

文章编号: 1002-0446(2005)02-0163-05

一种运动旋量逆解子问题的求解及其应用*

赵杰, 刘玉斌, 蔡鹤皋

(哈尔滨工业大学机器人研究所, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 旋量理论在机器人运动学逆解过程中将运动方程分解为若干子问题, 目前常见的子问题组合并不能完成所有机器人的逆解问题. 本文提出了在机器人逆解过程中会遇到的另一种子问题的解法, 并给出构造该子问题的限定条件. 运用该解法, 给出具有 RTS 运动链并联机器人的运动学逆解方法, 并归纳出利用未知量组中对参考点起相同作用的旋量组合来简化计算的方法. 该子问题的解决扩充、便利了旋量理论在机器人运动学逆解中的应用.

关键词: 运动旋量; 指数积方法; 逆运动学

中图分类号: TP242 文献标识码: B

Solution for One Type of Inverse Kinematics Sub-problem in Screw Theory and Its Application

ZHAO Jie, LIU Yu-bin, CAI He-gao

(Robot Research Institute, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: In order to solve the robot inverse kinematics in screw theory, the motion equation is usually divided into several sub-problems. At present, the combination of ordinary sub-problem can't achieve the inverse kinematics of all type of robots. A new type of sub-problem is proposed in this paper, and its solution and constraint conditions are given. In addition, its application in parallel robots with RTS chain is demonstrated to verify its feasibility. Finally, a method using the combination of the motion screws with the same effect on the reference point is obtained to simplify robot inverse kinematics.

Keywords: motion screw; exponential product method; inverse kinematics

1 引言 (Introduction)

近年来, 在机器人的运动学分析中, 出现一种将旋量与指数积相结合的方法, 该方法在机器人运动学、动力学和控制等领域得到广泛的应用, 取得较好的效果^[1]. 这种方法将平动和转动统一考虑, 可以在绝对坐标系下描述系统的运动, 从而使机构分析更加直观, 而指数积方法的应用使得运动旋量的计算更加方便.

旋量方法在机器人的逆运动学求解过程中, 设法将整个运动学逆问题分解成若干个已知的子问题, 这些子问题具有明确的几何意义和数值稳定性. 不同结构形式的机器人对应不同形式的运动方程, 因而可能需要利用各种各样的子问题. 我们经常用到的子问题包括:

(1) 一点绕某轴旋转至给定点;

(2) 一点绕两个相交的转动轴旋转两次至给定点;

(3) 绕一轴线旋转至给定距离等.

以上子问题在运动学逆解中应用的频率比较高, 但仅利用这些子问题并不能完成所有机器人的逆解问题. 在大多数情况下, 还必须利用其它类型的子问题完成逆解问题. 本文求解的子问题为: 绕两个相交但不重合轴线旋转至给定距离. 给出这种子问题解法的推导过程, 推导结果可以直接用到包含该类子问题的机器人逆解当中. 最后利用该问题的解法, 求出一种具有 RTS 运动支链的并联机器人的运动学逆解, 并通过分析, 归纳出利用旋量理论解决逆运动学问题的一种简化算法. 该方法的特点是: 具有明确的几何意义, 为运动旋量逆解子问题的选择提供一种新的方法. 文中的计算实例为运动旋量求

解逆解提供一种一般的模式.

2 子问题的描述 (Description of sub-problem)

在旋量逆运动学子问题中,有几类问题已经得到解决,图 1 给出了这 3 类问题的结构形式.图中 (a)、(b)、(c) 分别对应于前面提到的 (1)、(2)、(3) 类子问题.

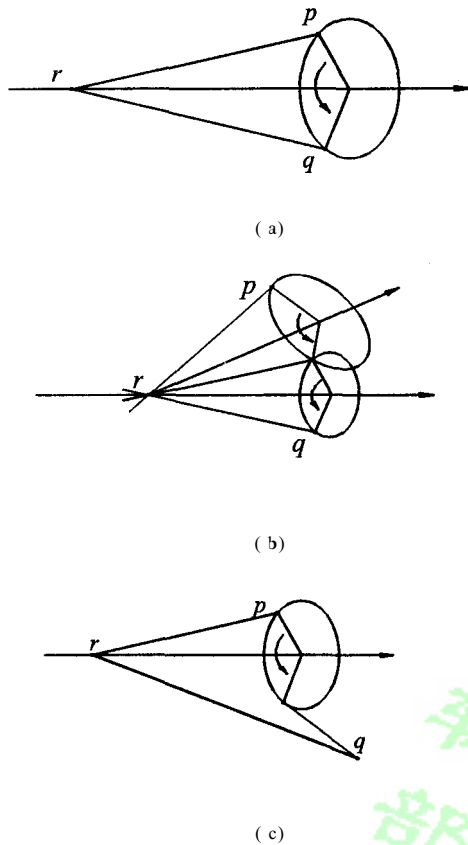


图 1 常见的 3 类子问题
Fig. 1 Three ordinary sub-problems

本文中要解决的子问题是:绕两个相交但不重合轴线旋转至给定距离,如图 2 所示,设 ξ_1, ξ_2 是两个相交的零节距单位运动螺旋; p, q_1 和 q_2 为 \mathcal{R}^3 中的点,求同时满足:

$$\| e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} p - q_1 \| = \delta_1$$

$$\| e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} p - q_2 \| = \delta_2$$

的 θ_1 和 θ_2 ,即点 p 绕 ξ_1, ξ_2 两个转动轴分别旋转 θ_1 和 θ_2 后,与 q_1 和 q_2 的距离分别为 δ_1 和 δ_2 .

由图 2 可知,如存在一点 q 满足以上条件,则点 q 实际上是球心分别位于 q_1, q_2, r , 半径分别为 $\delta_1, \delta_2, \|p - r\|$ 的 3 个球面的交点, q 点绕 ξ_1, ξ_2 两个转动

轴分别旋转 $-\theta_1$ 和 $-\theta_2$ 后到达点 p . 由此,可以先求解 3 个相交球面交点,求得 3 个球面的交点 q 后,问题转变为一点绕两个相交的转动轴旋转两次至给定点子问题,该问题是前面所提到的子问题 (2),这个子问题在参考文献 [1] 中已经给出处理方法.

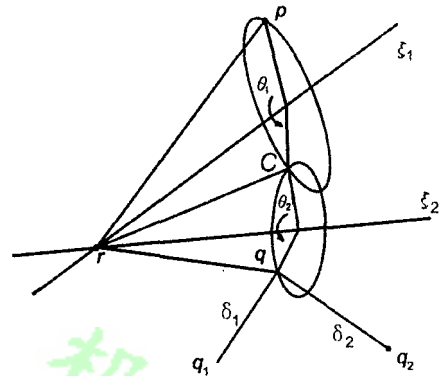


图 2 子问题描述
Fig. 2 Sub-problem description

3 子问题的求解与分析 (Solution and analysis of sub-problem)

3.1 子问题的求解

首先考虑一般情况,即 3 个球面两两相交,如图 3 所示.在 3 个球心构成的三角形平面中,构造两个单位向量:

$$\omega_1 = \frac{q_1 - r}{\|q_1 - r\|}$$

$$\omega_2 = \frac{q_2 - r}{\|q_2 - r\|}$$

令 $z = p - r$, 因 $\omega_1, \omega_2, \omega_1 \times \omega_2$ 这 3 个向量线性无关,故 z 可以表示以上 3 个向量的线性组合:

$$z = p - r = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 + \gamma (\omega_1 \times \omega_2) \quad (1)$$

其中 α, β, γ 为未知量.

对向量 z 两边取范数:

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \|p - r\|^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\omega_1^T\omega_2 + \gamma^2 \|\omega_1 \times \omega_2\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

由图 3 可知,利用相交球面的几何关系可以求得 t_1 及 t_2 , 向量 z 在 ω_1, ω_2 上的投影满足以下关系:

$$\omega_1^T z = t_1 \quad \omega_2^T z = t_2 \quad (3)$$

将 (1) 式代入 (3) 可得:

$$\begin{aligned} t_1 &= \alpha + \beta \omega_1^T \omega_2 \\ t_2 &= \beta + \alpha \omega_2^T \omega_1 \end{aligned} \quad (4)$$

由 (4) 式可以解得:

$$\alpha = \frac{t_1 - \omega_1^T \omega_2 t_2}{1 - (\omega_1^T \omega_2)^2}$$

$$\beta = \frac{t_2 - \omega_2^T \omega_1 t_1}{1 - (\omega_1^T \omega_2)^2}$$

将 α, β 代入式 (2), 整理解得:

$$r^2 = \frac{\|z\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta\omega_1^T\omega_2}{\|\omega_1 \times \omega_2\|^2}$$

其中以 r 为球心的球面半径为:

$$r_s^2 = \|q - r\|^2 = \|z\|^2$$

根据实际情况的不同, r 可能有 2 组、1 组或者没有解。至此, α, β, r 全部解得, 将其代入 (1) 式, 可求得向量 z 及点 p 。得到点 q 后, 可利用文献 [1] 中的绕两个相交的转动轴旋转两次至给定点的子问题 2, 来求解相应的转角 θ_1 和 θ_2 。在子问题 2 中, 欲求解方程可表示为:

$$e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} p = q$$

在此方程中最多可能存在两组解 $(\theta_{11}, \theta_{21})$ 和 $(\theta_{12}, \theta_{22})$ 同时满足:

$$e^{\xi_1 \theta_{11}} e^{\xi_2 \theta_{21}} p = q$$

$$e^{\xi_1 \theta_{12}} e^{\xi_2 \theta_{22}} p = q$$

若 3 个球面其中两个相切, 而第 3 个与前两个球面相交, 则前两个球面的切点即为所求的点 q 。若 3 个球面中有两个不相交, 即无法求得点 q , 则该问题无解。

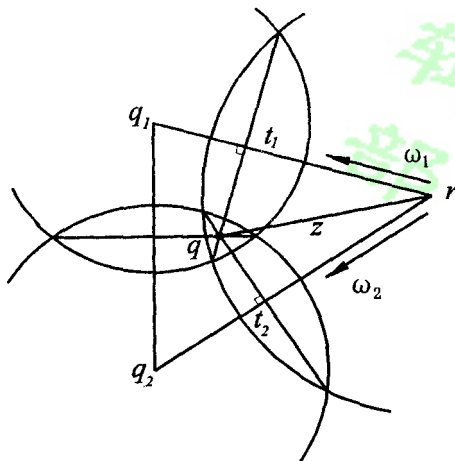


图 3 空间 3 球面交点

Fig. 3 Junction of three spatial sphere surfaces

结合绕两个相交的转动轴旋转两次至给定点子问题的解法, 以及本文中的解法, 可以确定, 最终的解 θ_1 和 θ_2 可能是 4 组、2 组、1 组或无解 4 种情况。

在解决以下形式的方程式时将会用到本文提出的子问题解法:

$$e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p = q$$

其中, 轴 ξ_2, ξ_3 相交于一点, 但轴 ξ_1 不与以上两轴相交。在这种情况下, 可以在 ξ_1 上找到这样两点满足下式:

$$e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_1 = e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_1) = q - q_1$$

$$e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_2 = e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_2) = q - q_2$$

对上式两边取范数, 即可得到本文所描述的子问题表达式:

$$\|e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_1)\|$$

$$= \|e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_1\| = \|q - q_1\|$$

$$\|e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_2)\|$$

$$= \|e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p - q_2\| = \|q - q_2\|$$

3.2 关于该子问题的分析

在所有的子问题求解过程中, 参考点的选取是构造性的, 即人为地选取某些在惯性坐标系中已知的点, 这些参考点在矩阵的指数映射或映射的组合作用下, 构造出某一类子问题。因此参考点的选取是使子问题构造成功的关键, 这一点可以在下一节的实例中体现出来。

假设在本文所述子问题中, 参考点 q_1 和 q_2 选取后, 3 个球心在一条直线上, 则必有 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 相交于一点。式 $e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} p = q$ 则可以拆分成子问题 1 和子问题 2 来解决。如果仍然引用本文的子问题解法, 当 3 个球心在一条直线上时, 3 个球面的交点可能分布在同一个圆上, 则在图 2 中将会有无穷多个解 q 。3 转动轴相交, 造成对交点 q 的约束不足, 使方程组数量小于未知数数量, 由此造成多解。因此, 在构造本类子问题时, 应避免 3 转动轴交于同一点这种情况。

4 6-RTS 并联机器人运动学逆解 (Inverse kinematics of 6-RTS parallel robot)

该运动链具有如图 4 所示的结构形式, 每个支链以固定平台上的转动关节作为机器人的驱动关节, 每个支链两杆间的万向铰为被动关节, 而末端的球铰, 用等效的 3 个转动副代替, 该关节也为被动关节。

利用运动旋量的几何特性, 将旋量 $\xi_1 \sim \xi_6$ 定义在运动链的 6 个转动关节上, 并且 $\xi_1 \sim \xi_6$ 都是零节距旋量。该运动链的运动方程可以表示为:

$$g_{st}(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} \dots e^{\xi_6 \theta_6} g_{st}(0) = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = g_d \quad (5)$$

其中 $g_{st}(\theta)$ 表示物体坐标系相对于惯性坐标系的位姿, 在此用 g_d 来表示物体坐标系的期望位姿. 其中 ξ

$$= \begin{bmatrix} \hat{\omega} & -\omega \times q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \omega \text{ 为与旋量 } \xi \text{ 的转动轴同向的单位}$$

向量, q 为在惯性坐标系中表示的一点, 且该点在转动轴 ξ 上. 若将 ω 定义为 $\omega = [x, y, z]^T$, 则将 $\hat{\omega}$ 定义为一个反对称矩阵:

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

则矩阵指数 $e^{\xi \theta}$ 既可表示确定刚体的位形, 又可以用于一点在不同坐标系之间的变化, 这一点在文献 [1] 中给予了证明.

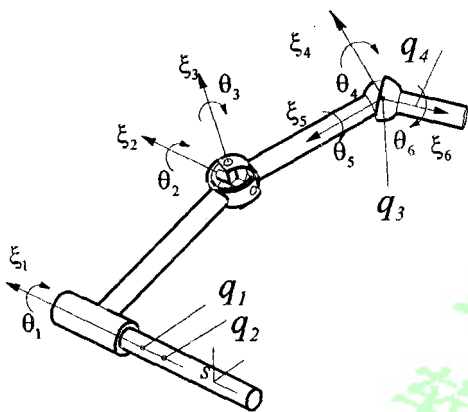


图 4 RTS运动链及运动旋量定义

Fig. 4 RTS motion chain and its motion screw definition

将 (5) 式两端右乘 $g_{st}^{-1}(0)$ 得指数映射:

$$e^{\xi_1 \theta_1} \dots e^{\xi_6 \theta_6} = g_d g_{st}^{-1}(0) = g_i \quad (6)$$

以下分步求解为达到期望位姿所要求的关节角:

第一步: (求关节角 θ_2 和 θ_3) 将 (6) 式两端作用于 ξ_4, ξ_5, ξ_6 轴线交点 q_3 , 则有:

$$e^{\xi_4 \theta_4} e^{\xi_5 \theta_5} e^{\xi_6 \theta_6} q_3 = q_3$$

故

$$e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 = g_i q_3 \quad (7)$$

从式 (7) 两端分别减去 ξ_1 轴上的 q_1 与 q_2 得:

$$e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_1 = e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_1) = g_i q_3 - q_1 \quad (8)$$

$$e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_2 = e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_2) = g_i q_3 - q_2 \quad (9)$$

对式 (8)、(9) 两端分别取范数, 因为刚体运动保持范数不变, 故有:

$$\| e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_1) \| = \| e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_1 \| = \| g_i q_3 - q_1 \| \quad (10)$$

$$\| e^{\xi_1 \theta_1} (e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_2) \| = \| e^{\xi_2 \theta_2} e^{\xi_3 \theta_3} q_3 - q_2 \| = \| g_i q_3 - q_2 \| \quad (11)$$

由以上两式可知, 式 (10)、(11) 即为本文所描述的绕两轴线旋转至给定距离子问题, 利用前面的求解方法, 可求得 θ_2 和 θ_3 .

第二步: (求关节角 θ_1) 由于 θ_2 和 θ_3 已经求得, 式 (7) 中唯一未知数为 θ_1 , 由其形式可知, 该问题属于一点绕某轴旋转至给定点, 利用该子问题的解法即可求得 θ_1 . 至此, 已经求得该运动链的输入关节的运动位置.

第三步: (求关节角 θ_4 和 θ_5) 对运动方程进行整理, 对两边同时左乘 θ_1, θ_2 和 θ_3 对应的指数积, 则运动方程可以改写为:

$$e^{\xi_4 \theta_4} e^{\xi_5 \theta_5} e^{\xi_6 \theta_6} = e^{-\xi_3 \theta_3} e^{-\xi_2 \theta_2} e^{\xi_1 \theta_1} g_d g_{st}^{-1}(0) = g_2 \quad (12)$$

将式 (12) 作用在 ξ_4 轴上但在 ξ_5 和 ξ_6 上的一点 q_4 :

$$e^{\xi_4 \theta_4} e^{\xi_5 \theta_5} p_4 = g_2 p_4$$

该形式符合本文前面提到的第二类子问题: 一点绕两个相交的转动轴旋转两次至给定点子问题, 利用该问题的解法, 即可求得 θ_4 及 θ_5 .

第四步: (求关节角 θ_6) 剩下未求出的仅为 θ_6 , 将运动方程重新整理, 并将其两边作用于动坐标系上一点 q_5 (该点在动坐标系中是一个固定的点, 但在惯性坐标系中描述), 该点恒不在转动轴 ξ_6 上 (可以定义这样一个点), 这样定义, 是为了避免在惯性坐标系中定义的点因为轴 ξ_6 的运动而使得该点位于轴 ξ_6 上.

$$e^{\xi_6 \theta_6} q_5 = e^{-\xi_5 \theta_5} e^{-\xi_4 \theta_4} e^{-\xi_3 \theta_3} e^{-\xi_2 \theta_2} e^{-\xi_1 \theta_1} g_d g_{st}^{-1}(0) q_5$$

该问题属于第一类子问题: 一点绕某轴旋转至给定点子问题, 利用该问题的解法, 即可求得 θ_6 .

在此需要说明一点, 在以上机器人运动学逆解求解过程中, 所利用的参考点 $q_1 \sim q_5$ 均为在惯性坐标系中描述的点.

在并联机器人逆运动学分析中, 有些情况下只需要输入关节解的情况, 在本例的第一步求解 θ_2 和

θ_3 过程中,假定 3 球面有两个不同交点 p 与 p' ,并且对应着两个交点的子问题 2 分别有两组不同的解. 令与 p 对应的解为 $[\theta_{21}^p, \theta_{31}^p]$ 和 $[\theta_{22}^p, \theta_{32}^p]$, 与 p' 对应的为 $[\theta_{21}^{p'}, \theta_{31}^{p'}]$ 和 $[\theta_{22}^{p'}, \theta_{32}^{p'}]$, 可以发现第一组和第二组解对点的作用相同, 因为

$$e^{\hat{\xi}_{20}^p \theta_{21}^p} e^{\hat{\xi}_{30}^p \theta_{31}^p} q_3 = p$$

$$e^{\hat{\xi}_{20}^p \theta_{22}^p} e^{\hat{\xi}_{30}^p \theta_{32}^p} q_3 = p$$

对应 p' 的两组解也有相同的结果, 因此 (7) 式可以改写为:

$$e^{\hat{\xi}_{10} \theta_1} p = g_1 q_3$$

$$e^{\hat{\xi}_{10} \theta_1} p' = g_1 q_3$$

因 p 与 p' 不同, 所以输入关节角 θ_1 最多能有 2 组解.

逆运动学中子问题的划分的同时, 也将未知量进行了分组. 通过寻求未知量组中对参考点起相同作用的旋量组合, 可以简化计算过程, 使解的数量的分析变得清晰, 省略不必要的计算.

5 结论 (Conclusion)

(1) 给出了旋量理论中绕两轴线旋转至给定距离这一子问题的求解方法, 该方法具有明确的几何意义, 计算简单, 为具有类似子问题的运动链求解提供一个新的方法.

(2) 将机器人运动学逆解问题划分成若干子问题去解决, 使得问题变得简单有序, 有利于计算机控制机器人运动程序的通用性和模块化.

(3) 参考点的选择在子问题的划分与求解中是关键的一步, 必须按照相应子问题的规则去选取.

(4) 结合子问题的运用, 通过寻求未知量组中对参考点起相同作用的旋量组合, 可以简化计算过程, 略去不必要的计算, 使逆解求解更快、更直接, 有利于机器人控制的实时性.

参考文献 (References)

- [1] 理查德摩雷, 李泽湘, 夏思卡萨思特里, 等. 机器人操作的数学导论 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.
- [2] 常宗瑜, 杨威启, 谭俊哲. 指数积方法在空间机构运动分析中的应用 [J]. 机械设计, 2002, 19(7): 26 - 29.
- [3] Stramigioli S, Bruyninckx H. Geometry of dynamic and higher-order kinematic screws [A]. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation Seoul [C]. Korea: 2001. 3344 - 3349.
- [4] 熊有伦, 尹周平, 熊蔡华, 等. 机器人操作 [M]. 湖北: 湖北科学技术出版社, 2002.

作者简介:

赵杰 (1968-), 男, 博士后. 研究领域: 机器人控制技术, 多传感器集成技术.

刘玉斌 (1976-), 男, 博士生. 研究领域: 并联机器人技术.

编辑部