\mu_R(x,y) \tag{13}$$

则R具有最大一最小传递性；若用最小一最大乘法，有（13）式成立，则R具有最小一最大传递性。

例9　如图8所示表示的关系的从属函数为

$$\mu_R=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.9\\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.8\\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7\\ 1 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.9\\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

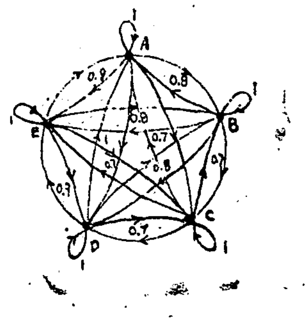

图 8

显然，μ_R具有自反性和对称性，将此矩阵自乘（用最大一最小乘法），得

$$\mu_R^2=\mu_R$$

即μ_R具有最大一最小传递性

故模糊关系R为类同关系。

例10　E＝{A,B,C,D,E}，E×E中的模糊关系R的从属函数为

$$\mu_R=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.1\\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0.2 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.3\\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

（下转10页）