

## 零均值复杂噪声背景下二维谐波的三次非线性耦合分析

曾黎 樊养余 张政伟 魏巍  
(西北工业大学电子信息学院 西安 710072)

**摘要:** 该文利用一种四阶时间平均矩谱, 通过对原始数据取平方的办法, 改变了原始信号中噪声的统计特性, 首次对零均值独立噪声背景下的二维谐波的三次耦合问题给出了解决方法, 文中给出了详细的理论分析和证明。由于该方法也适合于非零均值噪声下的谐波耦合问题, 因此这种方法不再需要对噪声的均值、颜色和分布作任何限制。仿真结果表明了该方法的有效性。

**关键词:** 零均值独立; 四阶时间平均多矩谱; 二维谐波三次耦合; 乘性噪声

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)10-2313-04

## Two Dimensional Cubic Nonlinear Coupling Estimation in Zero Mean Independent Multiplicative Noise

Zeng li Fan Yang-yu Zhang Zheng-wei Wei Wei  
(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The statistics of the multiplicative and additive noise included in the sampled data is changed with squaring the sampled data. Cubic nonlinear coupling problem in zero mean independent noise is studied using a special fourth-order time-average moment spectrum. The theory analysis and the proof for the method are developed at details. Because the method may well applied to the situation where the mean of the noise is nonzero, so the method used in does not need any constrain on the mean, distribution, and the color of the noise. The simulation results illustrate the effectiveness and correctness of the proposed method.

**Key words:** Zero mean independent; Fourth-order time-average moment spectrum (FTMS); Two dimensional cubic coupling; Multiplicative noise

### 1 引言

由于谐波恢复与耦合问题在水声、地震、生物医学、通信等领域有着广泛的应用, 复杂噪声背景下谐波的恢复及耦合问题近年来受到了广泛的重视。Zhou, Giannakis用高阶统计量和循环统计量方法研究了一维谐波信号的恢复和耦合问题<sup>[1,2]</sup>。徐景, 窦慧晶, Cheng Qiansheng, Li Hongwei等用循环统计量方法研究了二维谐波的恢复与二次、三次耦合问题<sup>[3-6]</sup>。但是, 在乘性噪声、加性噪声均值均为零且乘性噪声之间、乘性噪声与加性噪声之间均相互独立的情况下, 上述方法都不适用。考虑到在实际环境中, 噪声独立性及其统计特性往往难以检验和保证, 因此, 很有必要研究零均值独立噪声背景下的谐波恢复问题, 以便满足实际情况的需要。本文在以上研究基础上利用一种四阶时间平均矩谱首次解决了零均值独立噪声背景下的二维谐波三次耦合问题, 此方法能够有效地估计出观测信号中参与耦合的谐波频率, 且不再需要对噪声的均值、颜色和分布作任何限制。仿真试验结果说明了该方法的合理有效。

### 2 信号模型分析

考虑如下模型:

$$x(m, n) = \sum_{l=1}^P w_l(m, n) e^{j(m\omega_{1l} + n\omega_{2l} + \phi_l)} + v(m, n) \quad (1)$$

式中  $m, n$  为二维时间坐标,  $m = 0, 1, \dots, T_1 - 1$ ;  $n = 0, 1, \dots, T_2 - 1$ ,  $P$  为信号中所含谐波个数,  $(\omega_{1l}, \omega_{2l})$  为第  $l$  个信号频率对,  $\phi_l$  为第  $l$  个谐波相位,  $w_l(m, n)$  为第  $l$  个乘性噪声,  $v(m, n)$  为加性噪声。

式(1)中的噪声类型本文仍假设为平稳可混<sup>[3,4]</sup>的随机过程, 对乘性噪声间及乘性噪声与加性噪声间的统计相关性有以下几种假设: (1)  $w_l(m, n)$ 's 间相关,  $w_l(m, n)$  与  $v(m, n)$  间相关。(2)  $w_l(m, n)$ 's 间相关,  $w_l(m, n)$  与  $v(m, n)$  间独立。(3)  $w_l(m, n)$ 's 间独立,  $w_l(m, n)$  与  $v(m, n)$  间独立。其中's 表示  $x(m, n)$  中的  $P$  个噪声。

对前两种假设, 无论噪声的均值是否为零, 均可用下文中定义的一种四阶时间平均多矩谱式(4)来分析信号  $x(m, n)$  谐波成分间的三次耦合问题<sup>[3,4]</sup>。对第(3)种假设, 若任一乘性噪声或加性噪声的均值为零, 上述方法将无法解决信号  $x(m, n)$  谐波成分间的三次耦合问题。

本文通过对原始信号作适当处理, 对上述第(3)种情形下的噪声均值不再作任何限制。但需要说明的是, 若噪声均

值不为零,为达相同的计算精度,用本文的方法需要采样更多的信号点数,计算量稍大于文献[4]中方法,故本方法更适用于噪声均值为零情况下的假设(3)所述情况。综上所述,本文对信号模型式(1)作如下假设:(1)  $(\omega_{1l}, \omega_{2l})$ 's 是区间  $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$  上互不相等的常数对,且  $(\omega_{1l}, \omega_{2l})$ 's  $\neq (0, 0)$ 。(2)  $\varphi_l$ 's 是确定性的常数。(3)  $w_l(m, n)$ 's 及  $v(m, n)$  为零均值、平稳、可混随机过程,且  $w_l(m, n)$ 's 间及  $w_l(m, n)$  与  $v(m, n)$  均相互独立。

### 3 信号的四阶时间平均矩谱

为便于分析问题,重写式(1)如下:

$$x(m, n) = \sum_{l=0}^P s_l(m, n) e^{j(m\omega_{1l} + n\omega_{2l})} \quad (2)$$

式中  $s_l(m, n) = w_l(m, n) e^{j\varphi_l}$  ( $l = 1, 2, \dots, P$ ), 且  $s_0(m, n) = v(m, n)$ ,  $(\omega_{10}, \omega_{20}) = (0, 0)$ 。

**定义 1** 定义  $x(m, n)$  对应的四阶时间平均多矩谱<sup>[4]</sup>为

$$\begin{aligned} \bar{M}_{4x}(\alpha, \beta) &\triangleq \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{\tau=0}^{T_1-1} \sum_{\xi=0}^{T_2-1} \bar{m}_{4x}(\tau', \xi') e^{-j\alpha\tau} e^{-j\beta\xi} \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{\tau=0}^{T_1-1} \sum_{\xi=0}^{T_2-1} \sum_{m=0}^{T_1-1-\tau} \sum_{n=0}^{T_2-1-\xi} E\{[x^*(m, n)]^2 \\ &\quad \cdot x^*(m + \tau, n + \xi) x(m + \tau, n + \xi)]\} e^{-j\alpha\tau} e^{-j\beta\xi} \end{aligned} \quad (3)$$

**定理 1** 若  $x(m, n)$  中不存在二次耦合现象, 对应式(3)的特殊四阶时间平均多矩谱为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \bar{M}_{4x}(\alpha, \beta) &= \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4=1}^P E\{s_{l_1}^*(m, n) s_{l_2}^*(m, n) E[s_{l_3}^*(m, n) s_{l_4}(m, n)] \\ &\quad \cdot \delta(\alpha + \omega_{1l_3} - \omega_{1l_4}) \delta(\beta + \omega_{2l_3} - \omega_{2l_4}) \times \delta(\omega_{1l_1} - \omega_{1l_2} - \omega_{1l_3} - \omega_{1l_4}) \\ &\quad \cdot \delta(\omega_{2l_1} - \omega_{2l_2} - \omega_{2l_3} - \omega_{2l_4})\} + \left\{ \sum_{l_3, l_4=1}^P E[s_0^*(m, n) s_0^*(m, n)] E[s_{l_3}^*(m, n) \right. \\ &\quad \cdot s_{l_4}(m, n)] + E[s_0^*(m, n) s_0^*(m, n)] E[s_0^*(m, n) s_0(m, n)] \left. \right\} \delta(\alpha) \delta(\beta) \end{aligned} \quad (4)$$

根据本文对式(1)的假设(3), 分析上式可得: 若  $l_1, l_2, l_3, l_4$  中存在任意两者或以上相等, 由假设(1), 此时非三次耦合情形, 将仅在  $(0, 0)$  处出现波峰。若  $l_1, l_2, l_3, l_4$  中任意两者不等, 根据噪声零均值和独立的假设, 此时式(4)中的第 1 部分将为零, 波峰仍仅出现在  $(0, 0)$  处。

由此可见上述方法对零均值复杂噪声背景下的谐波三次耦合问题不再有效。但对假设(3), 若噪声均值非零, 当式(1)中各谐波成分的频率存在三次耦合时, 即

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1l_1} + \omega_{1l_2} + \omega_{1l_3} &= \omega_{1l_4} \\ \omega_{2l_1} + \omega_{2l_2} + \omega_{2l_3} &= \omega_{2l_4} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$\bar{M}_{4x}(\alpha, \beta)$  将在  $(0, 0)$ ,  $(\omega_{1l_1} + \omega_{1l_2}, \omega_{2l_1} + \omega_{2l_2})$ ,  $(\omega_{1l_1} + \omega_{1l_3}, \omega_{2l_1} + \omega_{2l_3})$ ,  $(\omega_{1l_2} + \omega_{1l_3}, \omega_{2l_2} + \omega_{2l_3})$  出现 4 个波峰。由假设(1),  $(0, 0)$  并不是参与耦合的频率对, 经过谱峰搜索及简单的计算便可得参与耦合的频率对:  $(\omega_{1l_1}, \omega_{2l_1})$ ,  $(\omega_{1l_2}, \omega_{2l_2})$ ,  $(\omega_{1l_3}, \omega_{2l_3})$  及耦合频率对  $(\omega_{1l_4}, \omega_{2l_4})$ 。

### 4 零均值独立噪声下的谐波耦合分析

对式(2)求平方可得:

$$\begin{aligned} X(m, n) = x^2(m, n) &= \sum_{l=0}^P s_l^2(m, n) e^{j(2m\omega_{1l} + 2n\omega_{2l})} \\ &+ 2 \sum_{\substack{l_1=0, l_2=0 \\ (l_1 \neq l_2)}}^P s_{l_1}(m, n) s_{l_2}(m, n) e^{j(m(\omega_{1l_1} + \omega_{1l_2}))} \times e^{j(n(\omega_{2l_1} + \omega_{2l_2}))} \end{aligned} \quad (6)$$

下面将证明式(6)加号后这一部分的特殊四阶时间平均矩谱为零。对其进行整合变形可得:

$$R_x(m, n) = \sum_k^{\frac{P(P-1)}{2}} S_k(m, n) e^{j(mW_{1k} + nW_{2k})} \quad (7)$$

$k$  为  $(l_1, l_2)$  ( $l_1 = 0, 1, \dots, P$ ;  $l_2 = 0, 1, \dots, P$ ;  $l_1 \neq l_2$ ) 的一种组合, “ $\Sigma$ ”表示对  $(l_1, l_2)$  的共  $C_P^2 = P(P-1)/2$  种情形求和; 其中  $W_{1k} = \omega_{1l_1} + \omega_{1l_2}$ ;  $W_{2k} = \omega_{2l_1} + \omega_{2l_2}$ ;  $S_k(m, n) = s_{l_1}(m, n) s_{l_2}(m, n)$ 。

由定理 1, 式(7)的特殊四阶时间平均矩谱为

$$\begin{aligned} \bar{M}_{4R_x}(\alpha, \beta) &= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4}^{\frac{P(P-1)}{2}} E\{S_{k_1}^*(m, n) S_{k_2}^*(m, n)\} \\ &\quad \times E\{S_{k_3}^*(m, n) S_{k_4}(m, n)\} \delta(\alpha + W_{1k_3} - W_{1k_4}) \times \delta(\beta + W_{2k_3} \\ &\quad - W_{2k_4}) \delta(W_{1k_1} - W_{1k_2} - W_{1k_3} - W_{1k_4}) \times \delta(W_{2k_1} - W_{2k_2} - W_{2k_3} \\ &\quad - W_{2k_4}) + \left[ \sum_{k_3, k_4}^P E\{S_{k_3}^*(m, n) S_{k_4}^*(m, n)\} E\{S_{k_3}^*(m, n) S_{k_4}(m, n)\} \right. \\ &\quad \left. + E\{S_k^*(m, n) S_k^*(m, n)\} \times E\{S_k^*(m, n) S_k(m, n)\} \right] \delta(\alpha) \delta(\beta) \end{aligned} \quad (8)$$

值得注意的是上式的  $k_1, k_2, k_3, k_4, k$  只是  $(l_1, l_2)$  的不同组合, 并无大小之分。

假设  $k_1, k_2, k_3, k_4$  分别为以下几种组合情形  $(l_{11}, l_{12}), (l_{21}, l_{22}), (l_{31}, l_{32}), (l_{41}, l_{42})$ 。因  $k_1, k_2, k_3, k_4$  为互不相同的组合情形, 故上述任意两种组合的两个分量中最多只有一个分量相等。

若  $l_{11} = l_{12} \neq l_{21} \neq l_{22}$ , 或  $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$  中有两者相等, 并由假设(3), 对式(8)中的期望部分作分析可得:  $E\{S_{k_1}^*(m, n) S_{k_2}(m, n)\} = 0$ ,  $E\{S_{k_3}^*(m, n) S_{k_4}(m, n)\} = 0$ 。这样式(8)化为

$$\begin{aligned} \bar{M}_{4R_x}(\alpha, \beta) &= [E\{S_k^*(m, n) S_k^*(m, n)\} \\ &\quad \cdot E\{S_k^*(m, n) S_k(m, n)\}] \cdot \delta(\alpha) \delta(\beta) \\ &= [E\{[s_{l_1}^*(m, n)]^2\} E\{[s_{l_2}^*(m, n)]^2\} \\ &\quad \cdot E\{[s_{l_1}(m, n) s_{l_2}(m, n)]^2\}] \delta(\alpha) \delta(\beta) \end{aligned} \quad (9)$$

因

$$\left. \begin{aligned} E\{[s_{l_1}^*(m, n)]^2\} &= D(s_{l_1}^*(m, n)) \neq 0 \\ E\{[s_{l_2}^*(m, n)]^2\} &= D(s_{l_2}^*(m, n)) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

故式(9), 也就是式(8), 只在  $(0, 0)$  处出现波峰。由假设(3), 此波峰为虚假波峰, 可排除。

对式(6)而言, 因

$$E\{[s_l(m,n)]^2\} = D[s_l(m,n)] \neq 0 \quad (11)$$

比较式(6)和式(2)可知,此时两者模型相同。但由式(11)可知,此时式(6)中经平方后的乘性噪声均值不为零,且谐波频率为原式(2)中各谐波信号频率的 2 倍。

根据本文第 2 节对式(2)模型的分析,若各谐波成分的频率间存在三次耦合,则  $\bar{M}_{4R,2}$  将在  $(0,0)$ ,  $(2\omega_{1l} + 2\omega_{1b}, 2\omega_{2l} + 2\omega_{2b})$ ,  $(2\omega_{1l} + 2\omega_{1b}, 2\omega_{2l} + 2\omega_{2b})$ ,  $(2\omega_{1b} + 2\omega_{1l}, 2\omega_{2b} + 2\omega_{2l})$  处出现 4 个波峰。由假设(1),  $(0,0)$  并不是参与耦合的频率对,经过谱峰搜索及简单的计算便可得到实际参与耦合的频率对  $(\omega_{1l}, \omega_{2l})$ ,  $(\omega_{1b}, \omega_{2b})$ ,  $(\omega_{1b}, \omega_{2l})$  及耦合频率对  $(\omega_{1l}, \omega_{2l})$ 。

### 5 仿真结果

假设根据模型式(1)采样得到的实际数据中含有 4 个谐波成分。它们的频率分别为  $(\omega_{11}, \omega_{21}) = (0.30, 0.20)$ ,  $(\omega_{12}, \omega_{22}) = (1.00, 2.10)$ ,  $(\omega_{13}, \omega_{23}) = (1.60, 0.70)$ ,  $(\omega_{14}, \omega_{24}) = (2.90, 3.00)$ 。其中第 4 个频率对是由其他 3 个频率对耦合产生的,它们的相位分别为  $\phi_1 = 0.1$ ,  $\phi_2 = 0.2$ ,  $\phi_3 = 0.3$ ,  $\phi_4 = 0.4$ 。乘性噪声  $s_l(m,n)$  和加性噪声  $v(m,n)$  之间满足假设(3),均由如下系统产生:

$$\left. \begin{aligned} s_1(m,n) &= e_1(m,n) - 0.55e_1(m-1,n) - 0.45e_1(m-2,n) \\ s_2(m,n) &= e_2(m,n) - 0.30e_2(m-1,n) - 0.70e_2(m-2,n) \\ s_3(m,n) &= e_3(m,n) - 0.35e_3(m-1,n) - 0.65e_3(m-2,n) \\ s_4(m,n) &= e_4(m,n) - 0.20e_4(m-1,n) - 0.80e_4(m-2,n) \\ v(m,n) &= e_5(m,n) - 0.40e_5(m-1,n) - 0.60e_5(m-2,n) \end{aligned} \right\} (12)$$

其中  $e_1(m,n), e_2(m,n), e_3(m,n), e_4(m,n)$  及  $e_5(m,n)$  均为均值为 1, 方差为 1 的高斯随机过程。取信号点数为  $256 \times 256$ , 图 1 展示了由上述噪声和谐波组成的信号的四阶时间平均多矩谱。

作出其二维平面等高图如图 2 所示。

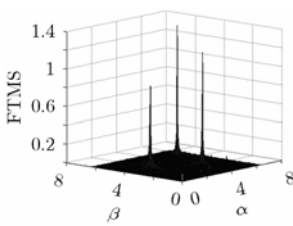


图 1 信号的四阶时间平均多矩谱图

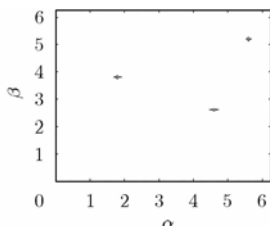


图 2 二维等高线图

实际计算中取谱峰中出现的最高点的坐标作为估计值,所得频率组为:  $(5.2318, 5.6323)$ ,  $(3.8300, 1.8274)$ ,  $(2.6535, 4.6310)$ 。

由第 2 节分析可得,为求得实际参与耦合的频率对需要求解下面的矩阵方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2\omega_{11} & 2\omega_{21} \\ 2\omega_{12} & 2\omega_{22} \\ 2\omega_{13} & 2\omega_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2318 & 5.6323 \\ 3.8300 & 1.8274 \\ 2.6535 & 4.6310 \end{bmatrix} \quad (13)$$

解方程组式(13)后,得实际参与耦合的频率对为  $(1.6021, 0.7072)$ ,  $(1.0138, 2.1090)$ ,  $(0.3129, 0.2065)$ , 耦合频率对为:  $(2.9288, 3.0227)$ , 与实际数据的误差分别为  $(0.0021, 0.0072)$ ,  $(0.0138, 0.0090)$ ,  $(0.0129, 0.0065)$ ,  $(0.0288, 0.0227)$ 。上述数据证明了该方法的有效性,若提高采样频率,以增加实际参与运算的点数,精度将进一步提高。

### 6 结束语

本文利用四阶时间平均多矩谱对零均值独立噪声背景下的谐波耦合问题给出了解决方法及详细的理论分析和证明,仿真结果证明了该方法的有效性。由于二维谐波的计算数据量大,如何采取快速算法以满足实时性的需要将是亟待解决的问题。

### 参考文献

- [1] Zhou G and Giannakis G B. On estimating random amplitude-modulated harmonics using high order spectral. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 1994, 19(4): 529-539.
- [2] Zhou G and Giannakis G B. Harmonics in multiplicative and additive noise: parameter estimation using cyclic statistics. *IEEE Trans. on Signal Procession*, 1995, 43(6): 2217-2221.
- [3] 徐景, 王树勋, 王宏志, 程时昕. 复杂噪声背景下的谐波恢复及非线性耦合谐波分析. *电子学报*, 2003, 31(1): 117-122. Xu Jing, Wang Shu-xun, Wang Hong-zhi, and Cheng Shi-xin. Harmonic retrieval and nonlinear frequency-coupled harmonics in the complex noise. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(1): 117-122.
- [4] 窦慧晶, 王树勋, 魏小丽, 汪飞. 非零均值乘性噪声中的二维三次非线性耦合. *吉林大学学报(工学版)*, 2004, 34(3): 483-486. Dou Hui-jing, Wang Shu-xun, Wei Xiao-li, and Wang Fei. Two-dimensional cubic nonlinear coupling estimation in nonzero mean multiplicative noise. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2004, 34(3): 483-486.
- [5] 汪飞, 王树勋, 窦慧晶. 非零均值乘法噪声背景下二维谐波自耦合分析. *吉林大学学报(信息科学版)*, 2002, 20(2): 21-26. Wang Fei, Wang Shu-xun, and Dou Hui-jing. Retrieval of two-dimensional self-coupled harmonics in non-zero mean multiplicative noise. *Journal of Jilin University (Information Science Edition)*, 2002, 20(2): 21-26.
- [6] Li Hongwei, Cheng Qiansheng, and Yuan Baozong. Strong laws of large numbers for two-dimensional process. *Signal processing proceedings, Fourth ICSP'98, Northern Jiaotong University, Beijing*, 1998: 43-46.

曾 黎: 女, 1981 年生, 硕士生, 研究方向为非线性理论、信号检测等。  
 樊养余: 男, 1960 年生, 教授, 博士生导师, 工学博士(博士后), 研究方向为数字信号处理、数字图像处理等。  
 张政伟: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为混沌及非线性理论、弱信号检测等。  
 魏 巍: 男, 1985 年生, 本硕连读生, 研究方向为弱信号检测等。