

# 基于颗粒滑动分析的砂土损伤本构模型

徐 辉, 王靖涛, 卫 军

(华中科技大学 土木工程与力学学院, 湖北 武汉 430074)

**摘要:** 砂土的变形行为具有非线性、弹塑性、剪胀性和应力路径相关性等特征, 这些变形特征均是由砂土颗粒间的相对滑动引起。将砂土颗粒的接触方式分为完善联结和滑动联结。当接触面上的剪应力达到该接触面的抗剪强度时, 完善联结就转变成滑动联结, 这种联结方式的转变被定义为骨架的损伤。引入 2 个取向范围的概念, 即损伤过程中已滑动的颗粒接触面取向范围(以 $\theta_s$ 表示)和骨架整体破坏时已滑动的颗粒接触面取向范围(以 $\theta_f$ 表示), 采用这两者的比值 $\theta_s/\theta_f$ 描述骨架的损伤程度, 并在此基础上导出相应的损伤本构模型。模型中的参数根据常规三轴试验和等应力比固结试验确定, 模型的形式简单, 可适用于复杂的应力条件。试验结果表明, 在不同围压、不同应力路径和不同固结方式等情况下, 该模型能较好地反映砂土变形的主要特征。

**关键词:** 土力学; 砂土; 完善联结; 滑动联结; 损伤; 本构模型

**中图分类号:** TU 470<sup>†.1</sup>

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2007)增 2 - 4367 - 05

## A DAMAGE CONSTITUTIVE MODEL FOR SANDY SOIL BASED ON ANALYSIS OF GRAIN SLIDING

XU Hui, WANG Jingtao, WEI Jun

(School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

**Abstract:** The experimental results reveal that the deformation of sandy soil has the characteristics as follows: nonlinear elastoplastic deformation, shear dilation and relativity of stress path. It is deemed that the sliding of grains in sand will contribute to these deformation characteristics. The contact among grains can be classified as perfect contact and sliding contact. When the shear stress reaches to the shear strength on the interfaces of grains, the contact will be transformed from perfect contact to sliding contact. The conversion of the contact among grains is regarded as damage in the sand skeleton. Two direction-region values of the sliding interfaces can be calculated: the one expressed as  $\theta_s$  is used to describe the direction region in the damage phase and the other one expressed as  $\theta_f$  is used to describe the direction region when the sand skeleton is subjected to failure. The ratio of  $\theta_s$  to  $\theta_f$  is defined as damage ratio and a damage constitutive model is proposed. The model properties can be determined through conventional triaxial compression test and constant stress ratio consolidation test. The model is capable of predicting deformation behaviors for various conditions, including varying hydrostatic stresses, consolidation conditions and stress paths. The achieved test results on the versatility of the proposed model indicate that the proposed model can rationally describe the deformation characteristics of sand.

**Key words:** soil mechanics; sandy soil; perfect contact; sliding contact; damage; constitutive model

**收稿日期:** 2006 - 09 - 25; **修回日期:** 2007 - 02 - 05

**作者简介:** 徐 辉(1968 -), 男, 博士, 1989年毕业于华中理工大学力学系工程力学专业, 现任副教授, 主要从事岩土工程方面的教学与研究工作。  
E-mail: xuhui1968@163.com

# 1 引言

从材料的细观结构出发，损伤力学可对不同的细观损伤机制加以区分，并通过对细观结构变化的物理力学过程研究来了解材料的变形与破坏。不同的材料其损伤机制是不同的，对于金属材料，比较典型的有微孔洞、微裂纹、微滑移带、银纹和晶界滑移等。与金属材料相比，岩土材料的损伤有更广的引发因素，例如对于一般原状土，损伤主要表现为颗粒间移动造成粒间联结与原组织的破坏。对于冻土，损伤主要表现为由温度、压力引起的融解。对于湿陷性黄土，损伤则主要是由土中含水量增加引起。另外，对于反复加载引起的疲劳、长期加载下的蠕变、腐蚀和老化，其损伤则主要是时间的函数。

在建立岩土损伤模型时，最常用的方法是将原状土在初始状态作为一种初始无损材料，而将完全破坏的土体作为损伤后的材料，在加载变形过程中土体可认为是原状土与损伤土这 2 种材料的复合体。把损伤土部分所占的比例  $\omega$  称为损伤比，则土体力学特性可表示为二者的加权平均值<sup>[1]</sup>，即

$$S = (1 - \omega)S_i + \omega S_d \quad (1)$$

式中： $S$  为土的某一种力学指标； $S_i$ ， $S_d$  分别为原状土及损伤土的同一种力学指标。

损伤比  $\omega$  可以是面积比、体积比、质量比或者其他物理量之比。不同的损伤模型区别主要在于损伤的定义、损伤比的计算和损伤演化规律的不同。如 C. S. Desai 和 J. Toth<sup>[2]</sup> 提出了一个包含应力 - 应变历史、初始密度、初始压力、颗粒接触面性质、温度以及时间等多种因素的扰动因子，用以描述岩土材料的损伤。沈珠江<sup>[3]</sup> 对于结构性黏土提出一个弹塑性损伤模型，认为未被扰动的土为原状土，结构性完全丧失的土为损伤土或重塑土。原状黏性土的受力损伤变形可以看作是原状土向重塑土的演变过程，损伤变量设为体应变和剪应变的指数函数。徐辉等<sup>[4, 5]</sup> 将滑动联结视为夹杂，运用细观力学的方法，分别给出了一种描述砂土和黏性土剪切变形行为的细观本构模型。另外，在岩石和动态损伤方面，曹文贵等<sup>[6, 7]</sup>、罗晓辉和白世伟<sup>[8]</sup> 以及徐卫亚和韦立德<sup>[9]</sup> 假设微元强度服从 Weibull 分布，分别建立了岩石和土等材料的弹脆性损伤模型。单仁亮等<sup>[10]</sup> 基于岩石的动态破坏过程分析，给出了一种时效损伤本构模型。张明等<sup>[11]</sup> 利用声发射累积数与材料内部

损伤之间存在的一致对应关系，建立了一种准脆性材料声发射的损伤模型。

本文将砂土颗粒之间的摩擦联结分为 2 种情况：完善联结和滑动联结。所谓完善联结是指当作用在颗粒接触面上的滑动力小于最大摩擦力时，接触面可以传递正压力和剪力；所谓滑动联结是指当作用在颗粒接触面上的滑动力大于最大摩擦力时，颗粒之间出现滑动，接触面可以传递正压力和很小的剪力。在荷载作用下，土体的变形来自两方面：颗粒本身的变形和颗粒接触面的变形。在工程荷载的范围内，颗粒本身的变形可以忽略，颗粒可近似地看作刚体。因此，土体的变形就是颗粒接触面的变形总和。在本文的研究中，将不同初始取向的颗粒接触面由完善联结逐渐变成滑动联结的过程视为损伤演变的过程，通过对应力圆相对位置分析，给出一种损伤比的计算方法，进而得出一种描述砂土变形规律的损伤本构模型。

# 2 损伤的定义

在常规三轴试验中，砂土的应力 - 应变曲线存在一个初始直线段，该直线段即为初始弹性变形阶段，颗粒间的联结方式为完善联结；随剪应力的增加，部分取向的颗粒接触面开始出现滑动，对应的应力 - 应变关系表现为非线性。定义初始直线段的末端为损伤的起点，根据常规三轴试验的结果，不同围压下，出现初始滑动的轴压是不同的。设颗粒间的滑动遵循 Mohr-Coulomb 准则，则可得到一条颗粒起始滑动的包络线。同样，设骨架的整体破坏也遵循 Mohr-Coulomb 准则，也能得到一条破坏包络线，如图 1 所示。骨架未损时，应力圆与起始滑动包络线相离；骨架损伤时，应力圆与起始滑动

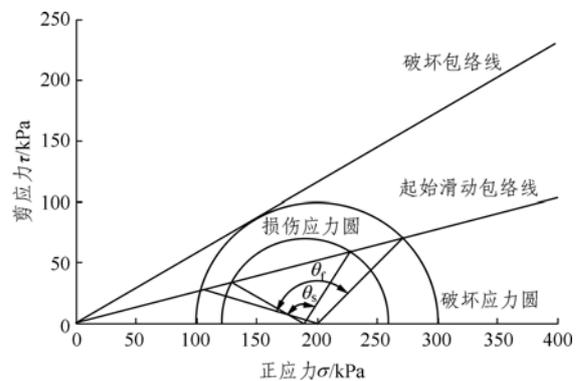


图 1 损伤比定义示意图

Fig.1 Schematic diagram of definition of damage ratio

包络线相割, 但与破坏包络线相离; 骨架破坏时, 应力圆与破坏包络线相切。

设破坏应力圆与起始滑动线相割时所张的圆心角为  $\theta_f$ ,  $\theta_f$  的含义可以理解为骨架破坏时, 取向为与最小主应力  $\sigma_3$  方向呈  $\theta_f/2 \sim \theta_s/2$  范围内的颗粒接触面出现了滑动, 如图 2 所示。如果两条包络线均为直线(在围压变动范围不是很大的情况下是这样的), 对于同一种砂土,  $\theta_f$  仅与起始滑动包络线和破坏包络线的斜率有关, 与应力路径无关。设骨架损伤过程中的应力圆与起始滑动线相割所张的圆心角为  $\theta_s$ ,  $\theta_s$  的含义类似于  $\theta_f$ 。

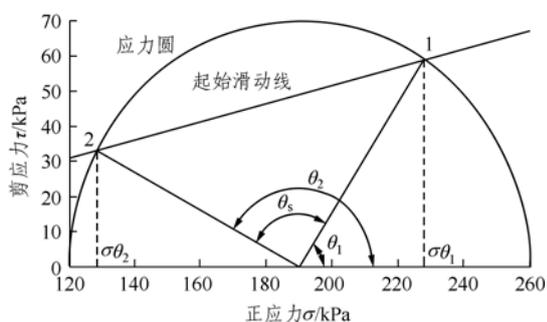


图 2  $\theta_f$ ,  $\theta_s$  计算示意图

Fig.2 Schematic diagram of calculation of  $\theta_f$  or  $\theta_s$

损伤比  $\omega$  定义为

$$\omega = \theta_s / \theta_f \quad (2)$$

由式(2)可知, 骨架无损时, 应力圆与起始滑动包络线相离, 即  $\theta_s = 0$ , 损伤比  $\omega = 0$ ; 当骨架破坏时, 则有  $\theta_s = \theta_f$ , 损伤比  $\omega = 1$ ; 在损伤过程中, 有  $0 < \omega < 1$ 。这样,  $\omega$  可以理解为骨架已损失的强度占总强度的百分比,  $1 - \omega$  可以理解为损伤骨架的剩余强度占总强度的百分比。

### 3 $\theta_f$ 和 $\theta_s$ 的计算

设砂土破坏时的内摩擦角为  $\varphi_f$ , 类似地也可以定义起始滑动时的内摩擦角为  $\varphi_s$ 。如图 2 所示, 损伤过程中的应力圆与起始滑动包络线相割得到 2 个交点 1 和 2, 2 个交点与圆心所张的圆心角  $\theta_s$ , 等于两交点的方位角之差, 即

$$\theta_s = \theta_2 - \theta_1 \quad (3)$$

设应力圆的圆心横坐标为  $a = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$ , 半径为  $r = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2$ , 滑动内摩擦因数为  $f_s = \tan \varphi_s$ ,

则两交点的横坐标可表达为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta_1} &= \frac{a + \sqrt{a^2 - (1 + f_s^2)(a^2 - r^2)}}{1 + f_s^2} \\ \sigma_{\theta_2} &= \frac{a - \sqrt{a^2 - (1 + f_s^2)(a^2 - r^2)}}{1 + f_s^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

两交点的方位角分别为

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \arccos \frac{\sigma_{\theta_1} - a}{r} \\ \theta_2 &= \arccos \frac{\sigma_{\theta_2} - a}{r} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由式(3)可得  $\theta_s$  的表达式, 即

$$\theta_s = \arccos \frac{\sigma_{\theta_2} - a}{r} - \arccos \frac{\sigma_{\theta_1} - a}{r} \quad (6)$$

当应力圆与破坏包络线相切时, 即  $\theta_s = \theta_f$ , 此时, 因  $r = a \sin \varphi_f$ ,  $\theta_f$  可表示为

$$\theta_f = \arccos \frac{\sqrt{1 - (1 + f_s^2) \cos^2 \varphi_f} + f_s^2}{(1 + f_s^2) \sin \varphi_f} - \arccos \frac{\sqrt{1 - (1 + f_s^2) \cos^2 \varphi_f} - f_s^2}{(1 + f_s^2) \sin \varphi_f} \quad (7)$$

由式(7)可知, 砂土破坏时, 滑动颗粒的取向范围  $\theta_f$  仅与破坏包络线和起始滑动包络线的斜率有关, 与应力路径无关。

### 4 损伤本构模型

定义平均应力  $p$ 、广义剪应力  $q$ 、体积应变  $\varepsilon_v$ 、等效剪应变  $\varepsilon_s$ 、应力比  $\eta$  分别为

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad (8)$$

$$q = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / \sqrt{2} \quad (9)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (10)$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (11)$$

$$\eta = q / p \quad (12)$$

根据式(1), 砂土的剪切模量可表示为

$$G = (1 - \omega)G_0 + \omega G_s \quad (13)$$

式中:  $G_0$  为完善联结的剪切模量, 与围压相关;  $G_s$  为滑动联结的剪切模量, 由试验拟合得到。则砂土的损伤本构模型可以写成如下的增量形式:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_s &= \frac{dq}{3G} \\ d\varepsilon_v &= \frac{dp}{K_0} + d\varepsilon_v^p \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中： $K_0$ 为完善联结的体积模量，与围压相关； $d\varepsilon_v^p$ 为塑性体积应变增量。Y. P. Yao等<sup>[12]</sup>已证明适用于正常固结黏土的修正剑桥模型的剪胀方程同样适用于砂土，本文引用该方程：

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= \frac{(M^2 - \eta^2)}{2\eta} d\varepsilon_s^p \\ d\varepsilon_s^p &= d\varepsilon_s - \frac{dq}{3G_0} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中： $M$ 为剪胀参数。

加、卸载准则：凡使损伤比 $\omega$ 大于或等于其历史上最大值的应力增量即为加载；凡使损伤比 $\omega$ 小于历史上最大值的应力增量即为卸载。

卸载时骨架中无颗粒滑动，颗粒之间全部为完善联结，卸载变形为弹性变形，卸载模量取完善联结的模量，即 $K_0$ 和 $G_0$ (单位均为kPa)，并可以表示为

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= 321.554 \cdot 3p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{0.6112} \\ G_0 &= 102.421 \cdot 3p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{0.6369} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中，

$$p_a = 100 \text{ kPa}$$

## 5 模型验证

本模型中的参数有：完善联结的模量 $K_0$ 和 $G_0$ ，滑动联结剪切模量 $G_s$ ，初始滑动内摩擦角 $\varphi_s$ ，整体破坏内摩擦角 $\varphi_f$ ，剪胀参数 $M$ 。

$K_0$ ， $G_0$ ， $G_s$ 和 $\varphi_s$ 根据常规三轴试验(CTC)确定，CTC试验中围压分别为100，300，500 kPa； $M$ 根据等应力比三轴固结试验确定；应力比取 $\eta = 0.8$ ，见图3。为验证本模型，选取了2组不同的应力路径试验作为比较，第1组为路径AC(CTC)和路径AB(PS)；第2组为路径OAC(等压固结+CTC)和ODE(等应力比固结+CTC)。

试验土样采用中密砂，模型参数见表1。模型预测与实测对比见图4~6。

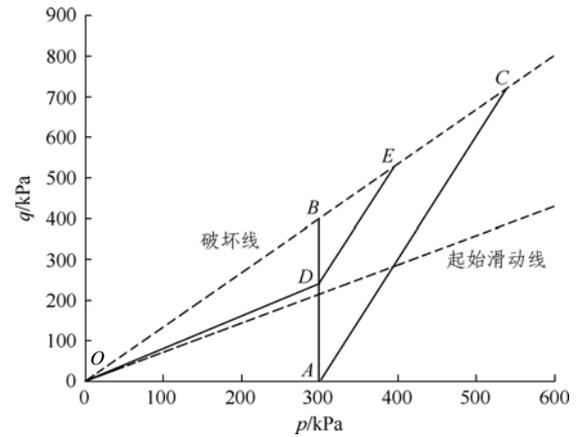


图3 试验应力路径

Fig.3 Stress paths of experiments

表1 模型参数表  
Table 1 Model parameters

$G_s$ /kPa	$\varphi_s / (^\circ)$	$\varphi_f / (^\circ)$	$M$
400	18.7	33.2	0.95

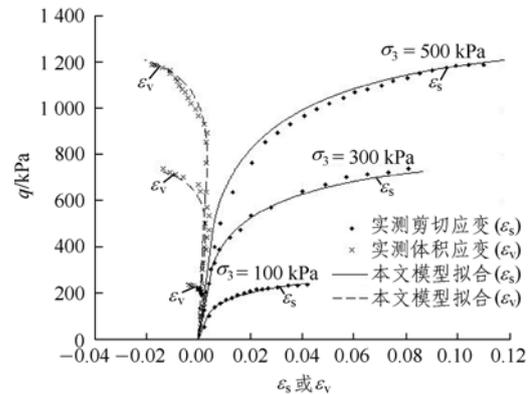


图4 常规三轴试验结果与模型预测比较

Fig.4 Comparison between predicted and test results under conventional triaxial compression test condition

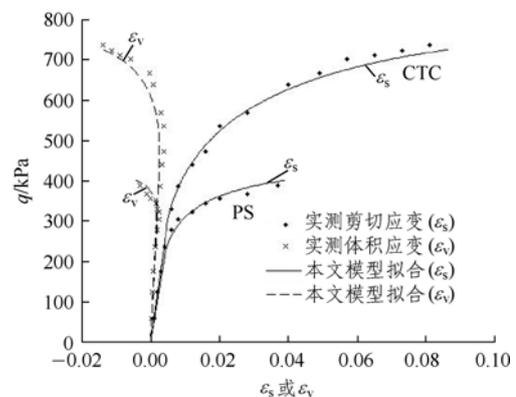


图5 路径AC(CTC)和AB(PS)的试验结果与模型预测比较

Fig.5 Comparison between predicted and test results under stress path AC(CTC) and AB(PS) conditions

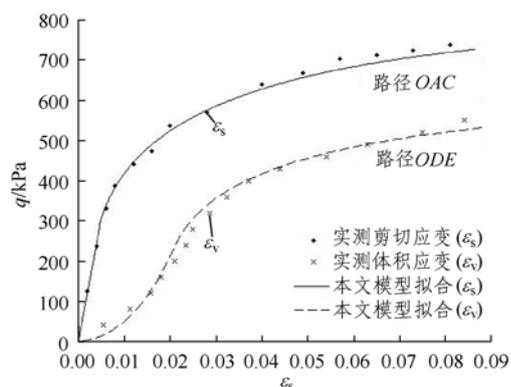


图 6 路径 OAC 和 ODE 的试验结果与模型预测比较  
Fig.6 Comparison between predicted and test results under stress path OAC and ODE conditions

## 6 结 论

(1) 本文引入了 2 个取向范围的概念, 即已滑动的颗粒接触面取向范围和骨架整体破坏时的颗粒接触面取向范围, 采用这两者的比值描述骨架的损伤程度在物理意义上是合理的, 在数学意义上是可行的; 该损伤比的计算是基于 Mohr-Coulomb 准则, 概念清晰, 简单直观。

(2) 从式(14)可知, 砂土变形的非线性来自于 2 个方面, 一方面是围压的变化引起  $K_0$  和  $G_0$  的改变; 另一方面是颗粒滑动引起整体剪切模量的下降, 在通常情况下, 后者是主要因素。

(3) 本文所提出的模型能合理反映复杂条件下的应力 - 应变关系, 包括不同的固结方式和应力路径, 并且模型参数不复杂, 具有较好的实用性和准确性。

### 参考文献(References):

[1] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 95 - 112.(LI Guangxin. Advanced soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 95 - 112.(in Chinese))

[2] DESAI C S, TOTH J. Disturbed state constitutive modeling based on stress-strain and nondestructive behavior[J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33(11): 1 619 - 1 650.

[3] 沈珠江. 结构性黏土的弹塑性损伤模型[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(3): 21 - 28.(SHEN Zhujiang. An elastoplastic damage model for cemented clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 15(3): 21 - 28.(in Chinese))

[4] 徐 辉, 王靖涛, 张光永. 基于细观力学分析的砂土弹塑性本构

模型[J]. 固体力学学报, 2006, 27(3): 249 - 255.(XU Hui, WANG Jingtao, ZHANG Guangyong. An elastoplastic constitutive model for sand based on micromechanics method[J]. Acta Mechanica Sinica, 2006, 27(3): 249 - 255.(in Chinese)).

[5] 徐 辉, 王靖涛, 卫 军. 饱和黏性土固结不排水剪切行为的细观力学分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(增 2): 4 083 - 4 088.(XU Hui, WANG Jingtao, WEI Jun. Micromechanical analysis of saturated clay shear behavior in consolidated undrained condition[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(Supp.2): 4 083 - 4 088.(in Chinese))

[6] 曹文贵, 方祖烈, 唐学军. 岩石损伤软化统计本构模型之研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 628 - 633.(CAO Wengui, FANG Zulie, TANG Xuejun. A study on statistical constitutive model for soft and damage rocks[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998, 17(6): 628 - 633.(in Chinese))

[7] 曹文贵, 赵明华, 刘成学. 基于 Weibull 分布的岩石损伤软化模型及其修正方法的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3 226 - 3 231.(CAO Wengui, ZHAO Minghua, LIU Chengxue. Study on model and its modifying method for rock softening and damage based on Weibull random distribution[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(19): 3 226 - 3 231.(in Chinese))

[8] 罗晓辉, 白世伟. 结构性土体强度的统计损伤模型分析[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(5): 712 - 714.(LUO Xiaohui, BAI Shiwei. Model analysis of statistical damage of strength of cemented soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(5): 712 - 714.(in Chinese))

[9] 徐卫亚, 韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787 - 791.(XU Weiya, WEI Lide. Study on statistical damage constitutive model for rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(6): 787 - 791.(in Chinese))

[10] 单仁亮, 薛友松, 张 倩. 岩石动态破坏的时效损伤本构模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(11): 1 771 - 1 776.(SHAN Renliang, XUE Yousong, ZHANG Qian. Time-dependent damage model of rock under dynamic loading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(11): 1 771 - 1 776.(in Chinese))

[11] 张 明, 李仲奎, 杨 强, 等. 准脆性材料声发射的损伤模型及统计分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(12): 2 493 - 2 501.(ZHANG Ming, LI Zhongkui, YANG Qiang, et al. A damage model and statistical analysis of acoustic emission for quasi-brittle materials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(12): 2 493 - 2 501.(in Chinese))

[12] YAO Y P, LUO T, SUN D A. A simple 3D constitutive model for both clay and sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(2): 240 - 246.