第26卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.1
2006年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)01-0139-10 **文献标识码**: A

加权 Herz 型 Hardy 空间的分子刻画

赵 凯， 周淑娟， 马丽敏
(青岛大学数学系，山东 青岛 266071)
(E-mail: zkzc@yahoo.com.cn)

摘 要: 首先定义了加权 Herz 型 Hardy 空间上的分子并证明了其分子刻画. 作为应用，给出了强奇异积分算子 T_b 在加权 Herz 和 Hardy 空间上有界性的证明.

关键词: 权；分子刻画；加权 Herz 型 Hardy 空间；强奇异积分算子.
MSC(2000): 42B25, 42B20
中图分类: O174.1

1 引 言

加权 Herz 型 Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 及 $HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的有关性质已被大量研究 [1,2]. 它们的加权原子刻画已在 [1] 中给出，但迄今为止未见 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 和 $HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的加权分子刻画. 我们知道， Hardy 空间的原子和分子刻画，在许多算子的有界性证明中起到了非常重要的作用. 如果没有分子刻画，在证明算子在其上的有界性中一般要借助某些极大算子或一些复杂的分解；若建立起分子刻画，则只要证明每个原子在作用后是个分子即可. 我们就是出于这样目的，首先在文中给出 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 和 $HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的加权分子定义和分子刻画的证明，然后作为应用，结合它们的加权原子刻画给出了强奇异积分算子 T_b 在 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 和 $HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 上的有界性的证明. 在此，我们先指出，以往的加权 Herz 空间和加权 Herz 型 Hardy 空间的定义中， q 的范围多是 $1<q<\infty$, 事实上 $q=\infty$ 也是成立的.

为了方便，我们介绍一下加权 Herz 空间，加权 Herz 型 Hardy 空间， $(\alpha,q,\omega_1,\omega_2)$ 原子， $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子的概念：

定义 1.1 设 $0<\alpha<\infty, 0<p<\infty, 1<q\le\infty$, 以及 ω_1,ω_2 为非负权函数

(a) 齐次加权 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)=\{f\in L^q_{\rm Loc}(R^n\backslash\{0\},\omega_2):\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}=\{\sum_{k\in Z}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha\cdot p}{n}}\|f\cdot\chi^k\|^p_{L^q_{\omega_2}}\}^{\frac{1}{p}}$.

(b) 非齐次加权 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 定义为

$$K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)=L^q_{\omega_2}(R^n)\cap\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2),$$

并规定 $\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}=\|f\|_{L^q_{\omega_2}}+\|f\|\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$.

定义 1.2 设 $0<\alpha<\infty, 0<p<\infty, 1<q\le\infty$, 以及 $\omega_1,\omega_2\in A_1$.

收稿日期: 2003-07-07

(a) 伴随 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的齐次 Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 定义为

$$H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)=\{f\in\varphi',Gf\in\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)\},$$

并规定 $\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}=\|Gf\|\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$, 其中 Gf 是 f 的主极大函数.

(b) 伴随 $K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的非齐次 Hardy 空间 $HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 定义为

$$HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)=\{f\in\varphi',Gf\in K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)\},$$

并规定 $\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}=\|Gf\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}$, 其中 Gf 是 f 的主极大函数.

对于 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 和 $HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 人们感兴趣的情形是 $\alpha\geq n(1-\frac{1}{q})$ 时, 此种情况下这些空间的加权原子分解已由陆善镇和杨大春在文献 [1] 中给出.

定义 1.3 设 $\alpha\geq n(1-\frac{1}{q}),1<q\leq\infty,\omega_1,\omega_2\in A_1,s\geq[\alpha+n(\frac{1}{q}-1)]$,

(1) 函数 $a(x)$ 被称为一中心 $(\alpha,q,\omega_1,\omega_2)$ 原子, 是指它满足如下三个条件:

a) $\operatorname{supp} a\subset I(0,r)=\{x\in R^n:|x|<r\},r>0$;

b) $\|a\|_{L^q_{\omega_2}}\leq[\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{\alpha}{n}}$;

c) $\int a(x)x^\beta \mathrm{d}x=0.|\beta|\leq s$.

(2) 函数 $a(x)$ 被称为一限制型中心 $(\alpha,q,\omega_1,\omega_2)$ 原子, 如果它满足: a') $\operatorname{supp} a\subset I(0,r),r\geq 1$; 和 (b), (c).

下面给出加权分子的定义

定义 1.4 设 $\alpha\geq n(1-\frac{1}{q}),1<q\leq\infty,\omega_1,\omega_2\in A_1,s\geq[\alpha+n(\frac{1}{q}-1)],\varepsilon>\max\{\frac{s}{n},\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}-1\}$.

(1) 函数 $M(x)$ 被称为一中心 $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子, 是指它满足如下三个条件:

1) $M(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^b\in L^q_{\omega_2}(R^n)$;

2) $\|M\|_{L^q_{\omega_2}}^{\frac{a}{b}}\cdot\|M(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^b\|_{L^q_{\omega_2}}^{1-\frac{a}{b}}\equiv\mathcal{N}_{\omega_1,\omega_2}(M)<\infty$;

3) $\int M(x)x^\beta\mathrm{d}x=0.\ |\beta|\leq s$.

其中 $a=1-\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{n}+\varepsilon,b=1-\frac{1}{q}+\varepsilon$.

(2) $M(x)$ 称为是限制型的中心 $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子, 如果它的定义域在 $\{|x|>1\}$ 中不空, 且满足 1),2) 和 3).

引理 1.1 令 $0<p<\infty$, $1\leq q<\infty$, $n(1-\frac{1}{q})\leq\alpha<\infty$, 且 $\omega_1,\omega_2\in A_1$, 那么 $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 当且仅当 $f(x)$ 可以表示成: $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k(x)$ (在分布意义下), 这里 a_k 是中心 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子, $\operatorname{supp} a_k\subset B(0,2^k)$, 且 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$. 并且

$$\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\sim\inf\{(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}}\},$$

这里下确界是对 f 的所有分解取的.

引理 1.2 令 $0<p<\infty$, $1\leq q<\infty$, $n(1-\frac{1}{q})\leq\alpha<\infty$, 且 $\omega_1,\omega_2\in A_1$, 那么 $f\in HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 当且仅当 $f(x)$ 可以表示成: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k a_k(x)$(在分布意义下), 这里 a_k 是限制型中心 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子, $\operatorname{supp} a_k\subset B(0,2^k)$, 且 $\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$. 并且

$$\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\sim\inf\{(\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}}\},$$

这里下确界是对 f 的所有分解取的.

2 定理的叙述和证明

从上面的定义可以看出 (实际上只要简单验证), 每个加权中心 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子 (或限制型的) 均是一个加权中心 $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子 (或限制型的). 因此，要证明 Herz 型 Hardy 空间的分子分解特征，只要证明下面的结论：

定理 2.1 $\alpha,q,s,\varepsilon,\omega_1,\omega_2$ 同上述所设, 若 M 是一个中心 $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子, 那么, $M\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$, 且 $\|M\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\le C\mathcal{N}_{\omega_1,\omega_2}(M)$, 其中 C 与加权分子无关.

定理 2.2 $\alpha,q,s,\varepsilon,\omega_1,\omega_2$ 同上述所设，若 M 是一个限制型的中心 $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子，那么， $M\in HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$, 且 $\|M\|_{HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\le C\mathcal{N}_{\omega_1,\omega_2}(M)$, 其中 C 与加权分子无关.

定理 2.1 的证明 不失一般性，设 M 是一个中心在原点的 $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子，并且 $\mathcal{N}_{\omega_1,\omega_2}(M)=1$, 令 $\omega_1(I_\sigma)^{\frac{\alpha}{n}}=\|M\|_{L^q_{\omega_2}}^{-1}(\sigma>0)$.

记 $E_0=\{x\in R^n: |x|\le\sigma\}$, $E_k=\{x\in R^n: 2^{k-1}\sigma<|x|\le 2^k\sigma\}$, $M_k=M\cdot\chi_{E_k}$, 则 $M=\sum_{k=0}^{+\infty}M_k(x)$.

设函数 $\varphi_\beta^k(x)$ 是 E_k 上的次数不超过 s 的满足下式的唯一多项式

$$\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}\varphi_\beta^k(x)\cdot x^\gamma\mathrm{d}x=\delta_{\beta,\gamma},\quad 0\le|\beta|\le s, \tag{2.1}$$

这里

$$\delta_{\beta,\gamma}=\begin{cases}1, & \beta=\gamma,\\ 0, & \beta\ne\gamma.\end{cases}$$

定义函数 $P_k(x)=\sum_{|\beta|\le s}m_\beta^k\cdot\varphi_\beta^k(x)$, 其中 $m_\beta^k=\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}M_k(x)x^\beta\mathrm{d}x$. 那么有

$$\int_{R^n}\{M_k(x)-P_k(x)\}\cdot x^\beta\mathrm{d}x=0,\quad |\beta|\le s. \tag{2.2}$$

我们要证明： (I) 每一个 (M_k-P_k) 都是一个中心 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子的倍数； (II) $\sum_k P_k$ 有中心 $(\alpha,\infty;\omega_1,\omega_2)$ 原子的分解. 又因为 $(\alpha,\infty;\omega_1,\omega_2)$ 原子一定是 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子. 所以，由 $M(x)=\sum_k M_k(x)=\sum_k(M_k-P_k)+\sum_k P_k$ 可知 M 具有 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子的分解.

显然，我们有估计式

$$|\varphi_\beta^k(x)|\le C(2^k\sigma)^{-|\beta|}. \tag{2.3}$$

这是因为：记 $E=\{x\in R^n: 1<|x|\le 2\}$, $F=\{x\in R^n: |x|\le 1\}$, 且记 $\{T_\beta: |\beta|\le s\}$ 和 $\{T_\beta^0: |\beta|\le s\}$ 分别是 $\{x^l: |l|\le s\}$ 关于权 $\frac{1}{|E_k|}$ 和 $\frac{1}{|F_k|}$ 的对偶基，则由

$$\delta_{\beta,l}=\langle\varphi_\beta^k,x^l\rangle=\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}\varphi_\beta^k\cdot x^l\mathrm{d}x=\frac{1}{|E|}\int_E(2^k\sigma)^{|l|}\varphi_\beta^k(2^k\sigma y)y^l\mathrm{d}y,$$

得到 $T_\beta(y)=(2^k\sigma)^{|\beta|}\varphi_\beta^k(2^k\sigma y)$. 同样得到 $T_\beta^0(y)=(2^k\sigma)^{|\beta|}\varphi_\beta^0(\sigma y)$, 所以有

$$\varphi_\beta^k=(2^k\sigma)^{-|\beta|}T_\beta(\frac{x}{2^k\sigma}),\quad x\in E_k, k\ge 1$$

$$\varphi_\beta^0=(2^k\sigma)^{-|\beta|}T_\beta^0(\frac{x}{\sigma}),\quad x\in F.$$

令 $C=\sup_\beta\{\|T_\beta\|_\infty,\|T^0_\beta\|_\infty\}$, T_β 有界. 所以

$$|\varphi^k_\beta(x)|\le C(2^k\sigma)^{-|\beta|}.$$

因此

$$|P_k(x)|\le C\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}|M_k(x)|\mathrm{d}x.$$

下面开始证明 (I): 每一个 (M_k-P_k) 都是一个 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子的倍数.

首先, 对于 M_k-P_k 由 (2.2) 式知其消失矩条件满足.

其次, 由 M_k 和 P_k 的定义知, $\operatorname{supp}(M_k-P_k)\subseteq I_{2^k\sigma}$. 其中 $I_{2^k\sigma}=\{x\in R^n:|x|\le 2^k\sigma\}$.

最后, 讨论 M_k-P_k 的大小条件.

对 $1<q\le\infty$, 由 Hölder 不等式及 A_1 条件可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}|M_k(x)|\mathrm{d}x&\le C\cdot\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}M_k(x)\cdot\omega_2(x)^{\frac1q}\cdot\omega_2(x)^{-\frac1q}\mathrm{d}x\\&\le C\cdot\frac{1}{|E_k|}(\int_{E_k}|M_k(x)|^q\cdot\omega_2(x)\mathrm{d}x)^{\frac1q}\cdot(\int_{E_k}\omega_2^{-\frac{q'}{q}}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q'}}\\&\le C\cdot\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}\cdot(\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}\omega_2^{-\frac{q'}{q}})^{\frac{1}{q'}}\cdot(\frac{1}{|E_k|})^{1-\frac{1}{q'}}\\&\le C\cdot\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}\cdot\{\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E_k}\omega_2(x))\}^{-\frac1q}\cdot|E_k|^{\frac{1}{q'}-1}\\&\le C\cdot\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}\cdot(\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}\omega_1(x)\mathrm{d}x)^{-\frac1q}\cdot|E_k|^{\frac{1}{q'}-1}\\&\le C\cdot\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}\cdot\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-\frac1q}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

可导出 $\|P_k\|_{L^q_{\omega_2}}\le C\cdot\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}$, 则 $\|M_k-P_k\|_{L^q_{\omega_2}}\le C\cdot\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}$.

注意到 $\mathcal{N}_{\omega_1,\omega_2}(M)=1$, 由前面的假设可知

$$\|M(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^b\|_{L^q_{\omega_2}}=\omega_1(I_\sigma)^{-\frac{\alpha}{n}+b}.$$

故有

$$\begin{aligned}\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}&\le C\cdot\|M_k(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^b\|_{L^q_{\omega_2}}\\&\le C\cdot\|M_k(x)\cdot(\frac{\omega_1(I_{|x|})}{\omega_1(I_{2^k\sigma})})^b\|_{L^q_{\omega_2}}\\&\le C\cdot\omega_1(I_\sigma)^{b-\frac{\alpha}{n}}\cdot\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-b}\\&\le C\cdot\omega_1(I_\sigma)^{b-\frac{\alpha}{n}}\cdot\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-(b-\frac{\alpha}{n})}\cdot\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-b+(b-\frac{\alpha}{n})}\\&\le C\cdot(\frac{\omega_1(I_\sigma)}{\omega_1(I_{2^k\sigma})})^{b-\frac{\alpha}{n}}\cdot\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}\\&\le C\cdot(\frac{|I_\sigma|}{I_{2^k\sigma}})^{(b-\frac{\alpha}{n})}\cdot\delta\cdot\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}\\&\le C\cdot 2^{-kn(b-\frac{\alpha}{n})\delta}\cdot\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}.\end{aligned}$$

则

$$\|M_k\|_{L^q_{\omega_2}}\le C\cdot 2^{-kn\delta\cdot(b-\frac{\alpha}{n})}\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}.\tag{2.5}$$

所以

$$\|M_k-P_k\|_{L^q_{\omega_2}}\le C\cdot 2^{-kn\delta\cdot(b-\frac{\alpha}{n})}\omega_1(I_{2^k\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}.$$

由上述可知 $A_k\equiv C\cdot 2^{kn\delta\cdot(b-\frac{\alpha}{n})}(M_k-P_k)$ 是一个 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子．即 $M_k-P_k=\lambda_k A_k$, $\lambda_k\equiv C2^{-kn\delta\cdot(b-\frac{\alpha}{n})}$, $0<\delta<1$．又 $b=1-\frac{1}{q}+\varepsilon$, 所以 $b-\frac{\alpha}{n}>0$, $-kn\delta\cdot(b-\frac{\alpha}{n})<0$, 因此 $\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$.

下面证明 (II): $\sum_k P_k(x)$ 具有 $(\alpha,\infty;\omega_1,\omega_2)$ 原子的分解．事实上有

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)=\sum_{|\beta|\le s}\sum_{k=0}^{\infty}(m_\beta^k|E_k|)(|E_k|^{-1}\varphi_\beta^k(x)).$$

运用 Abel 求和公式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(m_\beta^k|E_k|)(|E_k|^{-1}\varphi_\beta^k(x))\\
&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=k}^{\infty}m_\beta^j|E_j|-\sum_{j=k+1}^{\infty}m_\beta^j|E_j|\Big)(|E_k|^{-1}\varphi_\beta^k(x))\\
&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty}m_\beta^j|E_j|\Big)(|E_{k+1}|^{-1}\varphi_\beta^{k+1}(x)-|E_k|^{-1}\varphi_\beta^k(x))\\
&\quad\equiv\sum_{k=0}^{\infty}N_\beta^k(x)\cdot\psi_\beta^k(x),
\end{aligned}$$

其中 $N_\beta^k=\sum_{j=k+1}^{\infty}m_\beta^j|E_j|$, 且 $\psi_\beta^k(x)=|E_{k+1}|^{-1}\varphi_\beta^{k+1}(x)-|E_k|^{-1}\varphi_\beta^k(x)$．显然

$$\int_{R^n}\psi_\beta^k(x)x^\gamma\mathrm{d}x=\frac{1}{|E_{k+1}|}\int_{E_{k+1}}\varphi_\beta^{k+1}(x)\cdot x^\gamma\mathrm{d}x-\frac{1}{|E_k|}\int_{E_k}\varphi_\beta^k(x)\cdot x^\gamma\mathrm{d}x=0$$

对所有的 $0\le|\gamma|\le s$ 成立．所以消失矩条件满足．支集条件显然满足.

下面验证原子的大小条件．由 (2.4), (2.5) 可得

$$\begin{aligned}
|N_\beta^k|&=\sum_{j=k+1}^{\infty}|m_\beta^j||E_j|\le C\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{|E_j|}\Big|\int_{E_j}M_j(x)\cdot x^\beta\mathrm{d}x\Big|\cdot|E_j|\\
&\le C\sum_{j=k+1}^{\infty}(2^j\sigma)^\beta\cdot\frac{1}{|E_j|}\int_{E_j}|M_j(x)|\mathrm{d}x\cdot(2^j\sigma)^n\\
&\le C\sum_{j=k+1}^{\infty}(2^j\sigma)^{n+\beta}\cdot\|M_j\|_{L^\infty_{\omega_2}}\le C\sum_{j=k+1}^{\infty}(2^j\sigma)^{n+\beta}\cdot 2^{-jn\delta(b-\frac{\alpha}{n})}\cdot\omega_1(I_{2^j\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}\\
&\le C(2^{k+1}\sigma)^{n+\beta}\cdot\omega_1(I_{2^{k+1}\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}\cdot 2^{-(k+1)n\delta(b-\frac{\alpha}{n})}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(2^j)^{n+\beta-n\delta(b-\frac{\alpha}{n})-\frac{n\delta}{\frac{\alpha}{n}}}.
\end{aligned}$$

选取 δ 确保 $n+\beta-n\delta(b-\frac{\alpha}{n}+\frac{n}{\alpha})$ 是负的．则

$$|N_\beta^k|\le C(2^{k+1}\sigma)^{n+\beta}\omega_1(I_{2^{k+1}\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}\cdot 2^{-(k+1)n\delta(b-\frac{\alpha}{n})}$$

由 (2.3), 我们有

$$\begin{aligned}|N_\beta^k\cdot\psi_\beta^k(x)| &\le C(2^{k+1}\sigma)^{-n-\beta}(2^{k+1}\sigma)^{n+\beta}\omega_1(I_{2^{k+1}\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}}\cdot 2^{-(k+1)n\sigma(b-\frac{\alpha}{n})}\\ &\le C2^{-(k+1)n\delta(b-\frac{\alpha}{n})}\cdot\omega_1(I_{2^{k+1}\sigma})^{-\frac{\alpha}{n}},\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)=\sum_{|\beta|\le s}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{k,\beta}A_{k,\beta}(x),$$

其中 $\lambda_{k,\beta}=2^{-(k+1)n\delta(b-\frac{\alpha}{n})}$, $A_{k,\beta}(x)$ 是一个 $(\alpha,\infty;\omega_1,\omega_2)$ 原子.

综合 (I) 和 (II) 的讨论，定理 2.1 得证.

对于定理 2.2 的证明，只要做适当的修改 ($\sigma\ge 1$).

3 定理的应用

作为 Herz 型 Hardy 空间的分子刻画的应用，这一节我们要证明强奇异积分算子在 Herz 型 Hardy 空间上的有界性. 在叙述和证明定理之前，先介绍部分必须的内容.

令 $\theta(\xi)$ 是一个径向极大函数，当 $|\xi|\ge 1$ 时， $\theta(\xi)=1$, 当 $|\xi|\le\frac{1}{2}$ 时， $\theta(\xi)=0$. 定义算子 T_b:

$$\widehat{(T_bf)}(\xi)=\theta(\xi)\frac{e^{i|\xi|^b}}{|\xi|^{\frac{nb}{2}}}\widehat{f}(\xi),\quad 0<b<1.$$

T_b 的核是非常奇异的. 粗略的说，它形如 $K_{b'}(x)=\frac{e^{i|x|^{-b'}}}{|x|^n}$, 这里 $b'=\frac{b}{(1-b)}$. 事实上，当 $|x|\ge 2|y|$ 时，经简单计算可得

$$|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x)|\le C\cdot\frac{|y|}{|x|^{n+b'+1}},\tag{3.1}$$

此处，我们的目的主要是考察该算子在 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 上的有界性. 相关引理如下:

引理 3.1 $T_bf(x)$ 的核是

$$C\frac{e^{i\alpha_b|x|^{-b'}}}{|x|^n}\chi(|x|\le 1)+h(x),\quad b'=\frac{b}{(1-b)},\tag{3.2}$$

这里 $|h(x)|\le C(1+|x|)^{-(n+1)}+C|x|^{-n+\varepsilon}\chi(|x|\le 1)$, $\varepsilon>0$. 且 $\alpha_b=b^{\frac{b}{(1-b)}}-b^{\frac{1}{(1-b)}}$, ε 仅与 b 有关.

引理 3.2 令 $\tilde{K}_{b',s}(x)=\frac{e^{i\alpha_b|x|^{-b'}}}{|x|^{\frac{n(b'+2)}{s}}}$, 且 $\frac{(b'+2)}{s}<1$, 那么 $\|\tilde{K}_{b',s}*f\|_s\le C\|f\|_{s'}$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$.

下面叙述并证明定理.

定理 3.1 令 $0<p\le 1<q\le\infty$, $\alpha\ge n(1-\frac{1}{q})$, 且 $\omega_1,\omega_2\in A_1$, $T_b^*(x^\beta)=0$ (T_b^* 是 T_b 的对偶), 那么

$$\|T_bf\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\le C\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)},$$

这里 C 是与 f 无关的常数.

定理 3.2 令 $0<p\le 1<q\le\infty$, $\alpha\ge n(1-\frac{1}{q})$, 且 $\omega_1,\omega_2\in A_1$, $T_b^*(x^\beta)=0$ (T_b^* 是 T_b 的对偶), 那么

$$\|T_bf\|_{HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\le C\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)},$$

这里 C 是与 f 无关的常数.

定理 3.1 的证明 由 $p\le 1$ 和加权 Herz 型 Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的原子分解和分子刻画可知，只要对任意中心 $(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$ 原子 $a, T_ba(x)$ 是一个中心 $(\alpha,q;s,\varepsilon)_{\omega_1,\omega_2}$ 分子即可，即只要 T_ba 满足以下两条：

1) $\mathcal{N}_{\omega_1,\omega_2}(T_b(a))=\|T_ba\|_{L^q_{\omega_2}}^{\frac{a_0}{b_0}}\cdot\|T_ba(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^{b_0}\|_{L^q_{\omega_2}}^{1-\frac{a_0}{b_0}}<\infty.$

2) $\int_{R^n}T_ba(x)\cdot x^\beta\mathrm{d}x=0$, 对 $0\le|\beta|\le s$ 成立.

由题设可知消失矩条件显然，下面验证大小条件.

由 T_b 的加权 L^q 有界性 [7], 有

$$\|T_ba\|_{L^q_{\omega_2}}\le C[\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{\alpha}{n}}, \tag{3.3}$$

且

$$\|T_ba(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^{b_0}\|_{L^q_{\omega_1}}^q=(\int_{2I}+\int_{(2I)^c})|T_ba(x)|^q\omega_1(I_{|x|})^{qb_0}\cdot\omega_2(x)\mathrm{d}x=J_1+J_2.$$

对于 J_1, 由 (3.3) 得

$$\begin{aligned}J_1&\le C\omega_1(I(0,r))^{qb_0}\cdot\int_{2B}|T_ba|^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\le C\omega_1(I(0,r))^{qb_0}\cdot\|T_ba\|_{L^q_{\omega_2}}^q\\&\le C\omega_1(I(0,r))^{qb_0}\cdot[\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{\alpha}{n}\cdot q}.\end{aligned}$$

下面看 J_2, 由 (3.2) 写为

$$\begin{aligned}J_2&=\int_{(2I)^c}|T_ba(x)|^q\omega_1(I_{|x|})^{qb_0}\omega_2(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{(2I)^c}|(K_{b'}*a)\chi_k|^q\omega_1(I_{|x|})^{qb_0}\omega_2(x)\mathrm{d}x+\int_{(2I)^c}|(h*a)\chi_k|^q\omega_1(I_{|x|})^{qb_0}\omega_2(x)\mathrm{d}x\\&=J_3+J_4.\end{aligned}$$

为估计 J_3, 先看 $K_{b'}*a$ 的点态估计，令 $|x|\ge 2r$, 那么由 $a(x)$ 的消失矩条件，有

$$|K_{b'}*a(x)|\le\int_{I(0,r)}|K_{b'}(x-y)-K_{b'}(x)|\cdot|a(y)|\mathrm{d}y.$$

由 $K_{b'}(x)$ 的条件 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}|K_{b'}*a(x)|&\le\frac{Cr}{|x|^{n+b'+1}}\int_{I(0,r)}|a(y)|\mathrm{d}y\\&\le\frac{Cr}{|x|^{n+b'+1}}\|a\|_{L^q_{\omega_2}}(\int_{I(0,r)}\omega_2^{-\frac{q'}{q}}(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}\\&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{\alpha}{n}}\cdot(\operatorname*{ess\,inf}_{I(0,r)}\omega_2)^{-\frac{1}{q}}\cdot r^{\frac{n}{q'}+1}\frac{1}{|x|^{n+b'+1}},\end{aligned}$$

所以

$$J_3 \leq C[\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{q\alpha}{n}} \cdot (\operatorname{ess}\inf_{I(0,r)} \omega_2)^{-1} \cdot r^{q(\frac{n}{q'}+1)} \cdot \int_{(2I)^c} \frac{\omega_1(I_{|x|})^{qb_0}}{|x|^{(n+b'+1)q}} \omega_2(x)\mathrm{d}x,$$

又因为

$$C(\frac{|I(0,r)|}{|I_{|x|}|}) \leq \frac{\omega_1(I(0,r))}{\omega_1(I_{|x|})},$$

所以

$$\omega_1(I_{|x|})^{qb_0} \leq C(\frac{|I_{|x|}|}{|I(0,r)|})^{qb_0} \cdot \omega_1(I(0,r))^{qb_0}$$

则有

$$\begin{aligned} J_3 &\leq C \cdot [\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}} \cdot r^{q(\frac{n}{q'}+1)-nqb_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{C_k} \frac{|x|^{n-1}}{|x|^{(n+b'+1)q-nqb_0}} \mathrm{d}|x| \\ &\leq C \cdot [\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}} \cdot r^{q(\frac{n}{q'}+1)-nqb_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{kn-kq(n+b'+1)+knqb_0} \\ &\leq C \cdot [\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}} \cdot \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{2^{(k_0-1)(qn-n+q-nqb_0)}}{2^{k(qn-n+q-nqb_0)} \cdot 2^{kqb'}} \\ &\leq C \cdot [\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}} \cdot \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kqb'}} \\ &\leq C \cdot [\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}. \end{aligned}$$

为估计 J_4, 先看 $h*a$ 的点态估计. 令 $|x| \geq 2r$, 我们有

$$\begin{aligned} |h*a(x)| &\leq \int_{|t|\leq r} |h(x-t)||a(t)|\mathrm{d}t \\ &\leq C\int_{|t|\leq r} |a(t)|[\frac{1}{(1+|x-t|)^{n+1}} + \frac{\chi(|x-t|\leq 1)}{|x-t|^{n-\varepsilon}}]\mathrm{d}t \\ &\leq C[\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} + \frac{\chi(|x|\leq 2)}{|x|^{n-\varepsilon}}]\int_{|t|\leq r} |a(t)|\mathrm{d}t \\ &\leq C[\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} + \frac{\chi(|x|\leq 2)}{|x|^{n-\varepsilon}}](\int_{I(0,r)} |a(t)|^q \omega_2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}} \cdot (\int_{I(0,r)} \omega_2^{-\frac{q'}{q}}(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq C[\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} + \frac{\chi(|x|\leq 2)}{|x|^{n-\varepsilon}}] \cdot [\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{\alpha}{n}} \cdot (\operatorname{ess}\inf_{I(0,r)} \omega_2)^{-\frac{1}{q}} \cdot r^{\frac{n}{q'}}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} J_4 &\leq \int_{(2I)^c} |(h*a)\cdot\chi_k|^q \cdot \omega_1(I_{|x|})^{qb_0} \cdot \omega_2(x)\mathrm{d}x \\ &\leq C\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{C_k} |(h*a)\cdot\chi_k|^q \cdot \omega_1(I_{|x|})^{qb_0} \cdot \omega_2(x)\mathrm{d}x \\ &\leq C\sum_{k=k_0+1}^{\infty} [\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{\alpha q}{n}} (\operatorname{ess}\inf_{I(0,r)} \omega_2)^{-1} r^{\frac{nq}{q'}} \int_{C_k} \frac{1}{(1+|x|)^{(n+1)q}} \omega_1(I_{|x|})^{qb_0} \omega_2(x)\mathrm{d}x + \end{aligned}$$

$$C\sum_{k=k_0+1}^{1}[\omega_1(I(0,r))]^{-\frac{\alpha q}{n}}(\operatorname{ess}\inf_{I(0,r)}\omega_2)^{-1}\cdot r^{\frac{nq}{q'}}\int_{C_k}\frac{1}{|x|^{(n-\varepsilon)q}}\omega_1(I_{|x|})^{qb_0}\omega_2(x)\mathrm{d}x$$
$$=J_5+J_6,$$

其中

$$\begin{aligned}
J_5&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot r^{\frac{nq}{q'}-nqb_0}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\int_{C_k}\frac{|I_{|x|}|^{qb_0}}{(1+|x|)^{(n+1)q}}\mathrm{d}x\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot r^{\frac{nq}{q'}-nqb_0}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{(1+2^k)^{(n+1)q}}\int_{C_k}|x|^{nqb_0+n-1}\mathrm{d}|x|\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot r^{\frac{nq}{q'}-nqb_0}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{2^{2(nqb_0+n)}}{(1+2^k)^{(n+1)q}}\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot[\sum_{k=k_0+1}^{1}\frac{2^{(k_0-1)n(q-1-qb_0)}}{2^{kn(q-1-qb_0)}}2^{knq}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{(k_0-1)n(q-1-qb_0)}}{2^{kn(-qb_0-1+q)}}\frac{1}{2^{kq}}]\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}},\\
J_6&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot r^{\frac{nq}{q'}-nqb_0}\sum_{k=k_0+1}^{1}\int_{C_k}\frac{|x|^{nqb_0}}{|x|^{(n-\varepsilon)q}}\mathrm{d}x\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot r^{\frac{nq}{q'}-nqb_0}\sum_{k=k_0+1}^{1}\int_{C_k}|x|^{nqb_0-(n-\varepsilon)q+n-1}\mathrm{d}|x|\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot\sum_{k=k_0+1}^{1}2^{(k_0-1)n(q-1-qb_0)}\cdot 2^{k(nqb_0-nq+\varepsilon q+n)}\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}\cdot\sum_{k=k_0+1}^{1}\frac{2^{(k_0-1)n(q-1-qb_0)}}{2^{kn(q-1-qb_0)}}\cdot 2^{k\varepsilon q}\\
&\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}.
\end{aligned}$$

由 J_5, J_6 知

$$J_4\le C[\omega_1(I(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}},$$

故

$$J_2\le C[\omega_1(B(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}}.$$

结合 J_1 的估计，可得

$$\|T_ba(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^{b_0}\|_{L^q_{\omega_2}}^q\le C[\omega_1(B(0,r))]^{qb_0-\frac{\alpha q}{n}},$$

因此

$$\|T_ba(x)\cdot\omega_1(I_{|x|})^{b_0}\|_{L^q_{\omega_2}}^{1-\frac{a_0}{b_0}}\le C[\omega_1(B(0,r))]^{(b_0-\frac{\alpha}{n})(1-\frac{a_0}{b_0})},$$

则

$$\mathcal{N}_{\omega_1\omega_2}(T_ba)=C[\omega_1(B(0,r))]^{\frac{-\alpha}{n}\cdot\frac{a_0}{b_0}}\cdot[\omega_1(B(0,r))]^{(b_0-\frac{\alpha}{n})(1-\frac{a_0}{b_0})}\le C.$$

即大小条件得证. □

同理可得定理 3.2 的证明，略去细节.

参考文献:

[1] 陆善镇，杨大春. 加权 Herz 型 Hardy 的空间及其应用 [J]. 中国科学， A 辑， 1995, **25**(3): 235–245.
LU Shan-zhen, YANG Da-chun. *The weighted Herz-type Hardy spaces and their applications* [J]. Sci. China Ser. A, 1995, **25**(3): 235–245. (in Chinese)

[2] LU Shan-zhen, YANG Da-chun. *Some characterizations of weighted Herz-type Hardy spaces and their applications* [J]. Acta Math. Sinica (N.S.), 1997, **13**(1): 45–58.

[3] TAIBLESON M, WEISS G. *The Molecular Characterization of Certain Hardy Spaces* [M]. Representation theorems for Hardy spaces, 67–149, Astérisque, 77, Soc. Math. France, Paris, 1980.

[4] LEE Ming-yi, LIN Chin-cheng. *The molecular characterization of weighted Hardy spaces* [J]. J. Funct. Anal., 2002, **188**: 442–460.

[5] LU Shan-zhen, YANG Da-chun. *The local version of $H^p(R^n)$ spaces at the origin* [J]. Studia Math, 1995, **116**: 103–131.

[6] 韩永生. 近代调和分析方法及其应用 [M]. 北京：科学出版社， 1988.
HAN Yong-sheng. *The Lately Method of the Harmonic Analysis and Their Applications* [M]. Beijing: Science Press, 1988.

[7] 李晓春，陆善镇. 加权型空间上的强奇异积分算子 [J]. 数学学报， 1998, **41**(1): 7–18.
LI Xiao-chun, LU Shan-zhen. *Strongly singular convolution operators on weighted Herz-type Hardy spaces* [J]. Acta Math. Sinica, 1998, **41**(1): 7–18. (in Chinese)

[8] STEIN E M. *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.

The Molecular Characterization of Weighted Herz Type Hardy Spaces

ZHAO Kai, ZHOU Shu-juan, MA Li-min
(Dept. of Math., Qingdao University, Shandong 266071, China)

Abstract: The molecules for weighted Herz type Hardy spaces are defined, and their molecular characterization are proved. As an application, it is shown that the strongly singular integral operators are bounded in the weighted Herz-type Hardy spaces.

Key words: weightes; molecular character; weighted Herz-type Hardy spaces; strongly singular integral operators.