

## 衰落信道下 MIMO-OFDM 系统信道容量分析

黄丘林 史小卫

(西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 针对以往文献的不足, 该文重新推导了衰落信道下 MIMO-OFDM 系统信道容量公式, 分析了子载波数目、时延扩展、角度扩展以及天线间距等因素对信道容量的影响。理论分析和仿真结果符合 MIMO-OFDM 信道容量特征。

**关键词:** 无线通信; 信道容量; 多入多出; 正交频分复用

中图分类号: TN919.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)12-2948-04

## Analysis of the Channel Capacity of MIMO-OFDM Systems under Fading Environments

Huang Qiu-lin Shi Xiao-wei

(National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Considering the defect existing in the previous document, the channel capacity formula of MIMO-OFDM systems is derived again, and the effects of the number of sub-carriers, delay spread, angle spread and antenna spacing on the capacity are investigated. The theory analysis and simulation results describe the characters of the channel capacity of MIMO-OFDM systems.

**Key words:** Wireless communications; Channel capacity; MIMO; OFDM

### 1 引言

在衰落环境中, MIMO 技术通过空时编码可以获得空间复用增益和分集增益<sup>[1-3]</sup>, 该技术将在诸如 WLAN 等宽带无线通信系统中得到广泛的应用。另一方面, 宽带无线信道存在明显的频率选择性, 不利于信号稳定传输。而 OFDM 技术使用的多载波调制技术将其转变为多个并行的窄带无线信道, 有利于获得稳定的信号传输, 相邻子信道相互正交且有 1/2 带宽重叠, 可以提高频谱利用率<sup>[4, 5]</sup>。将 MIMO 技术和 OFDM 技术结合可以更好的改善通信系统性能, 提高系统的抗衰落能力和频谱效率。Iospan Wireless 的研究人员结合 MIMO 和 OFDM 技术在 NLOS 传播环境中获得了最高 12bit/s/Hz 频谱利用率, 目前的芯片可以在 2MHz 的带宽上实现 13Mbit/s 的传输速率, 将来有望在 7MHz 带宽上实现 45Mbps 的传输速率<sup>[6]</sup>。

以往讨论 MIMO-OFDM 系统信道容量的文献中对于子信道带宽和系统带宽之间关系以及子信道信噪比与系统信噪比之间关系的处理存在不完善之处<sup>[7]</sup>。本文充分考虑了 MIMO 系统结合 OFDM 技术后带来的变化, 重新推导了宽带 MIMO-OFDM 系统的信道容量公式, 分析了散射环境下子载波数目、时延扩展、角度扩展、天线间距等因素对信道容量的影响。该容量公式与文献<sup>[7]</sup>给出的不同, 但理论分析和仿真结果都符合 MIMO-OFDM 信道容量特征。

### 2 MIMO-OFDM 信道模型

#### 2.1 MIMO-OFDM 系统介绍

一个采用  $N_T$  个发射天线和  $N_R$  个接收天线的 MIMO-OFDM 基带系统模型如图 1 所示, 其中没有考虑保护间隔和循环前缀。在发射端, 传输数据经过空时编码后被分配到  $N_T$  个发射支路, 每个支路采用正交调制, 将宽带信号进行串并变换并调制到多个相互正交的子载波上。在接收端接收信号则经过相反的过程。各支路中的正交调制和解调分别采用 IFFT 和 FFT 来实现。

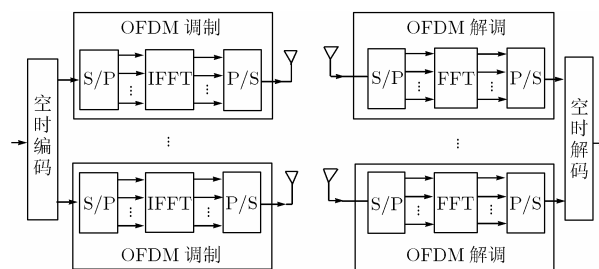


图 1 MIMO-OFDM 基带系统模型

假设 OFDM 符号周期为  $T$ , 信道被划分成  $N$  个子载波信道, 那么第  $n$  个子信道对应的频率为  $f_n = n/T$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ )。设分配给第  $p$  个发射天线第  $n$  个子信道的数据符号为  $x_p^{(n)}$  ( $p=1, 2, \dots, N_T$ ), 则发射空时码字可表示为如下的  $N_T \times N$  阶矩阵:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(N-1)} \\ x_2^{(0)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_2^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N_T}^{(0)} & x_{N_T}^{(1)} & \cdots & x_{N_T}^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

列向量表示相同子载波频率上的发射信号。若信道响应矩阵为  $\mathbf{H}$ , 噪声信号为  $\mathbf{N}_0$ , 则 MIMO-OFDM 系统的收发关系表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N}_0 \quad (2)$$

## 2.2 宽带 MIMO 信道分解

宽带无线信道具有明显的频率选择性。假设无线信道有  $L_p$  个散射体簇, 并且经过相同散射体簇散射的信号到达接收端的时延是相同的。在频率选择性信道中, 信道的抽头延迟线模型可截断为  $L_p = \left\lfloor \tau_{\max} \frac{N}{T} \right\rfloor + 1$ , 其中  $\tau_{\max}$  为最大时延。那么, MIMO 信道用抽头延迟线模型可表示为<sup>[8]</sup>

$$\mathbf{H}(\tau) = \sum_{l=0}^{L_p-1} \sqrt{P_l} \mathbf{H}_l \delta(\tau - \tau_l) \quad (3)$$

其中  $\tau_l$  表示经由第  $l$  个散射体簇的时延

$$\tau_l = \frac{n_l T}{N}, \quad l = 0, 1, \dots, L_p - 1 \quad (4)$$

$n_l$  为整数,  $P_l$  由功率时延谱(PDS)决定。

对  $\mathbf{H}(\tau)$  进行傅里叶变换可以得到信道响应矩阵在频域的表达式

$$\mathbf{H}(f) = \sum_{l=0}^{L_p-1} \sqrt{P_l} \mathbf{H}_l e^{-j2\pi f \tau_l} \quad (5)$$

那么, 对于每个子信道

$$\mathbf{H}(f_n) = \sum_{l=0}^{L_p-1} \sqrt{P_l} \mathbf{H}_{l,n} e^{-j2\pi f_n \tau_l}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6)$$

将发射空时码字矩阵、接收信号矩阵和噪声信号矩阵列向量化, 仍然用原来的符号表示:

$$\mathbf{X} = \text{vec}(\mathbf{X}) \quad (7-a)$$

$$\mathbf{R} = \text{vec}(\mathbf{R}) \quad (7-b)$$

$$\mathbf{N}_0 = \text{vec}(\mathbf{N}_0) \quad (7-c)$$

设  $\mathbf{H}_V = \text{diag}[\mathbf{H}(f_0), \mathbf{H}(f_1), \dots, \mathbf{H}(f_{N-1})]$ , 则有

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_V \mathbf{X} + \mathbf{N}_0 \quad (8)$$

这样宽带信道响应矩阵就分解为  $N$  个窄带且相互独立的信道响应矩阵。

在散射环境中,  $\mathbf{H}_{l,n}$  可分解为如下形式<sup>[9]</sup>:

$$\mathbf{H}_{l,n} = \mathbf{\Psi}_{R,l,n}^{1/2} \mathbf{H}_{w,l}(\mathbf{\Psi}_{T,l,n}^{1/2})^H \quad (9)$$

其中  $\mathbf{H}_{w,l}$  的每个元素独立且服从零均值、单位方差的复高斯分布,  $\mathbf{\Psi}_{T,l,n}$ 、 $\mathbf{\Psi}_{R,l,n}$  分别表示发射阵列和接收阵列上关于第  $l$  个散射体簇的相关性矩阵。相关性矩阵可以采用文献[10]的方法近似计算

$$\mathbf{\Psi}_{ij} = \exp[-23\Delta^2(d_{ij}/\lambda)^2] \quad (10)$$

其中  $d_{ij}$  为第  $i$  个和第  $j$  个天线的间距,  $\Delta$  定义为角度扩展

$$\Delta = \sqrt{1 - |F_1|^2 / |F_0|^2} \quad (11)$$

其中  $F_m = \int_0^{2\pi} P(\phi) e^{jm\phi} d\phi$ ,  $P(\phi)$  为功率空间分布函数。

## 3 MIMO-OFDM 信道容量

根据文献[2]可得如下形式的信道容量计算公式:

$$C = \log_2 [\det(\mathbf{I}_{N_R N} + \rho \mathbf{H}_V \Sigma \mathbf{H}_V^H)] \quad (\text{bit/s/Hz}) \quad (12)$$

其中  $\rho$  为子信道上的信噪比。要计算信道容量采用以上公式乘以子信道带宽就可以了。同时注意到 OFDM 系统对载波的特殊处理, 由于相邻子载波信道带宽有二分之一相互重叠, 所以子信道带宽为系统带宽的  $2/(N+1)$ , 子信道上平均噪声功率相应地变为系统噪声功率  $\sigma_0^2$  的  $2/(N+1)$ 。因此若以系统带宽来计算信道容量, 则容量公式应变为如下的形式:

$$C = \frac{2}{N+1} \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_{N_R N} + \frac{N+1}{2} \rho \mathbf{H}_V \Sigma \mathbf{H}_V^H \right) \right] \quad (13)$$

其中  $\text{tr}(\Sigma) \leq 1$ ,  $\Sigma = \text{diag}[\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{N-1}]$ ,  $\rho = P_{\text{tot}} / \sigma_0^2$ 。

为简单起见, 假设每个发射支路平均发射功率相同, 每个子载波信道上平均发射功率也相同, 即假设  $\Sigma_n = \mathbf{I}_{N_T} / (N_T N)$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ ), 则

$$C = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \log_2 \left[ \det \left[ \mathbf{I}_{N_R} + \frac{N+1}{2N_T N} \rho \mathbf{H}(f_n) \mathbf{H}^H(f_n) \right] \right] \quad (14)$$

对  $\mathbf{H}(f_n)$  进行奇异值分解, 设  $\mathbf{H}(f_n) \mathbf{H}^H(f_n)$  的特征值为  $\Lambda_n^{(q)}$  ( $q = 0, \dots, N_R - 1$ ), 可得

$$C = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N_R-1} \log_2 \left[ 1 + \frac{N+1}{2N_T N} \rho \Lambda_n^{(q)} \right] \quad (15)$$

$$E(C) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N_R-1} E \left[ \log_2 \left[ 1 + \frac{N+1}{2N_T N} \rho \Lambda_n^{(q)} \right] \right] \quad (16)$$

大信噪比时, 忽略高阶小量则有

$$E(C) \approx \frac{2N}{N+1} \min(N_T, N_R) \log_2 \frac{(N+1)\rho}{2N_T N} + \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N_R-1} E \left[ \log_2 \Lambda_n^{(q)} \right] \quad (17)$$

若无时延或取  $L_p=1$  时, 大信噪比时的平均信道容量则为

$$E(C) \approx \frac{2N}{N+1} \min(N_T, N_R) \log_2 \frac{(N+1)\rho}{2N_T N} + \frac{2N}{N+1} \sum_{i=|N_T-N_R|+1}^{\min(N_T, N_R)} E \left[ \log_2(\chi_{2i}^2) \right] \quad (18)$$

当  $N=1$ , 以上公式就退化为 MIMO 系统平均信道容量的公式。

若载波数又很大, 则以上公式可进一步简化为

$$E(C) \approx 2 \min(N_T, N_R) \log_2 \frac{\rho}{2N_T} + 2 \sum_{i=|N_T-N_R|+1}^{\min(N_T, N_R)} E \left[ \log_2(\chi_{2i}^2) \right] \quad (19)$$

对比未采用 OFDM 技术的 MIMO 信道容量, 容易看出, OFDM 可以显著增加 MIMO 系统的频带利用率, 当子载波数很大时, 几乎可将 MIMO 信道容量提高 1 倍。

#### 4 仿真分析

本小节采用 Monte-Carlo 方法对 MIMO-OFDM 系统的信道容量进行了仿真分析。接收阵列和发射阵列为均匀直线阵列，天线数目均等于 4。仿真中做如下假设：发射天线阵列单元间距较大，以至于可以忽略发射天线上衰落相关性的影响；每个散射体簇对应的角度扩展都相等为  $\Delta$ ，接收天线阵列天线间距为  $d$ 。

**仿真 1** 采用 64 个子载波， $\Delta=0.3$ ， $d=0.5\lambda_0$ 。信道带宽取为 1MHz，计算无时延、最大时延等于  $7\mu\text{s}$  和  $14\mu\text{s}$  时平均信道容量随信噪比的变化情况，如图 2 所示。分析中采用了典型的指数衰减形式的时延功率谱函数<sup>[8]</sup>。

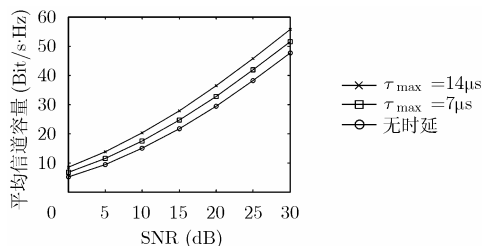


图 2 不同时延扩展时，平均信道容量随信噪比的变化曲线

**仿真 2** 无时延扩展或取  $L_p=1$ ， $\Delta=1$ ， $d=0.5\lambda_0$ ，计算不同子载波数目时平均信道容量随信噪比的变化情况，如图 3 所示。

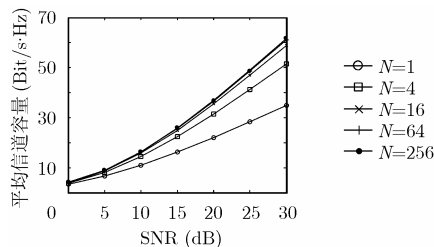


图 3 不同子载波数目时，平均信道容量随信噪比的变化曲线

**仿真 3**  $L_p=1$ ， $\text{SNR}=15\text{dB}$ ， $d=0.5\lambda_0$ ，计算接收信号的角度扩展分布为  $\Delta=0.1$ ， $0.3$ ， $0.6$  和  $1$  时信道容量随子载波数目的变化，如图 4 所示。

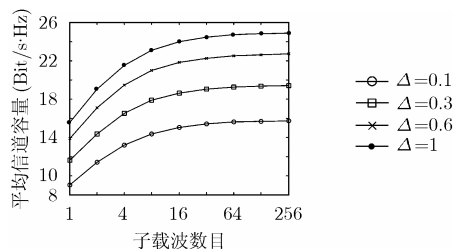


图 4 不同角度扩展时，平均信道容量随子载波数目的变化曲线

**仿真 4**  $L_p=1$ ， $\text{SNR}=15\text{dB}$ ， $\Delta=1$ ，计算接收天线阵列

天线间距  $d=0.3\lambda_0$ ， $0.5\lambda_0$  和  $\lambda_0$  时平均信道容量随子载波数目的变化，如图 5 所示。

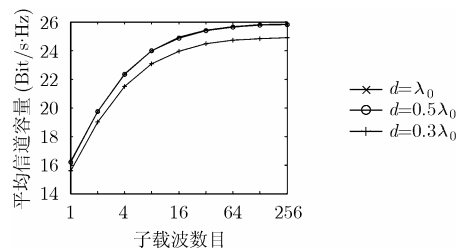


图 5 不同天线间距时，平均信道容量随子载波数目的变化曲线

通过以上分析可得到以下结论：

(1) 仿真结果表明，时延扩展在 MIMO-OFDM 系统中有利于提高信道容量，提供了又一种分集资源。如果分析中断信道容量(如中断概率为 0.9 时)，时延扩展改善信道容量的效果将更加明显。

(2) 与未采用 OFDM 技术( $N=1$ )时的信道容量相比，采用 OFDM 技术后信道容量显著提高。在信噪比等于 10dB 时， $N=256$  时的信道容量大约是  $N=1$  时的 1.7 倍，30dB 时为 1.75 倍。若不采用多载波调制技术，收发阵列则分别需要 8 根天线才能获得这样的增益，这在硬件实现上是很不可取的。而现在的大规模集成电路技术和 DSP 技术则很容易通过 IFFT 和 FFT 实现 OFDM。因此，将 MIMO 技术与 OFDM 技术结合可以使用较少的天线或硬件成本得到较高的信道容量。

(3) 角度扩展和天线间距是影响信道容量两个重要的因素，仿真 3 和仿真 4 表明，在衰落相关性很大的无线信道中，采用 OFDM 后，信道容量随着子载波数目的增加有显著提高，相关性对信道容量改善的程度影响很小。

#### 5 结束语

宽带信道具有明显的频率选择性，采用 OFDM 技术后，传输信道被分成众多独立并行的窄带子信道，可以有效降低频率选择性的不利影响。针对已往文献中的不足，论文重新推导了 MIMO-OFDM 系统的信道容量公式，分析了子载波数目、时延扩展、角度扩展、天线间距等因素对信道容量的影响。理论分析和仿真结果符合 MIMO-OFDM 信道容量特征。研究表明：非相关衰落信道和相关衰落信道中，OFDM 都可以显著提高 MIMO 系统的频谱利用率，当子载波数很大时，几乎可将 MIMO 信道容量提高 1 倍，从而允许只需要较少的天线和硬件成本就可以得到较高的信道容量；对 MIMO-OFDM 系统，时延扩展成为有利于提高信道容量的因素，为宽带数据传输提供了另一种分集资源。

#### 参考文献

- [1] Tarokh V, Seshadri N, and Calderbank A R. Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criteria and code construction. *IEEE Trans. on Inform*

- Theory*, 1998, 44(2): 744-765.
- [2] Foschini G J and Gans M J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Communications*, 1998, 6(3): 311-335.
- [3] Gesbert D, Shafi M, and Shiu D, *et al.* From theory to practice: an overview of MIMO space-time coded wireless systems. *IEEE Journal on selected Areas in Communications*, 2003, 21(3): 281-300.
- [4] Saltzberg B R. Performance of an efficient parallel data transmission system. *IEEE Trans. on Communication Theory*, 1967, 15(6): 805-811.
- [5] Weinstein S B and Ebert P M. Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform. *IEEE Trans. on Communication Theory*, 1971, 19(5): 628-634.
- [6] Paulraj A J, Gore D A, and Nabar R U, *et al.* An overview of MIMO communications — A key to gigabit wireless. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(2): 198-218.
- [7] Bölcskei H, Gesbert D, and Paulraj A J. On the capacity of OFDM-based spatial multiplexing systems. *IEEE Trans. on Communications*, 2002, 50(2): 225-234.
- [8] Proakis J G. *Digital Communication*(4th Edition). Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2002: 800-895.
- [9] Chuah C, Tse D N C, and Kahn J M, *et al.* Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2002, 48 (3): 637-650.
- [10] Lee W C Y. Effects on correlation between two mobile radio base-station antennas. *IEEE Trans. on Communications*, 1973, 21(11): 1214-1224.
- 黄丘林: 男, 1978 年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为射频识别及 MIMO 无线通信技术.
- 史小卫: 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向有智能天线、射频识别及电磁兼容.