

## 基于校正子的第一类混合 ARQ 及其性能分析

张立军<sup>①</sup> 曹志刚<sup>②</sup> 李安国<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(北京交通大学电子信息工程学院 北京 100044)

<sup>②</sup>(清华大学电子工程系 北京 100084)

<sup>③</sup>(香港大学电机电子工程学系 香港)

**摘要** 基于校正子的计算提出了一种第一类混合 ARQ (HARQ) 方案, 该 HARQ 采用 Reed-Solomon (RS) 码作为纠错子系统, 将检错功能巧妙融于译码过程中。对系统误比特率和吞吐量的分析与仿真表明, 短码宜采用前向校正子结构, 长码宜采用后向校正子结构, 而系统的吞吐量与可靠性之间的最佳折衷, 可以通过选择恰当的最大重传次数实现。

**关键词** 第一类混合 ARQ, Reed-Solomon 码, 校正子

中图分类号: TN919

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)02-0242-05

## Syndrome-Based Type-I Hybrid ARQ and Its Performance Analysis

Zhang Li-jun<sup>①</sup> Cao Zhi-gang<sup>②</sup> Li Victor O.K.<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic & Info. Engineering, Beijing Jiaotong Univ., Beijing 100044, China)

<sup>②</sup>(Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua Univ., Beijing 100084, China)

<sup>③</sup>(Dept. of Electrical & Electronic Engineering, the Univ. of Hong Kong, Hong Kong, China)

**Abstract** A syndrome-based type-I Hybrid ARQ (HARQ) is proposed, where Reed-Solomon code is selected to be the FEC subsystem and the error-detection function is embedded ably in the decoding process. Analytical and simulation results of Bit Error Rate (BER) and throughput efficiency of the system show that syndrome-ahead and syndrome-behind structures are suited to short codes and long codes, respectively. By choosing the maximum of retransmission times, a perfect tradeoff can be obtained between the throughput efficiency and the reliability of the system.

**Keywords** Type-I Hybrid ARQ (HARQ), Reed-Solomon codes, Syndrome

### 1 引言

在数字通信中, 主要采用前向差错控制(FEC)和自动请求重传(ARQ)<sup>[1]</sup>进行差错控制。FEC通过对信息编码实现一定的纠错能力, 由于不存在反馈重传, FEC具有恒定的吞吐量, 但信道情况较差时可靠性要大打折扣。ARQ同样对信息进行编码, 编码的目的在于检错, 一旦接收信息有误, 即通过反馈信道请求重传, 直到收到正确的码字为止。ARQ具有相当高的可靠性, 但信道较差时, 系统吞吐量显著下降。由此可见, ARQ与FEC各有优缺点, 将二者结合在一起, 各取所长, 就产生了包含FEC子系统的混合ARQ (HARQ)<sup>[1-3]</sup>。HARQ中的FEC子系统用于纠正那些发生频率较高的错误图样, 以降

低码字重传的频率, 进而提高系统的吞吐量。

在HARQ中, 为方便检验接收到的码字是否正确, 通常还要对编码后的码字再次进行校验编码。这种额外编码, 显然降低了系统的吞吐量。事实上, 许多FEC编码方案, 如Reed-Solomon (RS)码, 本身就有较强的检错能力, 可以直接利用。Wicker设计的RS/HARQ系统, 就没有进行额外的检错编码<sup>[4]</sup>。所以, 合理利用传统纠错码的检错能力, 对于提高HARQ系统的吞吐量、简化检错过程, 有十分重要的意义。

在RS译码算法中, Berlekamp-Massey算法是经典的硬判决译码算法, 也是许多实用系统经常选用的。正是基于该算法中的校正子计算, 提出两种全新的HARQ结构, 从理论上

2004-07-20 收到, 2005-03-07 改回

国家自然科学基金(6001161943)与香港研究资助局(RGC)基金(N\_HKU 709/00)联合资助; 北京交通大学科技基金(2003RC042)资助课题

分析了误比特率、平均时延和吞吐量,并以Rayleigh衰落信道为例,对采用不同码长RS码的两种HARQ方案进行了计算和仿真。

## 2 基本结构

在Berlekamp-Massey算法中<sup>[5]</sup>,计算接收码字的校正子是译码的第一步。如果校正子为零,译码器认为接收码字无误,反之则认为有错,并进行纠错尝试。显然,从校正子的计算结果就可初步判断接收码字是否有误。据此提出以计算校正子实现HARQ中的检错功能的方法。具体地,根据检错与译码的先后顺序,这种HARQ可以有两种结构。

### 2.1 前向校正子结构

第1种结构的HARQ的操作流程如图1(a)所示,其中 $T_u$ 为最大重传次数。这种结构中,译码器首先计算出接收码字的校正子,然后根据校正子的值决定下一步的操作。若校正子为零,则认为码字成功传输;若校正子不为零,则丢弃接收码字,同时反馈NACK信号到发送端要求重传。上述过程不断进行,直到传输成功或重传次数达到最大值 $T_u$ 为止。从图中可以看到,在重传次数达到最大值以前,译码器只是计算出接收码字的校正子,并未进行纠错操作,即只检错不纠错;只有在第 $T_u$ 次重传时才进行纠错。这种结构的HARQ,由于其检错部分位于纠错部分之前,所以称为前向校正子HARQ,简称前向HARQ。

### 2.2 后向校正子结构

基于校正子的HARQ的另一种结构与FEC非常类似,具体操作流程如图1(b)所示。与前向HARQ不同的是,该结构的HARQ对每次收到的码字都要进行译码,然后再计算出译码结果的校正子,并根据此校正子的值决定是否重传。若校正子为零,则译码器认为此次传输成功;若校正子非零,则反馈NACK给发送端要求重传。上述过程重复进行,直到传

输成功或者重传次数达到最大值 $T_u$ 。这种结构的HARQ,由于其检错在纠错之后进行,所以称为后向校正子HARQ,简称后向HARQ。

## 3 误比特率

假定HARQ的纠错部分为定义在 $GF(2^m)$ 上的RS( $n, k$ )码,码的最小距 $d = n - k + 1$ ,纠错能力 $t - \lfloor (n - k) / 2 \rfloor$ 。在Berlekamp-Massey算法中,校正子是译码的基础,而校正子只与错误图样有关,与信息本身无关。为方便分析,假设发送的为全零码字。

### 3.1 前向HARQ

由前向HARQ的操作过程可知,经 $T_u$ 次重传后系统的误比特率由两部分引起:一是在达到最大重传次数前RS码的非零许用码字导致的不可检测错误;二是达到最大重传次数时RS码译码产生的错误<sup>[6]</sup>。

假定许用码字集对误比特率的贡献为 $P_{set}$ ,RS码译码错误和译码失败对误比特率的贡献为 $P_{de}$ ,重传发生的概率为 $P_{re}$ ,容易得出前向HARQ的误比特率为

$$P_b = \sum_{i=0}^{T_u-1} (1 - P_{re})^i P_{re}^i P_{set} + P_{re}^{T_u} P_{de} = (1 - P_{re}^{T_u}) P_{set} + P_{re}^{T_u} P_{de} \quad (1)$$

限于篇幅, $P_{de}$ 的计算详见文献[6],这里不再赘述。假定RS码的误符号率为 $P$ ,且码符号的所有错误类型等概率发生<sup>[4]</sup>,令 $q = 2^m$ ,则接收码字变为码重为 $i$ 的许用码字的概率为

$$P(i) = A_i \left( \frac{P}{q-1} \right)^i (1 - P)^{n-i} \quad (2)$$

其中 $A_i, 0 \leq i \leq n$ ,是RS码的码重分布,即码重为 $i$ 的许用码字的数目。由于RS码的最小距离为 $d$ ,因此由许用码字引入的误比特率为

$$P_{set} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} \sum_{i=d}^n \frac{i}{n} P(i) = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} \sum_{i=d}^n \frac{i}{n} A_i \left( \frac{P}{q-1} \right)^i (1 - P)^{n-i} \quad (3)$$

前向HARQ中,当接收码字的校正子为零时,该码字不需要重传;校正子为零表明接收码字为许用码字,因此毋需重传的概率就是接收码字落入许用码字集合的概率,用 $\bar{P}_{re}$ 表示毋需重传的概率,有

$$\bar{P}_{re} = \sum_{i=0}^n P(i) = (1 - P)^n + \sum_{i=d}^n A_i \left( \frac{P}{q-1} \right)^i (1 - P)^{n-i} \quad (4)$$

由于 $\bar{P}_{re} + P_{re} = 1$ ,所以重传概率为

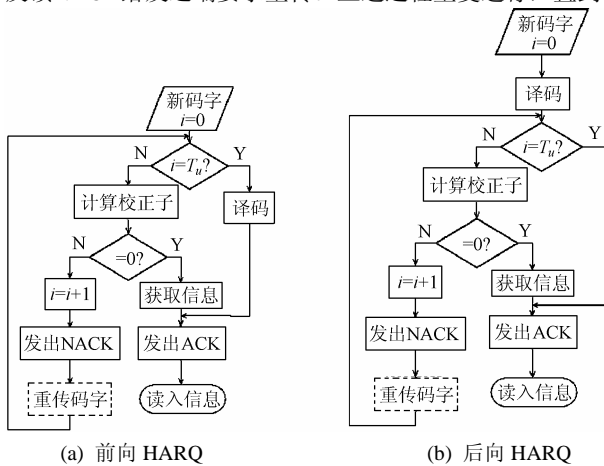


图1 基于校正子的HARQ的两种结构

$$P_{re} = 1 - \bar{P}_{re} = 1 - (1 - P)^n - \sum_{i=d}^n A_i \left( \frac{P}{q-1} \right)^i (1 - P)^{n-i} \quad (5)$$

将  $P_{re}$ ,  $P_{set}$  和  $P_{de}$  代入式(1)即可求出最大重传次数为  $T_u$  的前向HARQ的误比特率。容易看出, 当最大重传次数趋于无穷大时, 误比特率存在如下极限:

$$P_{b|T_u \rightarrow \infty} = P_{set} \quad (6)$$

即由许用码字集引入的误比特率。

### 3.2 后向HARQ

由后向HARQ的操作过程可知, 经  $T_u$  次重传后系统的误比特率由两部分引起: 一是在达到最大重传次数前RS码的译码错误, 即接收码字被译为某个非零的许用码字; 二是达到最大重传次数时RS码译码产生的错误, 这种情况与前向HARQ相同。

假定译码错误对误比特率的贡献为  $P_{err}$ , RS码译码对误比特率的贡献为  $P_{de}$ , 重传发生的概率为  $P_{re}$ , 与前向HARQ类似, 可得后向HARQ的误比特率为

$$P_b = (1 - P_{re}^{T_u})P_{err} + P_{re}^{T_u}P_{de} \quad (7)$$

$P_{de}$  的计算方法详见文献[6], 下面计算  $P_{err}$  和  $P_{re}$ 。由于RS码的最小距离为  $d$ , 所以译码错误引入的误符号数目至少为  $d$ , 对误比特率的影响可表示为

$$P_{err} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} \sum_{i=d}^n \frac{i}{n} P_e(i) \quad (8)$$

式中  $P_e(i)$  为发生译码错误时引入  $i$  个错误的概率<sup>[6]</sup>。由后向HARQ的操作过程可知, 重传概率  $P_{re}$  就是译码失败的概率, 而重量超过RS码纠错能力  $t$  的错误图样都可能引起译码失败, 所以

$$P_{re} = \sum_{i=t+1}^n P_f(i) \quad (9)$$

式中  $P_f(i)$  为发生译码失败时引入  $i$  个错误的概率<sup>[6]</sup>。将  $P_{err}$ ,  $P_{re}$  和  $P_{de}$  代入式(7)可得最大重传次数为  $T_u$  的后向HARQ的误比特率。显然,

$$P_{b|T_u \rightarrow \infty} = P_{err} \quad (10)$$

即无限增加重传次数时, 后向HARQ的误比特率就是由于译码错误而引入的误比特率。

### 4 吞吐量

吞吐量(Throughput efficiency)定义为单位时间内成功传输的信息码字数与单位时间内发送的码字总数之比。设每正确传输一个信息码字需要的平均传送次数为  $\bar{T}_{tr}$ , 则吞吐量为

$$\eta = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{\bar{T}_{tr}} \quad (11)$$

其中  $k$  和  $n$  分别为RS码的信息位长度和码长。若重传概率为  $P_{re}$ , 则发送一次信息即成功的概率为  $1 - P_{re}$ ; 信息成功需要发送2次、3次、 $\dots$ ,  $T_u$  次的概率分别为  $P_{re}(1 - P_{re})$ ,  $P_{re}^2(1 - P_{re})$ ,  $\dots$ ,  $P_{re}^{T_u-1}(1 - P_{re})$ ; 第  $T_u + 1$  次传输(即第  $T_u$  次重传)时不论成功与否, 都认为传输成功, 这个概率为  $P_{re}^{T_u}$ 。对传输次数求平均, 可得

$$\begin{aligned} \bar{T}_{tr} &= \sum_{i=1}^{T_u} i P_{re}^{i-1} (1 - P_{re}) + (T_u + 1) P_{re}^{T_u} \\ &= \frac{1 - P_{re}^{T_u+1}}{1 - P_{re}} \end{aligned} \quad (12)$$

将  $\bar{T}_{tr}$  代入式(11), 得吞吐量为

$$\eta = \frac{k}{n} \cdot \frac{1 - P_{re}}{1 - P_{re}^{T_u+1}} \quad (13)$$

两种极限情况为

$$\eta_{|P_{re} \rightarrow 0} = \frac{k}{n} \quad (14)$$

$$\eta_{|T_u \rightarrow \infty} = \frac{k}{n} (1 - P_{re}) \quad (15)$$

上式说明, 当信道的条件逐渐变好, 重传概率越来越低时, HARQ的吞吐量将接近FEC系统的吞吐量; 而重传次数趋向无限大时, HARQ的吞吐量将与选择重传(Selective Repeat, SR) ARQ的吞吐量十分相近<sup>[7]</sup>。

### 5 数值结果

在归一化Rayleigh衰落信道中, 若调制方式为MPSK, 则信道的误符号率近似为<sup>[8]</sup>

$$P_s \approx 1 - \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \gamma_s / \left(1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \gamma_s\right)} \quad (16)$$

式中  $\gamma_s$  为信噪比。令  $M = 8$ , 则可得到8PSK调制下信道的误符号率。通常, 交织是抗突发错误的有效手段。假定信道经过理想交织, 错误符号之间相互独立。采用RS(7, 5)或RS(63, 45)码作为HARQ的FEC子系统, 二者具有相同的编码效率, 但码长和纠错能力各不相同。RS(7, 5)码的每个码符号包含3 bit, 可由一个8PSK调制符号表示, 码符号的错误率  $P = P_s$ ; RS(63, 45)码的每个码符号包含6 bit, 需要用两个串联的8PSK调制符号表示, 因此码符号的错误率变为  $P = 1 - (1 - P_s)^2 = P_s(2 - P_s)$ 。纠错能力方面, RS(63, 45)码优于RS(7, 5)码。

图2所示为重传一次的情况下, 不同HARQ与FEC方案的误比特率比较。从图2(a)可以看出, 采用RS(7, 5)码的后向

HARQ与FEC的误比特率非常接近,只是稍好一点,这是由于后向HARQ比FEC多了一次码字重传。而前向HARQ的误比特率随信噪比的增大迅速下降,明显优于后向HARQ和FEC。对于RS(63,45)码,如图2(b)所示,误比特率与RS(7,5)码的情形刚好相反,后向HARQ要比前向HARQ好。

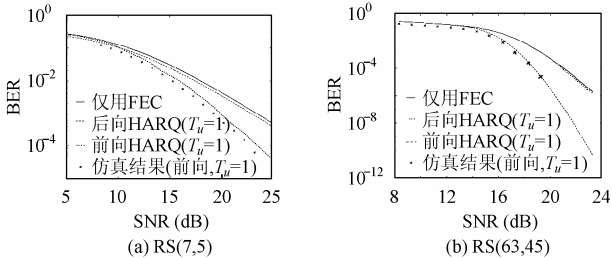


图2  $T_u = 1$  时, HARQ与FEC在归一化Rayleigh衰落信道中的误比特率比较

图3所示为最大重传次数  $T_u$  对误比特率的影响,最大重传次数分别取1, 2, 4, 8和无穷大。从图中可以看到,采用RS(7,5)码的前向HARQ和采用RS(63,45)码的后向HARQ的误比特率曲线簇呈现出极其相似的特征,随信噪比的增大,  $T_u = 1, 2, 4, 8$  的几条误比特率曲线在不断走低的同时逐渐分离,并在某一信噪比处与  $T_u = \infty$  时的误比特率曲线(称为极限曲线)重合,  $T_u$  越大,该信噪比越小。因此,在一定信噪比下,只需有限的重传次数( $<10$ )即可达到各自误比特率的极限。增加重传次数可以提高低信噪比下的可靠性,但改善是有限的。如RS(7,5)码的前向HARQ,信噪比为5 dB时,即使最大重传次数为无穷大,误比特率也无法达到  $10^{-3}$ 。  $T_u \rightarrow \infty$  时对应的误比特率见式(6)和式(10),前向HARQ的误比特率最低就是许用码字集引入的  $P_{set}$ ,后向HARQ则为译码错误引入的  $P_{err}$ 。所以,误比特率的极限性能问题是由HARQ中的纠错码本身引起的,单靠重传无法解决。对于另外两种HARQ,即采用RS(7,5)码的后向HARQ和RS(63,45)码的前向HARQ,当采用不同的最大重传次数时,它们各自的误比特率曲线都非常接近,几乎无法区分。具体的,对于RS(7,5)码,有限次重传情况下的误比特率与无限次重传的情形几乎完全一样,因此像RS(7,5)码这样纠错能力较差的短码不宜采用后向校正子结构。对于纠错能力较强的RS(63,45)码,  $T_u = 1, 2, 4, 8$  时,前向HARQ的误比特率曲线差别不大,只是在信噪比较高时才有很小的差别;当  $T_u = \infty$  时,误比特率降得非常低,例如,信噪比为5 dB时,误比特率  $<10^{-12}$ 。为了更清楚地描述有限次重传时的误比特率,图3(b)中并未包含这种情况。

造成上述结果的原因是,短码的许用码字集合元素较

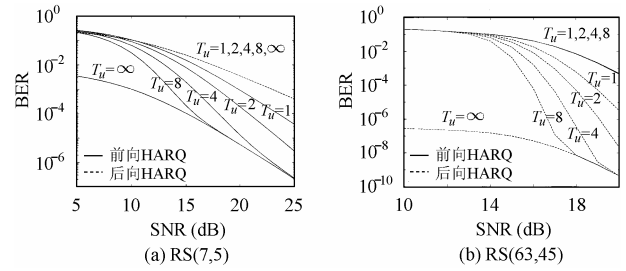


图3 最大重传次数对误比特率的影响

少,码字发生错误时,由全零码变为非零许用码字的概率较小,但译码后,部分错误图样可能发生译码错误而变为非零许用码字,导致错误无法检出。所以,短码宜先检错重传,最后译码,即采用前向结构。对于长码,检错和纠错能力均很强,先检错有利于提高可靠性,但在重传次数较小和信噪比较低时效果不明显;先纠错再检错在信噪比低的时候对可靠性改善效果明显,但存在瓶颈。因此,对于长码,应根据需要酌情选择。

图4给出了RS(7,5)后向HARQ和RS(63,45)前向HARQ的吞吐量比较。由图可知,信噪比相同时,两种HARQ的吞吐量均随最大重传次数的增加而下降。如前向HARQ,信噪比为10 dB时,对于  $T_u = 1, 2, 4, 8, \infty$ , 对应的吞吐量分别为0.41, 0.3, 0.21, 0.15 和 0.12。可见,最大重传次数为8时,吞吐量较重传一次的情况下下降了约为71%;而最大重传次数从8次到无穷大时,吞吐量只降低了20%。因此,最初的几次重传对吞吐量的影响较大。

在最大重传次数相同的条件下,情况较复杂。后向HARQ的吞吐量在5~12 dB之间处于一个平台区,此时增大信噪比对吞吐量几乎没有影响;在此范围内,前向HARQ的吞吐量高于后向HARQ,并且随信噪比增加缓慢增长。信噪比超过12 dB后,后向HARQ的吞吐量脱离平台区,并且迅速增加,在15 dB附近赶上并超过前向HARQ。随信噪比进一步增加,二者的吞吐量先后进入饱和区,即趋于RS码的编码效率  $k/n$ 。从图中可以看出,前向HARQ与后向HARQ在不同信噪比下吞吐量互补,低信噪比下前向HARQ的吞吐量有明显优势,而在中高信噪比下后向HARQ则能提供更高的吞吐量。

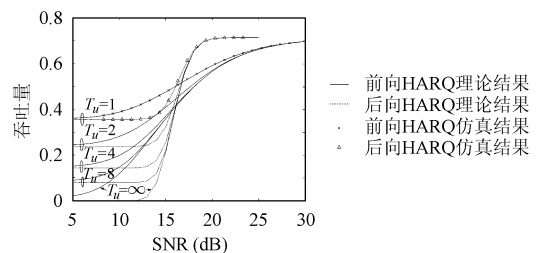


图4 两种HARQ在归一化Rayleigh衰落信道中的吞吐量比较

## 6 结束语

基于校正子的计算, 将第一类HARQ的检错功能巧妙地融于RS码译码算法中, 根据检错部分在译码器中的不同位置, 分别提出了HARQ的前向和后向结构, 并进一步分析了系统的误比特率与吞吐量。计算和仿真结果均表明, 短码宜采用前向结构, 长码宜采用后向结构, 前向HARQ与后向HARQ在吞吐量方面具有互补性。此外, 通过选择合适的最大重传次数, 可在可靠性与吞吐量之间获得较好的折衷。需要说明的是, 文中给出的计算方法不仅适用于纠错译码器的情形, 对于纠删纠错译码器, 同样适用, 只是计算重传概率 $P_{re}$ 时稍有不同。采用纠删纠错译码器, 可以进一步提高系统流量, 有兴趣的读者可以利用本文的公式计算。

## 参 考 文 献

- [1] Lin S, Jr, Costello D J. Error Control Coding, 2nd Edition. New York: Prentice Hall, 2004, chapter 1.
- [2] Babich F, Valentinuzzi E, Vatta F. Performance of hybrid ARQ schemes for the LEO satellite channel. IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM'01), San Antonio, TX, USA, 2001: 2709 – 2713.
- [3] Li W, Law C L, Yang F. A HARQ scheme for combating burst-errors due to power control gaps in Ka-band LEO satellite systems. IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM'01), San Antonio, TX, USA, 2001: 2703 – 2708.
- [4] Wicker S B. Reed-Solomon error control coding for Rayleigh fading channels with feedback. IEEE Trans. on Vehicular Tech., 1992, 41(2): 124 – 133.
- [5] Morelos-Zaragoza R H. The Art of Error Correcting Coding. John Wiley & Sons Ltd., 2002: 49 – 52.
- [6] Zhang L J, Gao C Y, Cao Z G. Exact analysis of bit error rate of maximum-distance-separable codes. IEEE Global Telecommunications Conference(GLOBECOM'00), San Francisco, CA, USA, 2000: 816 – 819.
- [7] Lin S, Jr, Costello D J, Miller M J. Automatic-repeat-request error-control schemes. IEEE Commun. Mag., 1984, 22(1): 5 – 17.
- [8] Jamali S H, Le-Ngoc T. Coded-Modulation Techniques for Fading Channels. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994: 277 – 278.

张立军: 男, 1974年生, 讲师, 研究方向为通信理论、信道编码、超宽带通信、数字信号处理等。

曹志刚: 男, 1939年生, 教授, 研究方向为通信理论、卫星通信、宽带移动通信、远程教育技术、抗噪声语音信号处理等。

李安国: 男, 教授, 研究方向为无线网络的多媒体 QoS、分布式多媒体系统、网络资源分配、Ad Hoc 系统体系结构等。