

文章编号: 1002-0446(2001)02-0097-05

# 柔性系统的最小时间鲁棒时滞滤波器设计\*

梁春燕 贾青 谢剑英

(上海交通大学自动化系 上海 200030)

摘要: 本文提出了一种最小时间鲁棒时滞滤波器控制, 来提高柔性系统的时间最优控制的鲁棒性. 这种最小时间鲁棒时滞滤波器控制方法与其扩展系统传统的时间最优控制是一致的, 这种等价性提供了验证最小时间鲁棒时滞滤波器最优性的理论方法, 即所求得解是否满足 Pontryagin 最小值原理. 仿真结果进一步表明了这种最小时间鲁棒时滞滤波器的优越性.

关键词: 时滞滤波器; 时间最优; 鲁棒性

中图分类号: TP24 文献标识码: A

## TIME-MINIMUM ROBUST TIME DELAY FILTER DESIGN OF FLEXIBLE SYSTEM

LIANG Chun-yan JIA Qing XIE Jian-ying

(Dept. of Automation, Shanghai Jiaotong University)

**Abstract** A time-minimum robust time delay filter of flexible system is proposed in this paper to improve the robustness of traditional time-optimal control. It is shown that several time-minimum robust time delay filters are equivalent to traditional non-robust time-optimal controls for augmented systems. This equivalence implies that sufficient conditions from traditional time optimal control provide a method to verify whether numerical solutions of time-minimum robust time delay filter are indeed the optimum. The simulation results demonstrate the key results.

**Keywords:** time delay filter, time-optimal, robust

### 1 引言 (Introduction)

在许多实际系统中, 例如柔性机械手、磁盘读写头及其它位置系统, 经常采用复杂的算法来取得系统响应的快速性<sup>[1, 2]</sup>. 随着空间结构和制造行业从速度、高精度和节约燃油的角度出发, 通常在系统的结构设计中采用比较轻的材料, 但这样将导致系统是一个柔性模态的系统. 柔性系统的控制是一个比较复杂的问题<sup>[3]</sup>, 在目前许多使用开关控制的应用中, 一般采用 Bang-Bang 控制来得到最小的操作时间.

时间最优控制虽然能够提高响应的快速性, 但对模型误差和参数的不确定性比较敏感, 鲁棒性比较差. 在柔性结构系统中采用时间最优控制, 将产生不期望的残留振荡, 操作者不得不等待一段时间, 使振荡消除以后再执行其它任务, 这样无形中浪费了大量的时间. 本文在时滞滤波器设计<sup>[4-6]</sup>的基础上,

探讨了一种最小时间鲁棒时滞滤波器的方法, 对模型误差具有一定的鲁棒性, 而且可以证明该方法与作用在不同系统的传统时间最优控制是一致的, 这种一致性使最小时间时滞滤波器的存在和唯一性得到了保证, 并提供了验证该滤波器最优性的理论方法.

### 2 传统的时间最优控制 (Traditional time-optimal control)

假设一 SISO 柔性系统的自由运动模型方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx(t) + gu(t) \\ y(t) &= hx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $F$  是对角矩阵  $F = \text{blockdiag}[F_0, F_1, \dots, F_m]$ ,  $g = [g_0 \ 0 \ g_1 \ 0 \ \dots \ 0 \ g_m]^T$ ,  $h = [h_0 \ h_1 \ 0 \ \dots \ h_m \ 0]$ .

$F_0, g_0, h_0$  是系统的刚性模态:

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_0 = [0 \ 1]$$

$$h_0 = [1 \ 0]$$

(2)

$F_1, \dots, F_m$  代表系统的  $m$  个柔性模态, 表示为

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_j^2 & -2\xi_j\omega_j \end{bmatrix}$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

$\omega_1 < \dots < \omega_m$  分别为系统柔性模态的频率,  $\xi_i$  是阻尼系数. 系统状态定义为  $x = [x_1, x_2, x_3^1, x_4^1, \dots, x_3^n, x_4^n]^T$ , 其中  $x_1, x_2$  是刚性模态的位置和速度状态,  $x_3^i, x_4^i$  分别是柔性模态的位置和速度.

自由运动的时间最优控制问题是选择控制函数  $u(t)$ , 满足执行器约束条件:

$$|u(t)| \leq U_0 \quad (4)$$

使系统能够从初始位置移动到最终位置:

$$\begin{aligned} x(0) &= [-L \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T \\ x(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$t_f$  是期望的最小运动时间.

由于系统是线性、边界稳定和可控的, 所以最优解是存在并且是唯一的. 时间最优控制是具有有限个切换时间的 Bang-Bang 控制, Pontryagin 最小值原理<sup>[7]</sup>给出了最优控制的充分和必要条件:

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(t) &= -F^T p^*(t) \quad t \in [0 \ t_f] \\ \dot{u}^*(t) &= -U_0 \operatorname{sgn}(g^T p^*(t)), \quad t \in [0 \ t_f] \\ H(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $H$  是哈密顿函数,  $p(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_{2m+2}(t)]^T$ .

在 Bang-Bang 控制下, 满足边界条件(5)式, 当且仅当下列各约束条件成立:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} t_i + (-1)^k t_f &= 0 \\ & \text{(末速度为零)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^k (-1)^i (t_i)^2 + (-1)^{k+1} t_f^2 &= \frac{2L}{\alpha U_0} \\ & \text{(期望的位置量)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{i=1}^k (-1)^i e^{\xi_j \omega_j t_i} \cos(\omega_j t_i) + \\ (-1)^{k+1} e^{\xi_j \omega_j t_f} \cos(\omega_j t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^k (-1)^i e^{\xi_j \omega_j t_i} \sin(\omega_j t_i) + \\ (-1)^{k+1} e^{\xi_j \omega_j t_f} \sin(\omega_j t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(柔性模态的振荡为零)

其中  $\omega_{hj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , 是阻尼自然频率,  $k$  是切换次数,  $t_f$  是运行时间,  $\alpha = \operatorname{sgn}(L)$  是控制量  $u(0)$  的初始符号.

约束条件(7)~(10)是系统自由运动中实现 Bang-Bang 控制的必要条件. 满足上面条件的  $k, t_f$  和  $t_i (i = 1, \dots, k)$  存在若干解, 但时间最优的唯一解必须满足条件(6)式.

### 3 鲁棒最小时间时滞滤波器 (Robust time-minimum time delay filter)

#### 3.1 ZVD 型鲁棒最小时间时滞滤波器

传统的时间最优控制的主要缺点是对模型误差非常敏感, 如果柔性系统的频率发生变化, 系统响应就会产生很大的振荡. 下面我们介绍一种 ZVD 型最小时间鲁棒时滞滤波器来提高时间最优控制的鲁棒性.

对于自由运动的系统, 假设期望位移为  $L$ , 对输出的位移和速度信号  $y(t), \dot{y}(t)$  的约束分别为

$$\begin{aligned} y(t_n) - y(0) &= L \\ \dot{y}(t_n) - \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

为了消除系统到达期望位置时所产生的残留振荡, 一般要求残留振荡在运动结束时小于或等于一个特定值  $V_{exp}$ , 即

$$\begin{aligned} V(\omega_j) = e^{-\xi_j \alpha \omega_j t_n} \left[ \left( \sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \cos(\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} t_i) \right)^2 \right. \\ \left. + \left( \sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \sin(\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} t_i) \right)^2 \right]^{1/2} \leq V_{exp} \\ j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $A_i$  和  $t_i$  是脉冲序列的幅值和对应的时滞,  $n$  是所包含的脉冲个数,  $t_n$  是运行时间, 时间初值  $t_1 = 0$ .

到达期望位置以后, 系统残留振荡(12)式  $V = 0$ , 则正弦和余弦之和分别为零, 即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \cos(\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} t_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \sin(\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} t_i) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

同时使系统残留振荡  $V$  对频率的微分等于零:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\omega_j} [V(\omega_j)] \\ j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (14)$$

若保证(14)式成立, 当且仅当下式成立:

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \cos(\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} t_i) = 0 \\ j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \sin(\omega_j t_i) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (15)$$

假设输入为单位阶跃, 考虑执行器的幅值约束条件, 则所有时间片段上的脉冲序列的幅值之和小于或等于  $U_0$ , 即满足:

$$\left| \sum_{l=0}^p A_l \right| \leq U_0, \quad p = 0, 1, \dots, n \quad (16)$$

这样, 根据(11)、(13)、(15)和(16)式, 就得到了最小时间零振荡和零导数(ZVD)时滞滤波器, 简称为 TO-ZVD 时滞滤波器. 求解非线性方程组是比较复杂的, 通常我们可以利用 Matlab 最优化工具箱, 令  $t_n$  最小, 即  $\min(t_n)$ , 通过最优化方法来求得时滞滤波器的脉冲序列. 可以证明, 得到的原系统(1)、(2)、(3)式所描述的系统)的最小时间鲁棒时滞滤波器的约束方程(11)、(13)、(15)与在原系统的极点位置含有两个极点所组成的扩展系统的时间最优控制的必要条件是等价的, 即原系统的 TO-ZVD 设计问题, 等价于增加了与原系统相同频率的  $m$  个柔性模式的扩展系统的时间最优控制问题, 扩展的系统包含  $2m$  个模式. 也可以这样理解, TO-ZVD 时滞滤波器在系统的极点处配置了两个零点, 而传统的时间最优控制在系统极点处只配置了一个零点, 所以, 如果原系统添加一个与 ZVD 滤波器附加的零点相同的极点, 则扩展后系统的时间最优控制解与原系统的 TO-ZVD 时滞滤波器的解是等价的.

建立原系统在柔性极点处包含双重极点的系统方程  $F = \text{blockdiag}[F_0, F_1, \dots, F_m]$ ,  $g = [g_0 \ 0 \ g_{1a} \ 0 \ g_{1b} \ \dots \ 0 \ g_{ma} \ g_{mb}]^T$ ,  $h = [h_0 \ h_{1a} \ 0 \ h_{1b} \ \dots \ h_{ma} \ h_{mb} \ 0]$ ,  $F_0, g_0, g_0$  仍如前面(2)式所示, 矩阵  $F$  中包含了  $2m$  个柔性模式,  $F_j$  的表达式为

$$F_j = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_j^2 & -2\xi_j \omega_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_j^2 & -2\xi_j \omega_j \end{vmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

对于非零值  $g_{1a}, g_{1b}$ , 扩展系统是可控的, 因而时间最优控制是存在的、唯一的、具有有限个切换次数的 Bang-Bang 控制. 扩展系统的状态, 仍然是刚性模式的位置和速度状态,  $x_{1a}^i, x_{1a}^{\dot{i}}, x_{1b}^i, x_{1b}^{\dot{i}}$  分别是每一对相同柔性模式的位置和速度状态.

在 Bang-Bang 控制下, 扩展系统(1)、(2)和(17)式)所描述的系统)满足边界条件(5)式, 则式(7~10)和下式成立:

$$2 \sum_{i=1}^k (-1)^i t_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \cos(\omega_j t_i) + (-1)^{k+1} t_f e^{\xi_j \omega_j t_f} \cos(\omega_j t_f) = 0 \quad (18)$$

$$2 \sum_{i=1}^k (-1)^i t_i e^{\xi_j \omega_j t_i} \sin(\omega_j t_i) + (-1)^{k+1} t_f e^{\xi_j \omega_j t_f} \sin(\omega_j t_f) = 0 \quad (19)$$

可以看出, 对含有两重柔性极点的扩展系统, 其传统的时间最优控制的边界条件(7~10)式及(18)、(19)式, 与原系统的 TO-ZVD 时滞滤波器的约束方程是等价的. 这样求得的解有很多, 但只有满足充分条件(5)式(与扩展系统相对应)的解才是唯一的最优解.

TO-ZVD 时滞滤波器设计与扩展系统的传统时间最优控制问题的一致性, 使我们可以利用 Pontryagin 最小值原理来验证 TO-ZVD 时滞滤波器的解是否是时间最优的, 而且可以利用求解传统的时间最优控制的方法来求解 TO-ZVD 问题.

如果令系统残留振荡  $v$  对频率的多次微分等于零, 我们还可以得到 TO-ZVDD、TO-ZVDDD 等一系列的时滞滤波器, 它们分别与在原系统极点位置含有三重极点、四重极点的扩展系统的传统的时间最优控制是一致的.

### 3.2 EI 型鲁棒最小时间时滞滤波器

另外一种提高系统鲁棒性的方法是最小时间极不灵敏时滞滤波器(TO-EI). 残留振荡  $v$  在模型频率  $\omega_j$  处等于一个比较小的非零值  $V_{\text{exp}}$ , 在比模型频率稍微高的频率  $\omega_{ij}$  和较低频率  $\omega_{oj}$  处, 残留振荡等于零, 残留振荡对模型频率  $\omega_j$  的微分等于零. 即

$$V_{\text{exp}} = V(\omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

$$0 = V(\omega_{oj}), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

$$0 = V(\omega_{ij}), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (22)$$

$$0 = \frac{d}{d\omega_j} [V(\omega_j)] \quad j = 1, \dots, m \quad (23)$$

其中  $\omega_{oj} < \omega_j < \omega_{ij}$ .

(21)、(22)式为零, 则所有的正弦之和与所有的余弦之和也必须分别为 0, 即

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_{oj} t_i} \cos(\omega_{oj} t_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_{ij} t_i} \sin(\omega_{ij} t_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_{ij} t_i} \cos(\omega_{ij} t_i) = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\xi_j \omega_{ij} t_i} \sin(\omega_{0j} - \xi_j^2 t_i) = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (27)$$

求解约束条件(11)、(15)、(16)、(20)式和(24)~(27), 就可以得到 TO-EI 时滞滤波器. TO-EI 滤波器相当于在系统模型频率附近的两个位置  $\omega_{0j}$  和  $\omega_{0j}$  处分别配置时滞滤波器的零点, 通过在每个零点的位置分别扩大其鲁棒性, 来提高整个时滞滤波器的鲁棒性. TO-EI 与 TO-ZVD 相比, 时间长度基本相同, 但鲁棒性却增加了很多. 仍然可以证明, 原系统的 TO-EI 时滞滤波器与在系统极点附近  $\omega_{0j}$ ,  $\omega_{ij}$  处含有极点的扩展系统的传统的时间最优控制是一致的. 扩展系统中含有  $2m$  个柔性模态的对角阵  $F_j$  为

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_{0j}^2 & -2\xi_j \omega_{0j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_{ij}^2 & -2\xi_j \omega_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0.7124 & 1.6563 & 2.933 & 4.2097 & 5.1536 & 5.8666 \end{bmatrix}$$

具体过程同前, 在此不再赘述.

最小时间时滞滤波器的灵敏度曲线如图 1 所示, TO-ZVD 和 TO-EI 滤波器的鲁棒性比传统的时间最优控制提高了很多. 当然, 鲁棒性的提高是付出一定的代价的, 鲁棒最小时间时滞滤波器的控制命令比传统的时间最优控制命令要长.

#### 4 仿真实例 (Simulation results)

如图 2 所示的弹簧-质量系统, 含有一个柔性模态和一个刚性模态. 控制信号作用在  $m_1$  上, 并限制在  $-1 \leq u(t) \leq 1$ . 假设该模型的参数为  $m_1 = m_2 = k = 1$ , 质量处于自由运动状态, 最终的期望位置是 1. 这是一个无阻尼系统, 频率为  $\omega = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2} = \sqrt{2}$ . 利用 Matlab 最化工具箱, 得到满足约束条件的 TO-ZVD 时滞滤波器的结构为

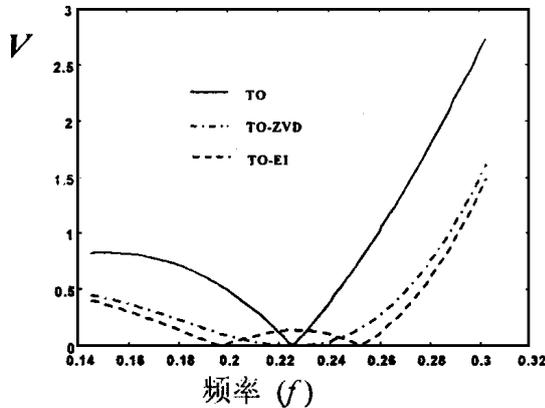


图 1 灵敏度曲线

Fig. 1 Sensitivity curve

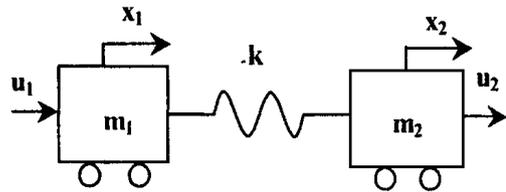


图 2 弹簧-质量系统

Fig. 2 Spring-mass system

对系统考虑下面几种情况:

- 1) 单柔性模态  $\omega = \sqrt{2}$ , 阻尼  $\xi = 0$ .
- 2) 单柔性模态  $\omega = 1.1 \sqrt{2}$ , 阻尼  $\xi = 0$ , 系统存在 10% 的模型误差.
- 3) 两重柔性模态  $\omega = \sqrt{2}$ , 阻尼  $\xi = 0$ .
- 4) 两重柔性模态  $\omega = 1.1 \sqrt{2}$ , 阻尼  $\xi = 0$ , 系统存在 10% 的模型误差.

情况 1 和 2 的仿真结果如图 3 所示. 可以看出,

在单柔性模态, TO-ZVD 对参数的变化具有一定的鲁棒性.

对情况(3)、(4)的仿真结果见图 4. 当系统具有两重柔性极点时, TO-ZVD 时滞滤波器表现出来的是传统时间最优控制的特性, 对模型误差的鲁棒性比较差. 这进一步说明了原系统的最小时间 TO-ZVD 滤波器的解与扩展后系统的时间最优控制的解是相同的.

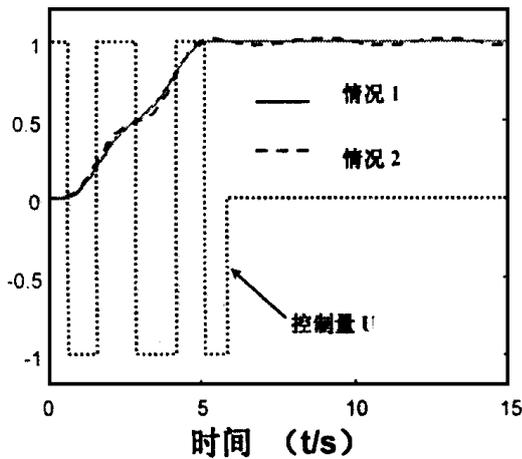


图 3 系统响应

Fig. 3 System response

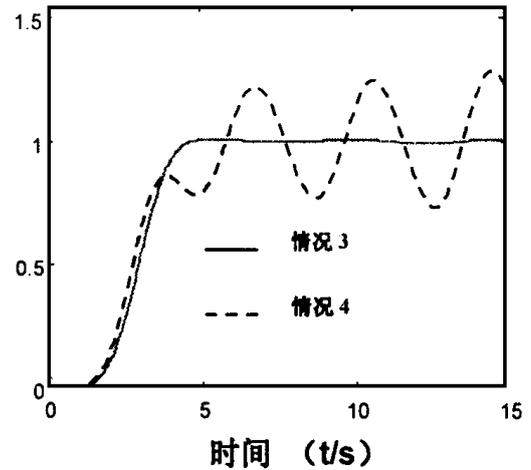


图 4 系统响应

Fig. 4 System response

## 5 结论(Conclusion)

本文对柔性系统自由运动的时间最优控制进行了探讨,提出了一种最小时间鲁棒时滞滤波器的方法,以改善传统的时间最优控制对模型误差的鲁棒性.最小时间鲁棒时滞滤波器控制方法与扩展系统的传统时间控制是一致的,所求得解必须满足 Pontryagin 最小值原理.这种等价性给我们提供了验证最小时间鲁棒时滞滤波器最优性的理论方法,并且可以利用设计传统的时间最优控制的方法来求解最小时间鲁棒时滞滤波器.最后的仿真结果验证了本文的主要结论.

### 参考文献 (References)

- 1 Barbieri E, Ozguner U. A New Minimum-time Control Law for a One-mode Model of a Flexible Slewing Structure. IEEE Trans Automat. Control, 1993, 38: 142- 146
- 2 Ananthanarayanan K S. Third-order Theory and Bang-bang Con-

trol of Voice Coil Actuators. IEEE Trans Magnetics, 1982, 18: 888- 892

- 3 Book W J. Controlled Motion in an Elastic World. ASME J. Dyn. Systems, Meas. Control, 1993, 115: 252- 261
- 4 梁春燕,钟庆昌,谢剑英.时滞滤波器抑制系统残留振荡——原理,方法及应用.控制与决策,1999,录用
- 5 梁春燕,谢剑英.柔性系统抑制残留振荡的一种新方法.机器人,1999,已录用
- 6 钟庆昌.时滞控制及其应用研究.上海交通大学博士论文.1999, 11
- 7 符曦.系统最优化及控制.机械工业出版社:北京.1995

### 作者简介:

梁春燕(1974-),女,博士生.研究领域:计算机过程控制,运动控制,时滞控制等.

贾青(1965-),男,博士,副教授.研究领域:复杂工业过程建模,控制与优化,网络工程与信息系统集成.

谢剑英(1940-),教授,博士生导师.研究领域:复杂工业过程建模,控制与优化,网络工程与信息系统集成.