

文章编号: 1002-0446(2000)03-0211-06

## 一种考虑控制精度的机器人最优轨迹规划方案

孟传伟 蒋平 陈辉堂 王月娟

(同济大学电气工程系 上海 200092)

摘要: 本文提出一种考虑控制精度的机器人轨迹规划方案. 首先从运动的平稳性出发, 将轨迹按弧坐标均匀采样, 将各采样分段规划为匀变速运动; 然后从工程角度分析了跟踪误差与控制器输出力矩的关系, 提出根据控制误差对关节力矩进行模糊加权的二次规划方案, 实验结果验证了该方法的有效性.

关键词: 机器人; 轨迹规划; 模糊逻辑

中图分类号: TP24 文献标识码: B

### 1 引言

在许多工业应用中, 连续轨线的高速高精度跟踪是机器人控制的一个重要内容, 如弧焊、切割等作业, 这就涉及到最优轨迹规划问题<sup>[1,2]</sup>. 而按照通常的规划算法所规划出的“最优”参考轨迹在实际中却难以应用, 因为这一参考轨迹是基于机器人的精确动力学模型得到的, 没有考虑实际系统中存在的模型不确定性, 也未考虑控制器的动态特性, 因而跟踪精度得不到保证. 文[3]针对机器人轨线作业, 提出一种在驱动电机约束条件下, 根据目标轨线特征进行的轨迹规划方案, 为保证控制精度, 特别为反馈控制统一预留有一定的控制力矩余量, 一般而言, 这一预留量是较为保守的; 文[4]针对重复作业任务的机器人, 提出一种根据“检测点”处的跟踪误差不断修正运行速度进而提高跟踪性能的迭代方法, 但是在这种方法中, 初始路径的选取具有很大的随意性, 而且关于检测点的选取没有给出具体明确的方法. 我们知道, 机器人在跟踪一条参考轨迹的过程中, 各点的跟踪误差是不同的, 因此从工程的角度出发, 在误差大的地方保证有较大的反馈控制力矩, 而在误差较小处维持较小的反馈控制力矩, 那么更能充分发挥机器人的潜在性能. 为此, 受文献[4]启发, 本文在文[3]的基础上, 提出一种考虑机器人跟踪性能的二次规划方案.

### 2 工作轨线的弧坐标表示

考虑具有  $n$  个关节的刚性机器人, 其动力学方程为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T \quad (1)$$

其中  $q \in R^n$  是关节角位移矢量,  $M(q) \in R^{n \times n}$  为惯性矩阵, 而  $C(q, \dot{q})\dot{q} \in R^n$  表示离心力与哥氏力项,  $G(q) \in R^n$  代表重力项,  $T \in R^n$  是控制力矩. 机器人各关节力矩  $T_i$  受电机最大驱动能力的限制, 我们设各关节电机所能提供的最大力矩为  $T_{mi}$  且正负对称, 即

$$-T_{mi} \leq T_i \leq T_{mi} \quad (2)$$

基金项目: 国家自然科学基金及上海市科技发展基金资助项目.

收稿日期: 1999-02-09

那么, 时间最优轨迹规划问题的描述为: 给定机器人关节空间路径  $q = f(s)$  及动力学方程(1), 确定轨迹  $s(t), t \in [0, t_f]$ , 使得在满足力矩约束条件(2)的情况下  $t_f$  最小. 其中的  $s$  是路径的弧坐标描述.

设机器人末端从  $s = 0$  沿着路径到达  $s = s_f$  形成的光滑函数矢量为  $P(s)$ , 在工作空间有

$$P(s) = R(q) \tag{3}$$

其中  $R(q)$  为机器人的正运动学表达式. 定义弧坐标下末端运动速度值  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ , 加速度值  $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$ . 将(3)式两边分别求导两次可得

$$\begin{aligned} \dot{q} &= R_q^{-1} P_s \dot{s} \\ \ddot{q} &= R_q^{-1} [P_{ss} \dot{s}^2 + P_{ss} \ddot{s} - (R_q^{-1} P_s)^T R_{qq} (R_q^{-1} P_s) \dot{s}^2] \end{aligned} \tag{4}$$

这里, 下标  $s$  与  $q$  表示对标量  $s$  和  $q$  的偏微分,  $R_q$  为 Jacobian 矩阵,  $R_{qq}$  为 Hessian 矩阵.

设机器人的工作轨线如图 1 所示, 我们可在两个坐标系内描述机器人的运动, 其一为直角坐标  $P(s)$ , 用以定义工作轨线特征, 而不包括轨线的时间特征; 另一个为弧坐标  $s(t)$ , 是待规划的时间函数, 当机器人运动时, 弧坐标  $s$  随时间不断改变, 是时间  $t$  的单调增函数. 显然, 应用直角坐标系与弧坐标系可唯一确定机器人末端每一瞬时的工作状态.

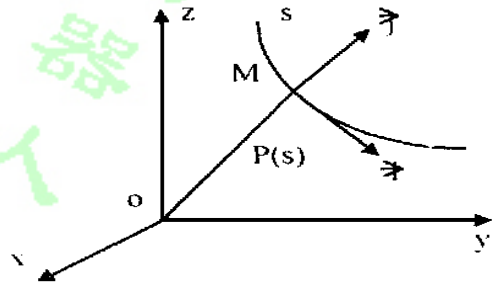


图 1 工作轨线的坐标系描述

对给定轨线上的任一点  $M$ , 设切线单位向量为  $\vec{t}$ , 法线单位向量为  $\vec{j}$ , 我们有

$$\begin{aligned} P_s &= \vec{t}(s) \\ P_{ss} &= k\vec{j}(s) \end{aligned} \tag{5}$$

其中  $k$  为轨线在  $M$  点处的曲率. 为描述方便起见, 我们记 Jacobian 矩阵  $R_q = J$ , Hessian 矩阵  $R_{qq} = H$ , 将关系式(5)代入(4)式有

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{s} J^{-1} \vec{t}(s) \\ \ddot{q} &= \dot{s} J^{-1} \ddot{s} + \dot{s}^2 \{ J^{-1} k \vec{j}(s) - [J^{-1} \vec{t}(s)]^T H [J^{-1} \vec{t}(s)] \} \end{aligned} \tag{6}$$

令  $f_{sp} = J^{-1} \vec{t}(s), h_{sp} = J^{-1} k \vec{j}(s) - [J^{-1} \vec{t}(s)]^T H [J^{-1} \vec{t}(s)]$

那么 
$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{s} f_{sp} \\ \ddot{q} &= \dot{s} f_{sp} + \dot{s}^2 h_{sp} \end{aligned} \tag{7}$$

从  $f_{sp}$  与  $h_{sp}$  的定义可以看出,  $f_{sp}$  与  $h_{sp}$  仅与轨线的特征有关, 而与时间无关. 在关节空间, 关节角位移矢量  $q$  可描述为路径参数弧坐标  $s$  的函数, 记为

$$q = f(s) \tag{8}$$

将式(7)与(8)式代入方程(1)式, 可得机器人动力学方程的弧坐标描述

$$\dot{s} M(f(s)) \dot{s} + \dot{s}^2 [M(f(s)) h_{sp} + C(f(s), f_{sp})] + G(f(s)) = T \tag{9}$$

令  $M' = M(f(s)) f_{sp}, C' = M(f(s)) h_{sp} + C(f(s), f_{sp}), G' = G(f(s))$ , 那么上式可简写为

$$M' \dot{s} + C' \dot{s}^2 + G' = T \tag{10}$$

或者写成标量形式

$$m'_i \ddot{s} + c'_i \dot{s}^2 + g'_i = T_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

上式中  $m'_i$  反映了第  $i$  个关节的惯性效应,  $c'_i$  反映了与速度有关的力效应, 而  $g'_i$  则表示重力效应, 三者都是只由轨线特征决定, 而与时间无关的量. 考虑关节力矩的约束条件(2)式, 我们可以得到

$$-T_{mi} \leq m'_i \ddot{s} + c'_i \dot{s}^2 + g'_i \leq T_{mi} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

对于每个  $i$ , 式(12)表示在平面  $\ddot{s}$ - $\dot{s}^2$  内的两根平行直线, 将平面分为允许运行区域与不允许运行区域两部分, 所有单个关节的允许区域的交集就是机器人的允许速度与加速度范围. 通常, 确定机器人末端最大速度曲线是一个十分烦琐的过程<sup>[5]</sup>, 而且在最大速度处, 加速度  $\ddot{s}$  一般只有一个方向. 对于许多机器人的作业任务而言, 运行速度并不是唯一的性能指标, 运行的平稳性及跟踪精度往往更为重要. 为此, 参考文[3]方法, 我们将机械手的最大匀速运行速度作为规划的速度上界.

对于(11)式, 我们令  $\ddot{s} = 0$ , 于是

$$c'_i \dot{s}^2 + g'_i = T_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

设  $T_{mi} > |g'_i|$ , 即各关节驱动电机可完全克服重力项作用, 显然, 关节所能达到的最大匀速运动速度, 必然是该关节驱动力矩饱和时的速度, 设最大匀速运动速度为  $v_{mi}$ , 于是

$$c'_i v_{mi}^2 + g'_i = \text{sgn}(c'_i) T_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

因此可以得到机器人末端的最大匀速运行速度

$$v_m = \min_{i=1, \dots, n} \frac{\text{sgn}(c'_i) T_i - g'_i}{c'_i} \quad (15)$$

上式表明, 当机器人以  $v_m$  匀速运行时, 至少有一个关节电机尽限使用. 不难证明, 当机器人末端匀速运行速度  $\dot{s} = v < v_m$  时, 作用在各节上的驱动力矩满足  $|T_i| < T_{mi}$ , 即没有力矩越界.

设机器人当前运行速度为  $v$ ,  $v < v_m$ , 于是可以得到机器人末端弧坐标下的最大可能正加速度

$$a_{m+} = \min_{i=1, \dots, n} \frac{\text{sgn}(m'_i) T_{mi} - c'_i v^2 - g'_i}{m'_i} \quad (16)$$

与最大可能负加速度

$$a_{m-} = \min_{i=1, \dots, n} \frac{-\text{sgn}(m'_i) T_{mi} - c'_i v^2 - g'_i}{m'_i} \quad (17)$$

由以上两式可以看出, 当机器人作变速运动时, 其最大加速度不仅与轨线特征有关, 而且与当前运行速度有关, 也就是跟时间轴有关, 而机器人运行轨线关于时间函数的描述正是我们规划方案所要解决的问题.

### 3 轨迹规划方案

由上节的分析可知, 对于一般的变速过程, 加速度与当前的运行速度有关, 而当前的运动速度又是待规划的量, 这影响了规划算法的具体实施. 为便于计算机求解及从运行平稳性的角度考虑, 我们采用匀加速或匀减速运动取代一般的变速运动.

设运行的轨线长度为  $l$ , 机器人末端初速度与末速度为  $v_0, v_f$ , 若作匀加速运动, 则

$$v^2 = v_0^2 + 2a_+ s \quad (18)$$

若作匀减速运动,有

$$v^2 = v_f^2 - 2a_-(l-s) \quad (19)$$

在上面两式中,  $v$  表示当前运行速度,  $s$  表示位移,  $a_+$  与  $a_-$  分别表示匀加速度与匀减速度, 且满足  $a_+ > 0, a_- < 0$ .

分别将(18)与(19)式代入(11)得

$$(m'_i + 2sc'_i)a_+ + c'_iv_0^2 + g'_i = T_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

$$(m'_i - 2(l-s)c'_i)a_- + c'_iv_f^2 + g_i = T_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

于是可得最大可能匀加速度

$$a_{m+} = \min_{i=1 \dots n} \frac{\text{sgn}(m'_i + 2sc'_i)T_{mi} - c'_iv_0^2 - g'_i}{m'_i + 2sc'_i} \quad (22)$$

及最大可能匀减速度

$$a_{m-} = \max_{i=1 \dots n} \frac{-\text{sgn}(m'_i + 2(l-s)c'_i)T_{mi} - c'_iv_f^2 - g'_i}{m'_i - 2(l-s)c'_i} \quad (23)$$

从(22)与(23)两式可以看出, 若机器人末端作匀变速运动, 其最大可能加减速速度只由轨线的几何特征与机器人动力学方程唯一决定, 而与时间轴无关.

根据以上的分析与讨论, 我们采用的这样规划思想: 对于一条给定的跟踪轨线, 首先将轨线以弧坐标的形式进行描述, 设其弧长为  $L$ , 定义弧坐标下的采样步长为  $h$ , 将轨线均匀采样为  $N$  ( $N = L/h$ ) 个分段, 根据式(15)计算出各个采样点的最大可能匀速运行速度  $v_m(s)$ , 作为规划算法中速度的上界, 然后从轨线两端同时开始规划, 采用动态编程技术, 将各个分段的运动规划为匀变速运动, 使得在每个采样点处的速度或加速度达到最大允许值, 每一弧段均以前一采样点作为初始条件, 不断迭代, 直至规划完整个轨线.

#### 4 二次规划方案

从工程角度来看, 对控制器输出力矩的要求越高, 控制误差就越大. 这一点是很容易理解的: 当跟踪轨线的加速度增大时, 要求控制器的输出力矩相应地增加, 以精确跟踪轨迹的变化, 而控制器由于控制算法、有限采样频率及其自身动态特性等多种因素的影响, 其输出力矩总是有限的, 这样当实际输出力矩小于需求的控制力矩时, 就会导致一较大的控制误差. 如果在系统控制误差较大的地方设法降低对控制力矩的要求, 即减小对应轨线区域的加速度, 那么必然会提高系统的跟踪精度. 为此, 我们首先按上节提出的轨迹规划方案规划一条参考轨迹  $q_d(t)$ , 进行轨迹跟踪控制, 然后根据控制结果对各关节可提供的最大输出力矩进行加权调整, 对轨线进行重新规划, 以改善控制性能.

根据控制任务, 为各关节控制误差定义一误差容限, 记为  $\epsilon_i$  ( $\epsilon_i > 0$ ), 以 3 节轨迹规划方案得到的路径作为参考路径, 进行跟踪控制, 设各关节控制误差为  $e_i(t)$ , 定义

$$\Delta e_i(t) = |e_i(t)| - \epsilon_i \quad (24)$$

我们采取简单的模糊逻辑规则对最大关节力矩进行加权调整. 取  $\Delta e_i(t)$  为语言变量, 其语言值为“大(B)”, “中(M)”, “小(S)”和“负(N)”4种, 语言变量各语言值的隶属度函数曲线如图2所示, 其中  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  为设计参数.

加权系数的调整规则是: 若  $\Delta e_i$  为负, 选取加权系数为 1; 若  $\Delta e_i$  小, 加权系数选取较小的的调整幅度; 若  $\Delta e_i$  为中, 加权系数选取中等的的调整幅度; 若  $\Delta e_i$  大, 加权系数选取较大的的

调整幅度. 设各条规则所对应的加权系数分别为  $K_Z (K_Z = 1), K_S, K_M, K_B$ , 我们可以用重心法求出加权系数

$$K_i(t) = \frac{\sum_{j=1}^4 \mu_j(\Delta e_i) K_j}{\sum_{j=1}^4 \mu_j(\Delta e_i)} \quad (25)$$

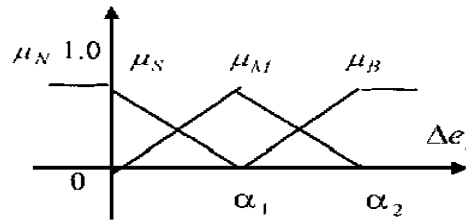


图 2  $\Delta e_i$  的隶属函数曲线

我们取  $T_{mi}(t) = K_i(t) T_{mi}$  为第二次规划时各采样点的最大关节驱动力矩, 根据参考轨迹  $q_d(t)$  与  $s(t)$  的关系, 将力矩约束条件转化为弧坐标描述, 然后采用 3 节的规划方案对轨迹重新进行规划, 这样可保证在满足误差要求的区域, 保持期望跟踪速度基本不变, 而在误差较大的区域, 具有相对较小的期望速度与速度变化, 从而得到一条优化的规划路径.

### 5 实验结果

实验在我们自行设计的平面两关节异形玻璃切割机器人 DDR-II 上进行, 该机器人有大臂与小臂两个关节. 我们在自行设计的切割软件中输入一半径为 175mm 的圆形轨线, 给定的大小臂关节最大力矩分别为:  $T_{m1} = 10\text{Nm}$ ,  $T_{m2} = 5\text{Nm}$ , 弧坐标下的采样步长  $h$  为 1mm. 首先采用 3 节的规划方案进行轨迹规划, 得到的速度规划结果如图 3a 所示, 将规划轨迹作为参考路径, 进行跟踪控制. 控制律采用 PID+ 前馈补偿控制方案. 大小臂关节控制误差分别如图 3b 与图 3c 所示, 大臂的最大误差为  $0.13^\circ$ , 小臂的最大误差为  $0.12^\circ$ . 定义关节误差容限  $\epsilon_1 = 0.08^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 0.08^\circ$ ; 参数  $\alpha_1 = 1.1^\circ$ ,  $\alpha_2 = 1.4^\circ$ .  $K_S = 0.9$ ,  $K_M = 0.8$ ,  $K_B = 0.7$ . 根据 4 节的方案对最大关节力矩进行加权修正, 重新进行轨迹规划, 得到的速度规划结果如图 4a 所示. 同样采用 PID+ 前馈补偿的控制方案, 关节控制误差如图 4b 与图 4c 所示. 大臂的最大误差小于  $0.08^\circ$ , 小臂的最大误差小于  $0.09^\circ$ . 可见, 尽管运行时间略有所延长, 但控制精度有了明显的改善.

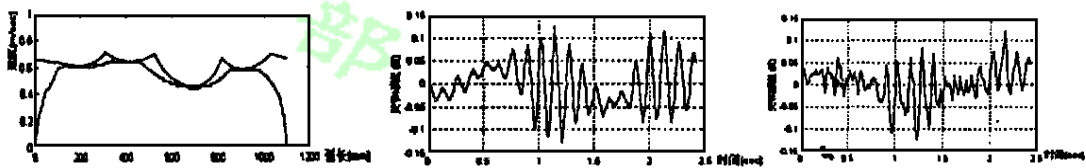


图 3a 力矩未加权前的末端速度规划结果 图 3b 大臂关节控制误差 图 3c 小臂关节控制误差

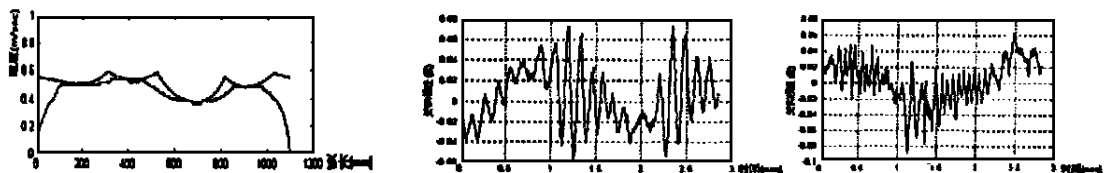


图 4a 力矩加权后的末端速度规划结果 图 4b 二次规划后大臂关节控制误差 图 4c 二次规划后小臂关节控制误差

## 6 结论

本文讨论了基于机器人系统动力学特性及关节力矩约束受限的轨迹规划方案,采用最大匀速运动速度作为规划速度上界,将各个分段规划为匀变速运动,使得规划算法得以简化,同时可使机器人的运动更加平稳.为保证跟踪精度,从工程的角度分析了跟踪控制误差与控制器输出力矩的关系,然后提出了根据控制误差对关节力矩进行模糊加权的二次规划方案,这种修正方案不依赖于具体的控制算法,是一种工程上实用而有效的方法.

## 参 考 文 献

- 1 Weinrab A, Bryson A E. Optimal Control of Systems with Hard Control Bounds. Proc. Amer Contr Confer, Boston, 1985. 1248- 1252
- 2 Bobrow J E *et al.* Time-optimal Control of Robotic Manipulators. Int J Robot Res, 1985, 4(3): 3- 17
- 3 蒋平, 陈辉堂, 王月娟. 力矩受限时的轨迹规划方案. 同济大学学报, 1993, 21(1): 49- 55
- 4 Boe F, Hannaford B. On-line Improvement of Speed and Tracking Performance on Repeative Paths. IEEE Trans Contr Syst Techn, 1998, 6(3): 350- 357
- 5 夏学锋, 罗三定, 蔡自兴. 机器人时间最优路径跟踪. 中国人工智能学会智能机器人专业委员会首届学术研讨会论文集, 成都, 1993, 161- 165

## AN OPTIMAL TRAJECTORY PLANNING SCHEME FOR MANIPULATORS BASED ON CONTROL PRECISION

MENG Chuan-wei JIANG Ping CHEN Huirang WANG Yue-juan

(Department of Electrical Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092)

**Abstract:** This paper proposed a trajectory planning scheme combining the robot dynamics and constrained joint torque. With the objective of the robot's steady movement, the trajectory is sampled equably and each segment is considered as uniformly variable motion. To guarantee tracking precision, the relation between the tracking control error and the output torque of the controller is analyzed from the point of engineering. Then an effective replanning scheme is presented, where fuzzy logic is used to weight the maximum joint torque according to the control error. The experiments on a robot show the feasibility of the scheme.

**Keywords:** Manipulator, trajectory planning, fuzzy logic

作者简介:

孟传伟 (1971-), 男, 博士生. 研究领域: 机器人控制, 故障诊断.

蒋平 (1965-), 男, 教授. 研究领域: 机器人控制, 计算机控制.

陈辉堂 (1934-), 男, 教授, 博导. 研究领域: 机器人控制, 计算机控制.